ELECTROMAGNETISMO

PRE-RELATIVISTA

(DE MAXWELL, HERTZ Y LORENTZ)

REINALDO A. MUÑOZ HERNANDEZ

2001

UNIVERSIDAD DE ATACAMA

ÍNDICE

INTRODUCCION

Después de estudiar en el curso de Mecánica newtoniana las leyes generales del movimiento de los cuerpos y su aplicación en casos particulares de fuerzas constantes o muy simples, corresponde analizar los efectos de las fuerzas más importantes que ocurren en la naturaleza. En este sentido, en primer lugar cabe mencionar a la fuerza gravitacional, postulada por Newton en la "Ley de Gravitación Universal". En efecto, las primeras aplicaciones de esta teoría, desarrolladas por el mismo Newton, fueron al sistema solar, por una parte, explicando el movimiento de los planetas alrededor del sol como efecto de la interacción o fuerza gravitacional, así como la explicación de la naturaleza de la fuerza de peso, por otra parte, como la fuerza gravitacional que la tierra ejerce sobre los cuerpos que están en su superficie. Sin embargo, desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas, el estudio en especial de esta fuerza no es tan importante, ya que en la casi totalidad de las aplicaciones es sensiblemente constante (salvo el caso de los cohetes y naves espaciales), por lo que el efecto que produce en el movimiento de los cuerpos en las vecindades de la superficie terrestre es relativamente simple, y en consecuencia no es necesario efectuar un estudio especial al respecto.

En realidad el número de tipos de interacciones o fuerzas fundamentales que se ha identificado en la naturaleza es relativamente pequeño, ya que son sólo cuatro: gravitacional, electromagnética, fuerte y débil. Las dos primeras son de gran alcance, con efecto macroscópico apreciable, es decir son proporcionales al inverso del cuadrado de la distancia entre las partículas en interacción, mientras que las dos últimas son de corto alcance, es decir son importantes a distancias comparables con las dimensiones de los núcleos atómicos. Además se compara la intensidad o fortaleza relativa de estas cuatro interacciones fundamentales mediante las respectivas constantes de fortaleza de acoplamiento o interacción relativas. Ellas son, de mayor a menor: interacción fuerte: ≈ 1 ; interacción electromagnética: $\approx 10^{-2}$; interacción débil: $\approx 10^{-5}$; interacción gravitacional: $\approx 10^{-39}$.

La segunda fuerza que cabe considerar, entre las que ocurren en la naturaleza, por su importancia teórica y práctica, es la fuerza electromagnética, cuyo efecto engloba todos los fenómenos conocidos como eléctricos, magnéticos y ópticos. Como es bien sabido, estos fenómenos, estudiados durante siglos como aspectos diferentes de la naturaleza del mundo físico, son integrados en la teoría electromagnética, como aspectos de una misma realidad física: son manifestaciones de las interacciones electromagnéticas. Más aún, no sólo esos aspectos del mundo físico se describen por las interacciones electromagnéticas, sino que también las propiedades químicas, y muchas otras propiedades físicas de la materia, son consecuencia de esta interacción. En efecto, la materia está formada de átomos, y los átomos son sistemas físicos en los cuales la interacción electromagnética es esencial, ya que es ella la que determina sus estructuras así como las de las moléculas, y en consecuencia, sus correspondientes propiedades.

Recordemos que los átomos están formados por un núcleo relativamente pequeño de partículas con carga positiva (protones) y de partículas neutras (neutrones), rodeado de partículas con carga negativa (electrones), constituyendo un sistema físico con una cierta analogía a un sistema solar. Las propiedades químicas y muchas propiedades físicas de la materia depende de las interacciones electromagnéticas entre estas partículas cargadas, es decir entre protones y electrones. Sin embargo, a escala atómica, es necesario substituir la Mecánica newtoniana por otra teoría, la Mecánica cuántica, para describir apropiadamente la interacción electromagnética (y otras interacciones que ocurren en esos sistemas físicos).

La teoría que describe la interacción electromagnética, a nivel macroscópico, fue formulada inicialmente, en sus aspectos fundamentales, por Maxwell, en 1864, como una teoría de campos en medios continuos (los campos eléctrico y magnético). Posteriormente fue reformulada por Hertz, en 1884, con hipótesis más comprensibles y aceptables. Finalmente es completada, a nivel microscópico, por Lorentz, en 1892 , quien incorpora en la teoría a las partículas cargadas, es decir cuerpos relativamente pequeños con masa y carga eléctrica.

Pero esta teoría de partículas y campos resultó ser incompatible con los principios de la Mecánica newtoniana. El problema fue resuelto con la formulación, en 1905, de la Teoría Especial de la Relatividad, de Einstein, Poincaré y Lorentz, que modifica los principios de la Mecánica newtoniana y como consecuencia introduce algunas correcciones en la teoría electromagnética. Sin embargo estas modificaciones, en la práctica, son despreciables, razón por la cual la teoría de Maxwell, Hertz y Lorentz es la que se aplica habitualmente, y en consecuencia es la que se expone a continuación. Esta teoría, anterior a la Teoría Especial de la Relatividad, no es ni relativista Galileo ni relativista Lorentz, razón por la cual la denominamos "pre-relativista".

Para comprender mejor los conceptos básicos de esta teoría resulta conveniente conocer su génesis histórica, de modo que comenzaremos este estudio con un recuento histórico de los principales momentos del desarrollo de esta disciplina. Estos incluyen las observaciones empíricas realizadas desde los tiempos de la civilización griega hasta la Edad Media, el desarrollo de la electrostática y la magnetostática en los siglos XVII y XVIII , el estudio de las corrientes eléctricas y de las interacciones entre campos eléctricos y campos magnéticos en el siglo XIX , y finalmente la formulación covariante Lorentz de la teoría, que la hace compatible con el Principio de Relatividad, a comienzos del siglo XX, denominada "Teoría Especial de la Relatividad" (1905) .

INTRODUCCION HISTORICA

1) OBSERVACIONES EMPIRICAS :

- Al frotar ámbar (ηλεκτρον : "electrón") con un paño, este atrae pequeños trozos de paja: Tales de Mileto (~640 A.C.; ~547 A.C.).

- La magnetita, mineral de hierro de Magnesia (Μαγνητιζ : "magnetis") en Asia Menor, atrae trozos de hierro: griegos...

- Descubrimiento de la <u>brújula</u> (S.VI.D.C. en China).

- Los imanes tienen <u>polos magnéticos</u> (1269).
  Maricourt, Pierre Peregrinus de (S. XIII en Amiens, Francia)

- a) Hay muchas substancias que tienen la propiedad del ámbar (al ser frotados, atraen cuerpos livianos);
  b) La tierra es un imán.
  Gilbert, Williams (1544-1603): "De magnete" (1600). (Inglaterra).

2) ELECTROSTATICA Y MAGNETOSTATICA (SIGLOS XVII Y XVIII) :

- Los cuerpos electrificados no sólo atraen, sino que también repelen.
  Cabeo, Niccolo (1585-1650), jesuita italiano.

- Las substancias (que constituyen los cuerpos) se clasifican en <u>conductoras</u> y en <u>no conductoras</u> eléctricas.
  Gray, Stephen (1666-1736) en 1729 (publicado en 1721, Phil. Trans. Londres).

- Hay <u>dos clases de electricidad</u>: vítrea y resinosa (1733).
  Du Fay, Charles Francois de Cisternay (1698-1739). (París, Francia).

- Teoría de los dos fluidos de electricidad (1745 adelante).
  Nollet, Abate Jean-Antonie (1700-1770) (París, Francia).

- Teoría de un fluido y <u>conservación de la carga</u> (1747): positiva = vítrea; negativa = resinosa.
  Franklin, Benjamin (1706-1790).

- Ley del cuadrado de la distancia para la fuerza magnética (1750).
Michell, John (1724-1793); inventó la balanza de torsión (Queen's College, Cambridge). [La conjetura ya había sido hecha en el siglo XV, por el cardenal Nicolás de Cusa (1401-1464) en 1450. También ya había sido investigado por el Dr. Brook Taylor y por Pieter van Musschenbroek (1692-1761), profesor en Leyden, descubridor de la botella de Leyden en 1745].

- Ley del cuadrado de la distancia para la fuerza eléctrica (electrostática):

a) Fuerza entre discos metálicos electrizados (1760).
Bernoulli, Daniel (1700-1782) en Suiza.

b) Fuerza eléctrica nula al interior de un cuerpo (hueco) conductor (1755).
Franklin, Benjamin (1706-1790) en Estados Unidos.

c) Lo anterior implica la ley de cuadrado de la distancia para la interacción electrostática (1766).
Priestley, Joseph (1733-1804), descubridor del oxígeno, informado por un amigo del descubrimiento de B. Franklin (1765), en Londres, Inglaterra.

d) Obtiene 2 en el exponente, con error de 3% (1769).
Robison, John (1739-1805), de Edimburgo, Escocia.

e) Coulomb, Charles Augustin de, (1736-1806), verifica, en 1785, las leyes del cuadrado de la distancia tanto para la fuerza eléctrica (por tres métodos diferentes, uno de ellos con la balanza de torsión, que inventó independientemente de J. Mitchell) como para la fuerza magnética (en París, Francia).

3) MOVIMIENTO DE CARGAS ELÉCTRICAS Y CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS:

- Efecto biológico de la corriente eléctrica, atribuida a una supuesta "electricidad animal" (1780, publicado en 1791).
Galvani, Luigi (1737-1798), profesor de Anatomía en la Universidad de Bolonia, en Italia.

- Invención de la pila eléctrica (1800).
Volta, Alejandro (1745- 1827), profesor de Física en la Universidad de Pavía (Milán).

- Concepto de <u>potencial eléctrico</u> (1812).
  Poisson, Simeon Denis (1781-1840), en París, Francia.

- Gauss, Karl Friedrich (1777-1855): <u>Ley de Gauss</u>.

- Primera relación (experimental) entre electricidad y magnetismo: <u>campo magnético producido por una corriente</u> (21-07-1820).
  Descubierta por Oersted, Hans Christian (1777-1851), profesor de Física en la Universidad de Copenhagen, Dinamarca, desde 1806.

- <u>Fuerza (magnética) entre corrientes eléctricas</u>.
  Ampère, André-Marie (1775-1836), comunicada el 18-9-1820, una semana después de conocer la noticia del descubrimiento de Oersted, comunicada por Arago a la Academia de Ciencias (11-09-1820, en París, Francia).

- <u>Expresión matemática del campo magnético de una corriente</u>.
  Biot, Jean-Baptiste (1774-1862) y Savart, Félix (1791-1841), comunicada el 30-10-1820 (en París, Francia).

- <u>Líneas de fuerza</u> (1821).
  Faraday, Michael (1791-1867), las define en Exp. Res., ii, p.127. El término **lineae virtutis** había sido usado por los escolásticos, en particular por N. Cabeo en Philosophia magnetica (1629). Define tubo de fuerza y encuentra que el producto del campo por la sección del tubo es constante, es decir que <u>el flujo es constante</u>.

- <u>Ley de Ohm</u>: Intensidad de la corriente inversamente proporcional a la resistencia y directamente proporcional a una constante del generador de corriente eléctrica (1826-27).
  Ohm, Georg Simon (1789-1856), en Colonia. ($\tau = a/[b + x]$, donde τ es el torque del galvanómetro [proporcional a la intensidad de la corriente eléctrica], $b + x$ es proporcional a la resistencia (x es la longitud del conductor) y a es proporcional a la temperatura del efecto Seebeck). Se usó el efecto Seebeck para producir la corriente. Seebeck, Thomas Johan (1770-1831): efecto descubierto en 1822. Kirchhoff identificó la constante a con el potencial eléctrico V, en 1849., lo que permite darle su forma actual : $\Delta V = R I$. Kirchhoff, Gustavo (1824-1887).

- Segunda relación entre electricidad y magnetismo: <u>corriente inducida</u> (1831-32).
  Descubierta por Faraday, Michael (1791-1867), y un año antes, por Henry, Joseph (1797-1879), en la Academia de Albania (más tarde en la Universidad de Princeton y en la Smithsonian Institution en Washington, D.C.), que no publicó sus resultados hasta 7-1832.

- Corrientes autoinducidas (1832).
  Henry, Joseph (1797-1879) en Estados Unidos.

- Sentido de las corrientes inducidas (1836).
  Lenz, Heinrich Friedrich Emil, (1806-1965) n. en Estonia, fue profesor de Física en la Universidad de St. Petersburgo.

- Ecuaciones de las ondas electromagnéticas (1862).
  Clerk Maxwell, James. (1831-1879); n. en Edimburgo; 1860-1865 King's College, Londres; 1871 : Cavendich Laboratory.

- Ecuaciones del electromagnetismo, o más exactamente, de los campos eléctrico y magnético (1864).
  Clerk Maxwell, James, generaliza la ley de Ampère, formulando el concepto de "corriente de desplazamiento".

- Reformulación de la teoría de los campos eléctrico y magnético (1884).
  Hertz, Heinrich Rudolf (1857-1894), postula analogía del campo eléctrico y del campo magnético.

- Producción experimental de ondas electromagnéticas (1887).
  Hertz, Heinrich Rudolf (1857-1894), en Karlsruhe (Techn. Hochs) (n. en Hamburgo).

- Teoría electrónica del electromagnetismo, es decir teoría de partículas cargadas y campos (1892).
  Lorentz, Hendrik Antoon (1853-1928), en Holanda.

4) COMPATIBILIDAD CON EL PRINCIPIO DE RELATIVIDAD Y LAS ECUACIONES DE TRANSFORMACION DE COORDENADAS.

- Teoría Especial de la Relatividad (1905).
  Lorentz, Hendrik Antoon: Ecuaciones de Transformación de las coordenadas que dejan invariantes, o más bien covariantes, a las ecuaciones de Maxwell (1904).
  Poincaré, Henri (1854-1912): Principio de Relatividad (1904), formulado en el Congreso de Artes y Ciencia realizado ese mismo año en Saint Louis, USA.
  Einstein, Albert (1879-1955): Sentido físico de los conceptos de espacio y de tiempo físicos y de las Ecuaciones de transformación de Lorentz (1905).

BIBLIOGRAFIA

- Whittaker, Edmund: A History of the Theories of Aether and Electricity. V.I.: The Classical Theories.
  Harper Torchbook, 1960. (Thomas Nelson and Sons, 1951).

- Arons, A.B.: Development of Concepts of Physics.
  Addison-Wesley, Reading. Mass, 1965.

- Holton, G. y Roller, D.H.D.: Fundamentos de la Física Moderna.
  Reverte, 1963 (Addison-Wesley, 1958).

- Bernal, J.D.: Historia de la Física Clásica.
  (The History of Physics before the Modern Age, 1972).
  Siglo XXI. 1975.

- Shamos, M.H.: Great Experiments in Physics.
  Holt. Rinehart and Winston. 1959.

- Papp, Desiderio.: Ideas Revolucionarias en la Ciencia.
  Editorial Universitaria, Santiago, Chile, 1978.

- Rolnick, W. B. The Fundamental Particles and Their Interactions.
  Addison-Wesley, Reading. Massachusetts, USA, 1994.

PARTE A : ELECTROSTATICA

PERSPECTIVA I

Se comenzará esta exposición con el estudio de la interacción entre partículas cargadas en reposo. A partir de los conceptos de partícula y de interacción entre partículas, estudiados en la Mecánica newtoniana, se formula el concepto de partícula cargada y de interacción eléctrica o electrostática; este último adjetivo se justifica por el hecho de limitarse el estudio a la interacción entre partículas cargadas en reposo ("estática"), ya que si las partículas están en movimiento la interacción entre ellas no se limita a la fuerza eléctrica. Se formula entonces la ley de la interacción entre partículas cargadas en reposo, o interacción eléctrica, es decir la ley de Coulomb. Cabe hacer notar que la fuerza eléctrica es conservativa, lo que permite asociarle una función energía potencial.

Se observa que en la naturaleza pueden distinguirse dos tipos de cuerpos: conductores y aislantes, según permitan o no el movimiento a través de ellos de las partículas cargadas, o como se dice habitualmente, el paso o transporte de carga eléctrica. En rigor, en la actualidad se hace una clasificación más fina; se distinguen cuatro tipos de substancias: conductores o metales, semimetales, semiconductores, y aislantes o dieléctricos.

Se observa también en la naturaleza dos tipos de partículas cargadas. Se las designas, respectivamente, partículas con carga positiva, cuyo ejemplo más importante son los protones, que forman parte de los núcleos de los átomos, y partículas con carga negativa, cuyo ejemplo más importante son los electrones, que forman parte de la periferia de los átomos, y cuya distribución determina las propiedades físicas y químicas de la materia.

La existencia de dos tipos de partículas cargadas complica la aplicación de la teoría; con el objeto de simplificarla, se formula el concepto de campo eléctrico como razón de la fuerza eléctrica dividida por la carga de la partícula sobre la que actúa esa fuerza. Este concepto tiene aquí un carácter sólo formal, justificado únicamente por facilitar la descripción de esta interacción.

Dado que en la realidad las partículas cargadas son muy pequeñas, a menudo se considera situaciones en las que se tiene distribuciones prácticamente continuas de carga eléctrica, lo que hace bastante difícil el cálculo de las fuerzas o de los campos eléctricos. Para facilitar el cálculo en algunos casos en que el sistema físico tiene cierta simetría, resulta útil definir el concepto de flujo del campo eléctrico (a través de una superficie, definido en función de esa superficie y del campo eléctrico en esa superficie), y utilizar la propiedad que se expresa en el teorema de Gauss, que relaciona el flujo del campo eléctrico en una superficie cerrada con la carga neta que hay en su interior.

De manera análoga a la definición del concepto de campo eléctrico, resulta conveniente definir el concepto de potencial eléctrico como la razón de la energía potencial dividida por la carga de la partícula que tiene esa energía potencial. Del mismo modo que a partir de la energía potencial se puede calcular la fuerza. a partir del potencial eléctrico se puede calcular el campo eléctrico. De manera que resulta totalmente equivalente conocer la fuerza o conocer el potencial, con la ventaja que esta última función es escalar, lo que facilita los cálculos.

Posteriormente se estudia ciertos dispositivos que permiten acumular carga eléctrica, que denominamos condensadores. Se define una magnitud que caracteriza a cada uno de estos dispositivos, llamada capacitancia, que es la razón, constante, de la carga acumulada en el condensador dividida por el correspondiente potencial eléctrico entre los dos conductores. mutuamente aislados. que lo forman. A continuación se estudia el condensador de placas paralelas y la capacitancia de una esfera, así como la capacitancia de condensadores en serie y en paralelo, respectivamente.

Se analiza ahora la influencia en la capacitancia del medio material que exista entre las placas de un condensador, lo que lleva a definir la constante dieléctrica de una substancia o medio material. Comenzamos así el estudio de las propiedades eléctricas de la materia, lo que nos conduce a definir dos nuevos campos vectoriales, como son la polarización eléctrica, que describe el efecto del campo eléctrico sobre la materia, es decir la polarización de los átomos producida por el campo eléctrico, y el desplazamiento eléctrico, que es proporcional al campo eléctrico que resulta de substraer el efecto de la polarización de la materia. Además definimos dos constantes eléctricas adicionales para describir las propiedades eléctricas de la materia, denominadas la permitividad, que relaciona el desplazamiento y el campo eléctricos, y la susceptibilidad eléctrica, que relaciona la polarización y el campo eléctricos.

El proceso de acumular carga eléctrica en un condensador requiere de cierta energía, asociada a la cantidad de carga y a la diferencia de potencial. Sin embargo se demuestra en ciertos casos particulares que esta energía se puede asociar al campo eléctrico producido por las cargas del condensador y al volumen en el cual se ha creado ese campo eléctrico, o más exactamente que la densidad de energía es proporcional al cuadrado del campo eléctrico en ese punto. Se postula entonces una realidad física para el campo eléctrico, en el sentido que se le puede asociar energía. (Posteriormente, en el desarrollo de la teoría electromagnética, se le asocia también momentum o cantidad de movimiento y momento angular, que son las tres magnitudes fundamentales en la Física (que pueden transferirse mutuamente en una interacción entre sistemas físicos determinados), para las cuales se postula principios o leyes de conservación.

De esta manera los **<u>sistemas físicos</u>** incluyen ahora no sólo **<u>partículas</u>**, como en la Mecánica newtoniana, sino que también **<u>campos</u>**. Las partículas pueden tener carga positiva o negativa. Las partículas positivas estables son los protones y la partículas negativas estables son los electrones, y en conjunto con los neutrones - partículas sin carga eléctrica - constituyen los átomos. En los cuerpos sólidos, los electrones, que son partículas con masa mucho menor que los protones y que están en la periferia de los átomos, son las partículas que conducen carga eléctrica, con mayor o menor facilidad. En los líquidos o en los gases puede haber también transporte de carga positiva, ya que los núcleos de los átomos (ionizados) pueden moverse en esos casos. Por otra parte, también hay dos tipos de campos electromagnéticos: los campos electrostáticos y magnetostáticos, o campos coulombianos - inversos al cuadrado de la distancia -, y los campos de radiación, es decir las ondas electromagnéticas, que son inversos a la distancia. Las naturalezas físicas de estos campos son diferentes, y consecuentemente sus respectivas descripciones matemáticas no se entremezclan.

1.- LA INTERACCION ELECTRICA. LA LEY DE COULOMB

1.1.- Los conceptos de partícula cargada y de interacción eléctrica.

Al frotar dos cuerpos, en algunos casos, estos adquieren la propiedad de ejercer fuerzas entre ellos o sobre otros, las que pueden ser de atracción o de repulsión; se dice que se "cargan" de electricidad y que adquieren la propiedad de interactuar electrostáticamente. Se ha encontrado que hay dos tipos de electricidad, o más exactamente dos tipos de partículas con carga eléctrica, denominadas convencionalmente cargas positivas y cargas negativas, que se distinguen porque las cargas de igual signo se repelen y las de diferente signo se atraen. Las partículas cargadas estables, a saber los protones, con carga positiva, y los electrones, con carga negativa, en conjunto con otras partículas neutras - los neutrones - constituyen los átomos, los que a su vez constituyen los cuerpos materiales (sólidos, líquidos y gaseosos). En condiciones habituales, los cuerpos tienen el mismo número de cargas positivas y negativas, de manera que no se ejercen fuerzas eléctricas netas entre ellos. Pero al frotarlos entre si, algunos cuerpos ganan y otros pierden electrones, que están en la periferia de los átomos; los cuerpos que ganan electrones quedan con carga neta negativa, y los que pierden electrones quedan con carga neta positiva. La electricidad que adquiere el ámbar u otras resinas por frotamiento es carga negativa (resinosa), y la adquirida por el vidrio es carga positiva (vítrea).

1.2.- Electrones y protones.

Las partículas cargadas elementales o básicas estables son el electrón y el protón. Sus masas, m_e y m_p, son diferentes, y sus cargas eléctricas son, en valor absoluto, iguales, y se le designa por e.

$$m_e = 9{,}110 \cdot 10^{-31}\ [\mathrm{kg}] \quad ; \quad m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}\ [\mathrm{kg}]$$

$$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ [\mathrm{C}]$$

Nótese que la relación de las masas es:

$$m_p = 1{,}840 \cdot 10^3\ m_e$$

1.3.- La conservación de la carga eléctrica neta.

De manera similar al caso de la masa, que es una constante en Mecánica newtoniana, la carga eléctrica neta, es decir la suma de las cargas positiva y negativa, también se conserva en la teoría Electromagnética. Pero la carga positiva y negativa, por separado, podría no conservarse. En particular, hay fenómenos físicos en los que las partículas se aniquilan o se crean; en esos casos no se conserva la masa (en reposo), aunque por el contrario siempre se conserva la carga neta. La teoría electromagnética de Maxwell (prerrelativista) no incluye ese tipo de interacciones.

1.4.- Conductores y aisladores (o aislantes).

Se encuentra experimentalmente que hay cuerpos que conducen la carga eléctrica, denominados conductores (metales, soluciones, etc.), y cuerpos que prácticamente no conducen la carga eléctrica, denominados aisladores o aislantes (cerámica, papel, etc.). En rigor todos los cuerpos conducen en algún grado la electricidad, pero en el caso de los cuerpos aislantes, la conducción es tan pequeña que puede considerarse nula para los efectos prácticos. Se verifica también que hay substancias con propiedades conductoras intermedias, tales como los semiconductores, de gran importancia práctica y teórica (Si, Ge), y además los semimetales (Bi, As, Sb).

1.5.- Carga eléctrica por inducción (electrostática).

Al acercar un cuerpo cargado a un conductor, las cargas negativas (electrones) se acercan o alejan, según el caso; se produce entonces una fuerza resultante del cuerpo cargado sobre el cuerpo conductor. El análisis de la distribución de las cargas muestra que en todo caso la fuerza es de atracción.

Además, si se separa el cuerpo en dos partes: la más alejada y la más cercana al cuerpo cargado, o si se saca la carga de uno de los extremos, se obtiene dos o un cuerpo cargado, respectivamente. Se dice que se ha cargado el cuerpo por inducción electrostática.

1.6.- La ley de Coulomb (1785).

Durante el siglo XVIII se investigó la ley de dependencia de la fuerza electrostática en función de la distancia, comparándola con la ley de la gravitación universal; es decir, por analogía con la fuerza gravitacional, se conjetura una fuerza electrostática proporcional al inverso del cuadrado de la distancia. Este proceso culmina con el trabajo del físico francés Charles Augustin de Coulomb, quien verifica en 1785, para esferas con cargas de igual y de diferente signo, la ley del inverso del cuadrado de la distancia entre los centros de las esferas respectivas, utilizando la balanza de torsión, que inventa independientemente de J. Michell, de Cambridge (quien había verificado, alrededor de 1750, con este instrumento, la ley del inverso del cuadrado de la distancia para las fuerzas magnéticas).

Estos resultados experimentales nos inducen a formular la siguiente hipótesis, denominada "ley de Coulomb":

Forma cualitativa: la magnitud de la fuerza de interacción electrostática entre dos partículas cargadas es proporcional a las cargas de las partículas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Forma cuantitativa: la magnitud de la fuerza de interacción electrostática entre dos partículas cargadas es igual a una constante multiplicada por el producto de las cargas y dividida por el cuadrado de la distancia que las separa; su dirección es la de la recta determinada por las posiciones de las partículas, y su sentido es de repulsión si las cargas son de igual signo y de atracción en caso contrario, es decir si las cargas son de diferente signo.

$$F_{1(2)} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

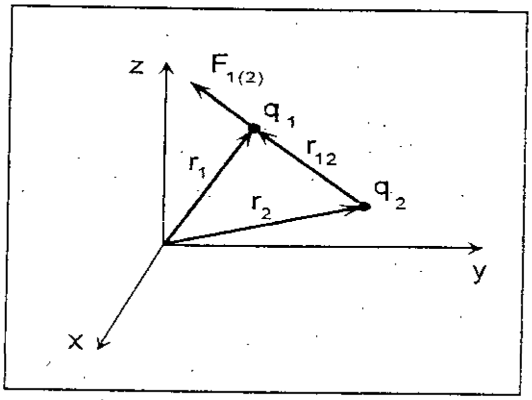


Fig. 1.1

La fuerza $\mathbf{F}_{1(2)}$ es la fuerza producida por la partícula 2 sobre la partícula 1. El vector $\mathbf{r}_{12}$ es el vector posición de la partícula 1 relativa a la partícula 2, es decir:

$$\mathbf{r}_{12} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

La unidad de carga eléctrica se denomina el "Coulomb", se la designa por "C", y se la definirá más adelante.

En el Sistema Internacional de unidades, $k = 1/(4\pi\epsilon_o)$, con F expresada en [N], r en [m] y q en [C]. La constante ϵ_o se denomina la "permitividad del vacío". Los valores de estas constantes son:

$$k \approx 9{,}0 \cdot 10^9 \ [Nm^2/C^2 \quad ; \quad \epsilon_o = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \ [C^2/Nm^2] \ (\approx 8{,}9 \cdot 10^{-12}).$$

Es ilustrativo comparar la interacción eléctrica con la interacción gravitacional, comparando el valor de k con el valor de la Constante de Gravitación Universal, G, de la ley correspondiente:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

En este caso se tiene: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \ [Nm^2/kg^2]$

2.- EL CAMPO ELECTRICO. LA LEY DE GAUSS

2.1.- Concepto y definición de Campo Eléctrico.

La fuerza eléctrica entre partículas cargadas es función de la distancia relativa entre las partículas. La experiencia muestra que es conveniente describir esta función de la posición de la partícula sobre la que actúa la fuerza como una entidad física: el campo de fuerza. Resulta más útil definir una nueva magnitud física: el campo eléctrico, **E** , definido como la razón del campo de fuerza dividido por la carga sobre la que actúa la fuerza, o, como se dice impropiamente, la fuerza por unidad de carga:

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) \underset{def}{=} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{q}}$$

Los operacionalistas (o positivistas) afirman que la carga q afectaría al campo de fuerza original, y en consecuencia sería necesario suponer q pequeño, o tomar el límite $q \to 0$. Desde el punto de vista teórico no hay problema o dificultad en este aspecto. Para una distribución de carga determinada, el campo eléctrico se define como se ha indicado. La unidad del campo eléctrico, **E** , a pesar de la importancia de este concepto, no tiene un nombre específico, sino que se expresa como [N/C] .

2.2.- La superposición de campos eléctricos.

El campo eléctrico asociado o producido por varias cargas puntuales se obtiene aplicando el principio de superposición de las fuerzas (IV Principio de la Dinámica), que es válido también para los campos eléctricos:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i$$

En el caso del campo eléctrico producido por muchísimas partículas, consideradas como distribuciones continuas de carga, situación que suele ocurrir en la práctica debido al gran número y pequeñez de los electrones, los protones y los átomos, la sumatoria se transforma en una integral, y en consecuencia se tiene.

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} \quad ;$$

en forma explícita:

$$\mathbf{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{E}}$$

2.3.- Las líneas de campo eléctrico ("líneas de fuerza").

En el análisis de las diversas situaciones en que ocurren los campos eléctricos, es útil una representación geométrica de ellos, tal que permita visualizar sus características. Con este propósito se utilizan las denominadas líneas de campo que se definen como líneas tales que el campo es tangente a ellas en todo punto.

Aún cuando este concepto, introducido por Faraday con la denominación de "líneas de fuerza", tiene un origen empírico relacionado con la representación del campo eléctrico, puede ser utilizado para representar cualquier campo vectorial, y su definición permite determinar estas líneas en forma matemática, con tal que se puedan resolver las ecuaciones diferenciales que están implícitas en esta definición. En consecuencia, en el caso particular del campo eléctrico, definimos las líneas de campo eléctrico como líneas (ni "imaginarias" ni "reales". son líneas geométricas en el espacio físico, considerado como espacio euclidiano), tales que el campo es tangente a ellas en todos los puntos.

2.4.- Aplicaciones.

1.- Cálculo del campo eléctrico, **E** (vectorial), en el caso de una distribución discreta de carga.

Dadas tres partículas, calcular la fuerza y el campo eléctrico para diferentes cargas en diferentes puntos: a), b), c), d), e). Dibujar las líneas de fuerza, o de campo, en cada caso.

q_1 : (0,0) dm ; + 4.0 · 10^{-5} [C] q_2 : (2,0) dm ; + 6,0 · 10^{-5} [C]

q_3 : (0,4) dm ; + 8,0 · 10^{-5} [C]

a) q : (1,2) dm ; ± 2,0 · 10^{-5} [C] ; b) q : (2/3,4/3) dm ; ± 2,0 · 10^{-5} [C]

c) q : (2,4) dm ; ± 2,0 · 10^{-5} [C] ; d) q : como c), pero $q_1 = q_2 = q_3 = q$.

e) q : como c), pero q_1 : (0,0) dm ; -4,0 · 10^{-5} [C] .

Analizar la estabilidad en cada caso.

f) q_1 : (x,y) ; ± 2,0 · 10^{-5} [C] , con (x,y) tal que haya equilibrio (estable o inestable).

En este caso se aplican los principios de superposición de las fuerzas y de los campos eléctricos, respectivamente:

$$\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F} \qquad ; \qquad \mathbf{E} = \Sigma \mathbf{E}$$

2.- Campo eléctrico de un dipolo.

Se denomina "dipolo eléctrico" al conjunto de dos cargas eléctricas, de igual magnitud pero diferente signo, que están a una distancia fija. En la naturaleza es el caso de las moléculas iónicas, formadas de un ion positivo y uno negativo; también se forman al colocar átomos y moléculas en un campo eléctrico: se produce un desplazamiento relativo de los núcleos (positivos) y de los electrones (negativos).

Se define el "momento eléctrico dipolar" , **p** , asociado a un dipolo, como una magnitud vectorial cuya norma es el producto de la carga común de las partículas por la distancia entre esas partículas, cuya dirección es la del eje del dipolo, es decir de la recta que une las partículas, y cuyo sentido es de la partícula negativa a la partícula positiva.

a) Campo eléctrico de un dipolo en un punto de su eje y en un punto sobre una simetral del dipolo, respectivamente.

Sea un dipolo de carga q y una distancia a entre las cargas. El momento dipolar eléctrico es qa . Consideremos un punto L sobre el eje del dipolo, a una distancia r_L del centro de este dipolo, más cerca de la carga positiva. En ese punto el campo eléctrico es paralelo al momento eléctrico dipolar. El eje x se elige a lo largo del eje del dipolo, y en el

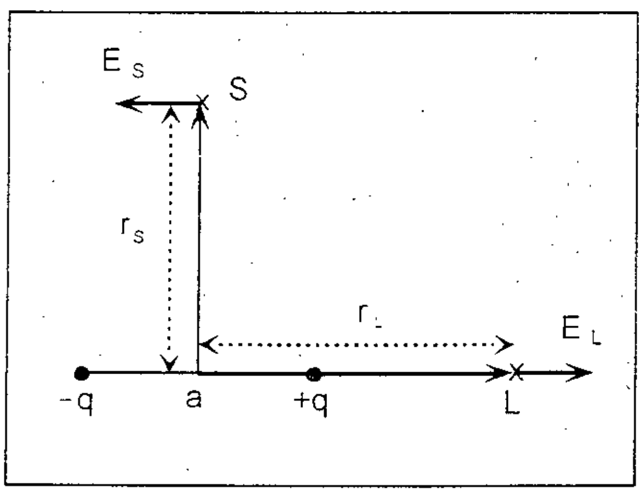


Fig. 2.1

sentido del momento dipolar: así sólo en el eje x el campo eléctrico tiene componente, y esta es positiva; su valor está dado por:

$$E_L = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left\langle \frac{q}{(r_L - a/2)^2} - \frac{q}{(r_L + a/2)^2} \right\rangle$$

que se reduce a:

$$E_L = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{2r_L a}{(r_L^2 - a^2/4)^2}$$

Consideremos un punto S sobre una simetral del dipolo, a una distancia r_S del centro de este dipolo, a igual distancia de ambas cargas. El campo eléctrico en ese punto, como se puede apreciar en la figura, es antiparalelo al momento dipolar eléctrico, ya que las componentes perpendiculares al dipolo de ambas cargas se cancelan mutuamente, y las componentes paralelas son en sentido contrario al sentido del momento dipolar eléctrico. Denominando por ϕ el ángulo del campo de la carga positiva con el momento dipolar eléctrico, que es también el sentido del eje x, la componente del campo eléctrico resultante en el eje x es:

$$E_S = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\left\langle \frac{q}{r_S^2 + (a/2)^2} + \frac{q}{r_S^2 + (a/2)^2} \right\rangle \frac{a/2}{[r_S^2 + (a/2)^2]^{1/2}}$$

que se reduce a:

$$E_S = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{a}{[r_S^2 + (a/2)^2]^{3/2}}$$

Nótese que estos resultados obtenidos para los campos eléctricos pueden ser expresados en función del momento dipolar eléctrico respectivo. En efecto, observando el sentido de los campos eléctricos calculados y del momento dipolar, se constata que el campo eléctrico $\mathbf{E}_L$ es paralelo al momento dipolar, en cambio el campo eléctrico $\mathbf{E}_S$ es antiparalelo con el momento dipolar. En consecuencia se tiene:

$$\mathbf{E}_L = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{2r_L}{(r_L^2 - a^2/4)^2}\,\mathbf{p}$$

$$\mathbf{E}_S = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\,\frac{1}{[r_S^2 + (a/2)^2]^{3/2}}\,\mathbf{p}$$

Para puntos lejanos comparados con las dimensiones del dipolo, más precisamente con $r^2 >> (a/2)^2$ o $(a/2)^2 / r^2 \approx 0$, se tiene:

$$E_L = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{2\mathbf{p}}{r_L^3} ,$$

$$E_S = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\mathbf{p}}{r_S^3}$$

b) Campo eléctrico de un dipolo en un punto cualquiera, alejado del dipolo.

Consideremos un punto P , cuyo vector posición respecto del punto medio del dipolo forma un ángulo θ con el momento dipolar eléctrico. El campo eléctrico del dipolo en ese punto es la suma de los campos de dos dipolos, cuyos momentos dipolares son las componentes del momento dipolar en las direcciones perpendicular y paralela al vector posición relativa del punto P con respecto al punto medio del dipolo original.

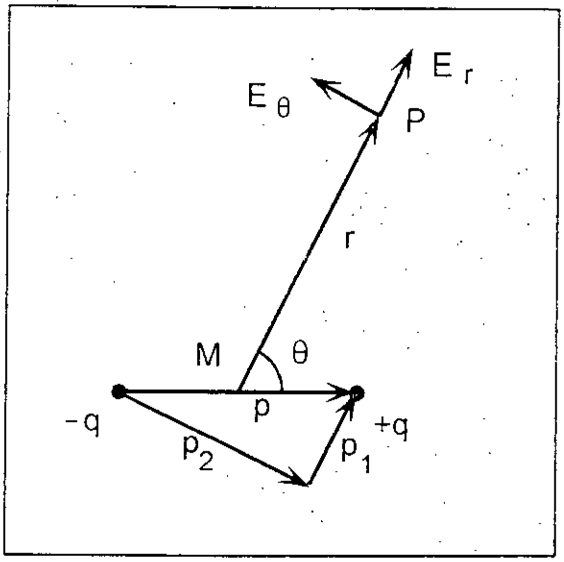


Fig. 2.2

En consecuencia, las componentes radial, E_r , y transversal, E_θ , del campo eléctrico, relativas a la dirección del vector posición del punto P respecto del punto medio del dipolo, están dadas por los campos eléctricos de los dipolos $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ respectivamente, en la aproximación $(a/2)^2 << r^2$. o lo que es lo mismo $(a/2)^2/r^2 \approx 0$. En efecto, el dipolo $\mathbf{p}_1$ sólo crea un campo eléctrico en la dirección radial (pero no transversal), mientras que el dipolo $\mathbf{p}_2$ sólo crea un campo eléctrico transversal (pero no radial), tal como se calculó en los casos particulares antes analizados. Utilizando esos mismos resultados, en la misma aproximación, se obtiene entonces:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{2p \cos\theta}{r^3} ,$$

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \cdot \frac{p \, \text{sen}\, \theta}{r^3}$$

3.- Cálculo del campo eléctrico, **E**, en el caso de una distribución continua de carga.

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}$$

Las distribuciones continuas de carga pueden ser unidimensionales: a lo largo de una línea, que puede ser recta o curva, bidimensionales: sobre una superficie, que puede ser plana o curva, o tridimensionales: en un volumen, que puede ser una esfera, un paralelepípedo, o un cuerpo cualquiera.

En cada uno de esos casos se define una densidad de carga eléctrica, que a menudo se supone constante. Para una distribución continua unidimensional de carga se tiene una densidad lineal de carga, λ. Para una distribución continua bidimensional de carga se tiene una densidad superficial de carga, σ. Para una distribución continua tridimensional de carga una densidad de carga, ρ. El elemento de carga eléctrica que crea el elemento diferencial de campo eléctrico $d\mathbf{E}$ es entonces, respectivamente: $dq = \lambda\, ds$, $dq = \lambda\, dA$, $dq = \rho\, dV$.

a) Dada una distribución lineal, recta y uniforme de carga, lo que implica una densidad lineal de carga, λ, constante, calcular el campo eléctrico en un punto dado P (a,b).

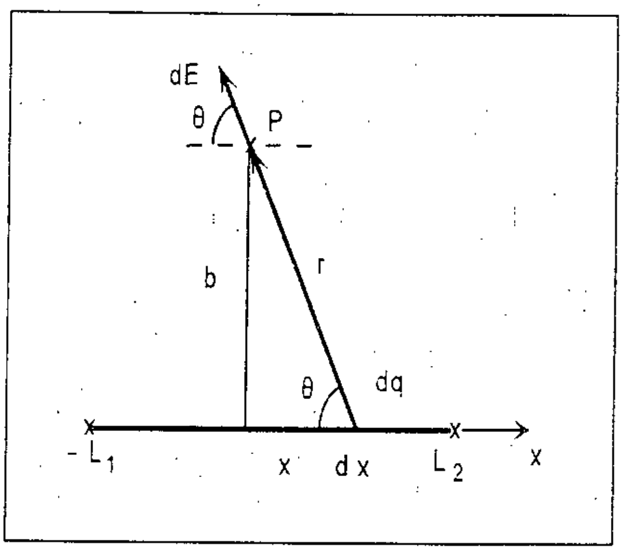


Fig. 2.3

Solución:

Se elige el eje x sobre la distribución lineal de carga; en cuanto al eje y, se le elige sobre la recta perpendicular al eje x que pasa por el punto P. En este caso las coordenadas del punto P son entonces: (0,b).

La distribución de carga se extiende entonces desde $-L_1$ hasta L_2; si la longitud total es L se tiene entonces: $L = L_1 + L_2$.

(<u>Nota:</u> A menudo en los textos se considera los casos donde $L \to \infty$, o $-L_1 = L_2$; pero en rigor no es necesario particularizar el problema; siempre hay que calcular las mismas integrales para obtener la componente E_y; por otra parte, en el caso general, la componente $E_x \neq 0$, pero la integral necesaria para calcular esta componente del campo eléctrico es del mismo tipo que la utilizada para calcular E_y, de manera que la dificultad matemática no aumenta al abordar la solución del caso más general).

Las componentes del campo eléctrico producido por $dq = \lambda\, dx$, en x, son:

$$dE_x = -\,dE \cos\Theta \quad ; \qquad dE_y = dE \operatorname{sen}\Theta \quad ;$$

donde se tiene que:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{dq}{r^2} \quad ; \qquad dq = \lambda\, dx \quad ; \qquad r^2 = b^2 + x^2 \quad ;$$

$$\cos\Theta = \frac{x}{r} \quad ; \qquad \operatorname{sen}\Theta = \frac{b}{r}$$

Entonces, las componentes del diferencial del campo eléctrico, en función de x, son:

$$dE_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{\lambda\, dx}{(b^2+x^2)}\frac{x}{(b^2+x^2)^{1/2}} \quad ; \quad dE_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{\lambda\, x\, dx}{(b^2+x^2)^{3/2}}$$

$$dE_y = +\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{\lambda\, dx}{(b^2+x^2)}\frac{b}{(b^2+x^2)^{1/2}} \quad ; \quad dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{\lambda\, b\, dx}{(b^2+x^2)^{3/2}}$$

Las componentes del campo eléctrico se obtiene integrando estas expresiones. Nótese que si $L_1 = L_2$, entonces. $E_x = 0$, como debe ser por razones de simetría.

$$E_x = \int_{-L_1}^{L_2} dE_x \qquad ; \qquad E_y = \int_{-L_1}^{L_2} dE_y$$

Para calcular estas integrales es útil tener presente las siguientes relaciones:

$$d(\cos\Theta) = d\left(\frac{x}{(b^2+x^2)^{1/2}}\right) \quad ;$$

$$d(\cos\Theta) = \frac{b^2}{(b^2+x^2)^{3/2}}\,dx \quad ;$$

en consecuencia:

$$\frac{dx}{(b^2+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{b^2}\,d(\cos\Theta)$$

Por otra parte:

$$d(\operatorname{sen}\Theta) = d\left(\frac{b}{(b^2+x^2)^{1/2}}\right) \quad ;$$

$$d(\operatorname{sen}\Theta) = \frac{-\,b\,x}{(b^2+x^2)^{3/2}}\,dx \quad ;$$

en consecuencia:

$$\frac{-\,x\;dx}{(b^2+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{b}\,d(\operatorname{sen}\Theta)$$

Las componentes del elemento diferencial del campo eléctrico se pueden expresar ahora en término de los diferenciales de las funciones armónicas, como sigue:

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \lambda \frac{1}{b} d(\text{sen}\,\Theta) \qquad , \qquad (\text{sen}\,\Theta = b/r)\ ;$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \lambda\, b \frac{1}{b^2} d(\cos\Theta) \qquad , \qquad (\cos\Theta = x/r)\ .$$

Luego, las componentes del campo eléctrico se obtienen en forma inmediata, puesto que son las integrales de diferenciales exactas:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\lambda}{b} \left. \frac{b}{(b^2+x^2)^{1/2}} \right|_{-L_1}^{L_2}$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \lambda \left(\frac{1}{(b^2+L_2^{\,2})^{1/2}} - \frac{1}{(b^2+L_1^{\,2})^{1/2}} \right)$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\lambda}{b} \left. \frac{x}{(b^2+x^2)^{1/2}} \right|_{-L_1}^{L_2}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\lambda}{b} \left(\frac{L_2}{(b^2+L_2^{\,2})^{1/2}} + \frac{L_1}{(b^2+L_1^{\,2})^{1/2}} \right)$$

Casos particulares:

a) $L_1 = L_2 = L$.

En este caso se tiene:

$$E_x = 0 \; ; \qquad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{2\lambda L}{b\,(b^2 + L^2)^{1/2}}$$

b) $b \to \infty$.

En este caso el campo eléctrico tiende a cero: $E \to \infty$.

c) $b >> L$, es decir $(L/b)^2 \approx 0$, lo que implica:

$$(L_1 / b)^2 \approx 0 \quad y \quad (L_2 / b)^2 \approx 0 \,.$$

En este caso resulta:

$$E_x = 0 \; ; \qquad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{b^2}$$

Resulta la expresión del campo coulombiano a la distancia b de la carga total Q .

d) $L_1 = 0$, y $L_2 \to \infty$.

En este caso se obtiene:

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\lambda}{b} \qquad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\lambda}{b}$$

El campo eléctrico forma un ángulo de 45° con la línea de la carga.

4.- El campo eléctrico creado entre las placas de un tubo de televisión es de $1,2 \cdot 10^4$ [N/C]. Un electrón penetra perpendicularmente a este campo eléctrico con una energía cinética de $2,00 \cdot 10^3$ [eV]. Las placas miden 1,5 [cm] de longitud. Calcular: a) la deflexión y del electrón; b) el ángulo en que se desvía la trayectoria del electrón; c) el desplazamiento del impacto del electrón en la pantalla del tubo que está a 20 [cm] de las placas.

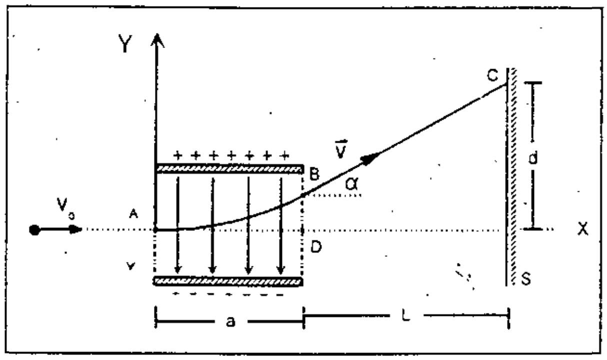


Fig. 2.4

Solución:

a) De la Mecánica newtoniana se tiene, para el movimiento del electrón entre las placas, designando al espacio recorrido paralelo a las placas por x (x = AD = 1,5 [cm]), y a la deflexión vertical por y (y = BD):

$$K = m v_o^2 / 2 \quad , \qquad x = v_o t \quad , \qquad y = a t^2 / 2 \quad , \qquad a = F / m \quad .$$

De la definición de campo eléctrico se tiene: $F = q E$. Se expresa la coordenada y en función de los datos, y con $q = e$ (la carga del electrón) se obtiene sucesivamente:

$$y = e E t^2 / 2 m \quad , \qquad y = e E x^2 / 2 m v_o^2 \quad , \qquad y = e E x^2 / 4 K \, .$$

Con los valores de los datos, y recordando que $1\ [eV] = 1,6 \cdot 10^{-19}$ [J], resulta:

$$y = 3,4 \cdot 10^{-4}\ [m] \, .$$

b) La dirección con que el electrón sale de entre las placas está determinada por la dirección de la velocidad en ese punto (B). Las componentes de la velocidad son:

$$v_x = v_o \qquad ; \qquad v_y = at$$

Se expresa v_y en función de los datos, y se tiene sucesivamente:

$$v_y = e E t / m \qquad , \qquad v_y = e E x / m v_o \, .$$

El ángulo de deflexión α está determinado por la tangente respectiva:

$\mathrm{tg}\,\alpha = v_y / v_x$, $\mathrm{tg}\,\alpha = e E x / m v_o^2$, $\mathrm{tg}\,\alpha = e E x / 2 K$.

El cálculo correspondiente da para la tangente el valor de $4{,}5 \cdot 10^{-2}$. En consecuencia el ángulo de deflexión es $2.6°$.

c) El desplazamiento del impacto del electrón sobre la pantalla está dado por:

$$d = L\,\mathrm{tg}\,\alpha \,.$$

El cálculo correspondiente da para el desplazamiento el valor 0,9 [cm] .

5.- Calcular el torque sobre un dipolo eléctrico producido por un campo eléctrico constante.

Solución:

Sobre las cargas eléctricas de un dipolo colocado en un campo eléctrico constante actúan fuerzas iguales pero en sentidos antiparalelos. Por conveniencia se calcula el torque respecto del punto medio, M , de las dos cargas del dipolo, que sería el centro de masa del sistema si las cargas son partículas iguales; en ese caso este punto no se mueve (si inicialmente estaba en reposo). Para un dipolo eléctrico de carga q y una distancia a entre las partículas cargadas, que forma un ángulo Θ entre el campo eléctrico y la recta que une las dos partículas, el torque τ respecto de M es :

$$\tau = 2 F (a/2) \,\mathrm{sen}\,\Theta \quad , \quad \tau = q E a \,\mathrm{sen}\,\Theta$$

Se verifica sin gran dificultad que, con esta definición, y si Θ es el ángulo que forman el momento eléctrico dipolar y el campo eléctrico, el torque está dado por:

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

Se puede demostrar que se puede asociar una energía potencial al dipolo, dada por:

$$U = - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

Nótese que la energía potencial es nula para $\Theta = 90°$.

2.5.- Concepto y definición de flujo de campo eléctrico.

Para todo campo vectorial **v** es posible definir una magnitud denominada el flujo del campo a través de una superficie, S , que en las aplicaciones del cálculo vectorial en las teorías físicas, tiene a menudo interpretaciones relevantes para los sistemas físicos descritos por estas teorías. Esta magnitud se define por la integral:

$$\phi = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

Para fluidos incompresibles, como es el caso - aproximadamente - de los líquidos, la densidad multiplicado por el flujo del campo de velocidades del fluido representa la cantidad (o la masa) de fluido que atraviesa la superficie. En una superficie cerrada, en cuyo interior no hay ni fuentes ni sumideros, el flujo total o neto es nulo.

En el caso del campo eléctrico, el flujo correspondiente se define por:

$$\boxed{\phi_E \underset{\text{def}}{=} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}$$

2.6.- La Ley de Gauss.

La Ley de Gauss es un teorema que se deduce de la ley de Coulomb, pero que formularemos sin demostración.

Teorema o Ley de Gauss: El flujo del campo eléctrico coulombiano en una superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada por la superficie dividida por la constante ϵ_o:

$$\boxed{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_o} q}$$

Cabe destacar que la ley de Gauss y la ley de Coulomb son equivalentes. (Ver Jackson o Panofsky y Phillips).

2.7.- Aplicaciones.

En las aplicaciones se elige la "superficie gaussiana", aprovechando la libertad de elección al respecto, de acuerdo a la simetría del sistema físico, de modo que se pueda expresar el flujo en función del campo eléctrico y de la superficie correspondiente. En general, en algunas zonas de la superficie el campo eléctrico es perpendicular al vector elemento de superficie y entonces el flujo es nulo; en otras el campo eléctrico es paralelo al vector elemento de superficie y además es constante, en cuyo caso el flujo es $|E|$ S. Se obtiene así relaciones sencillas entre el campo eléctrico y la carga.

2.7.1.- El exceso de carga colocada en un conductor aislado (en condiciones de equilibrio) se distribuye completamente sobre su superficie externa.

Demostración:

Considerar una superficie, al interior del conductor, muy próxima a la superficie externa del mismo. Al haber equilibrio no hay campo eléctrico en el interior del conductor, ya que si no fuera así habría una fuerza sobre las cargas (libres), las que se moverían, en contradicción con la hipótesis de equilibrio del sistema. En particular, el campo eléctrico es nulo en la superficie "gaussiana"; en consecuencia el flujo a través de la superficie es nulo. Por lo tanto se concluye, por aplicación del teorema de Gauss, que la carga neta al interior de esta superficie es nula; esto implica que el exceso de carga está distribuida sobre la superficie externa del conductor. Nótese que este razonamiento no es válido si hay cargas en movimiento (corrientes eléctricas).

2.7.2.- Calcular el campo eléctrico de una esfera de radio R con una carga Q distribuida con densidad uniforme constante, ρ :

Solución:

Por la simetría esférica del sistema, la superficie gaussiana que se elige es una superficie esférica con centro en el centro de la esfera. Analizamos separadamente cada uno de los casos: a) $r > R$, y b) $r < R$.

a) $r > R$: Entonces $$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad ;$$

por razones de simetría se tiene: $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E\, dS$; además $E = Cte.$;

en consecuencia: $$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E\, 4\, \pi\, r^2 \; ;$$

luego:

$$E\, 4\, \pi\, r^2 = \frac{1}{\epsilon_o}\, Q \quad ,$$

lo que implica:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\, \frac{Q}{r^2}$$

El resultado muestra que el campo en un punto fuera de la esfera es igual al producido por una partícula colocada en el centro de la esfera, con carga equivalente a la carga total de la esfera.

b) $r < R$: En este caso $$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_o}\, q' \quad ;$$

donde q' es la carga eléctrica que hay en el interior de la superficie gaussiana:

$$q' = \int_V \rho\, dV$$

En consecuencia:

$$E\, 4\, \pi\, r^2 = \frac{1}{\epsilon_o}\, q' \quad ,$$

lo que implica:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\, \frac{q'}{r^2}$$

Pero nótese que q' es función de r : $q' = \rho\, 4\pi\, r^3 / 3$. Luego:

$$E = \frac{1}{3\epsilon_o}\, \rho\, r$$

En la superficie de la esfera, $r = R$. Los valores límite del campo fuera de la esfera y dentro de la esfera son, respectivamente:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q}{R^2} \quad ; \quad E = \frac{1}{3\epsilon_o}\rho R$$

Ambos valores son iguales, ya que $Q = \rho\, 4\pi R^3 / 3$, y sustituyendo ese valor en la primera expresión para el campo se obtiene la segunda.

2.7.3.- Calcular el campo eléctrico de una distribución lineal recta uniforme e infinita de carga, con densidad lineal de carga λ.

Solución:

Se elige como superficie gaussiana la superficie de un cilindro recto de sección circular de largo y radio r, cuyo eje de simetría está sobre la distribución de carga.

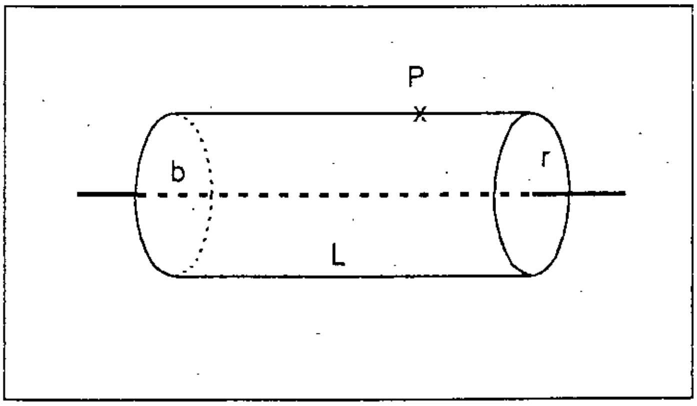


Fig. 2.5

Entonces:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_o} q$$

La superficie gaussiana está formada de tres partes: las dos bases y el manto; en consecuencia:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{base 1}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{base 2}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{manto}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad ;$$

en las bases $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ y en el manto $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E\,dS$, ya que por la simetría del sistema físico, el campo eléctrico es radial, y por lo tanto es paralelo al vector elemento de superficie; en consecuencia el flujo está dado por:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 + 0 + \int_{manto} E\,dS \quad ;$$

pero el campo eléctrico, E , es constante en el manto, y la superficie del manto es igual a $2\pi r L$. El flujo es entonces:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E\,2\pi r L$$

Por otra parte, la carga neta al interior del cilindro es : $q = \lambda L$. El teorema de Gauss conduce entonces a la ecuación:

$$E\,2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_o} \lambda L \quad ,$$

de donde se deduce:

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_o} \frac{\lambda}{r}$$

2.7.4.- Calcular el campo eléctrico de una lámina o superficie plana no conductora cargada infinita, con densidad superficial de carga σ .

Solución:

Conviene elegir como superficie gaussiana la superficie de un cilindro recto de sección circular , de largo 2r y de sección A , cuyo eje de simetría es perpendicular a la lámina (o superficie) plana y de modo que las bases son equidistantes de la lámina.

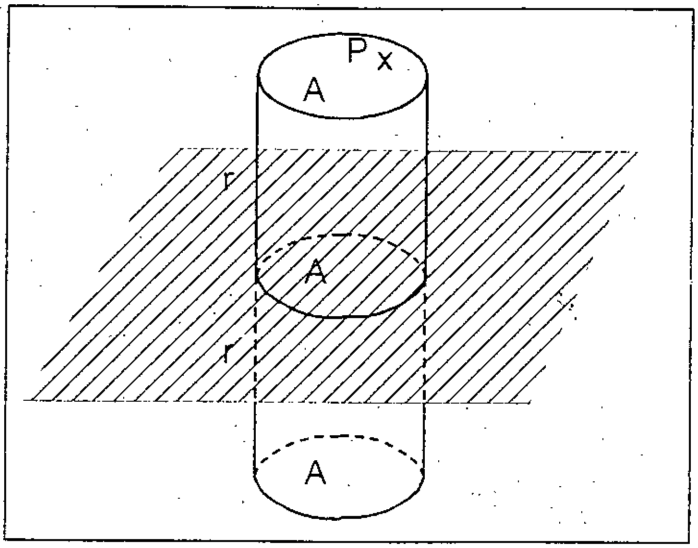


Fig. 2.6

Entonces:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_o} q$$

Nuevamente consideramos las tres partes de la superficie gaussiana: las dos bases y el manto del cilindro. En consecuencia:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{base\ 1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{base\ 2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{manto} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} ;$$

Por razones de simetría el campo eléctrico es perpendicular a la lámina; por lo tanto, en el manto del cilindro el flujo es nulo, y en las bases es función de las normas de los vectores; en consecuencia:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{base\ 1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{base\ 2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + 0$$

Pero el campo eléctrico E es constante e igual en ambas bases, luego:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2 E A$$

Por otra parte, la carga neta al interior del cilindro es: $q = \sigma A$. Resulta entonces:

$$2\,E\,A = \frac{1}{\epsilon_o}\,\sigma\,A$$

de donde se deduce:

$$E = \frac{1}{2\epsilon_o}\,\sigma$$

3.- EL POTENCIAL ELECTRICO.

3.1.- Concepto y definición de potencial eléctrico:

Así como en el caso de las fuerzas conservativas resulta útil definir el concepto de energía potencial, así también en el caso del campo eléctrico es útil definir una función similar a la energía potencial, función que se denomina "potencial eléctrico".

Recordemos que dada una fuerza conservativa, **F** (**r**), se define la energía potencial correspondiente por la ecuación:

$$U(\mathbf{r}) = -\int_0^{r} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + U(0)$$

Ahora bien, la fuerza electrostática, como la fuerza gravitacional, es una fuerza conservativa. Luego, es posible definir la correspondiente función energía potencial:

$$U_e(\mathbf{r}) = -\int_0^{r} \mathbf{F}_e(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + U(0)$$

Pero en electricidad se prefiere trabajar con la función campo eléctrico y no con la función fuerza eléctrica. Se divide entonces la ecuación anterior por la carga q de la partícula sobre la que actúa la fuerza y se obtiene:

$$\frac{U_e(\mathbf{r})}{q} = -\int_0^{r} \frac{\mathbf{F}_e(\mathbf{r})}{q} \cdot d\mathbf{r} + \frac{U(0)}{q}$$

Se define ahora la función potencial eléctrico por la ecuación:

$$\boxed{V(\mathbf{r}) \underset{def}{=} U_e(\mathbf{r})/q.}$$

Al substituir en la ecuación anterior, y recordando la definición de campo eléctrico, resulta:

$$V(\mathbf{r}) = -\int_0^{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + V(0)$$

Sabemos, de la Mecánica newtoniana, que el trabajo realizado entre dos puntos A y B por una fuerza conservativa está dado, en función de la energía potencial, por la diferencia entre la energía potencial en el punto A y la energía potencial en el punto B . En el caso de la fuerza eléctrica se tiene entonces:

$$W_{AB(e)} = U_A - U_B \quad ;$$

al dividir esta ecuación por q resulta:

$$V_A - V_B = W_{AB(e)} / q \quad .$$

En consecuencia, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica cuando la partícula con carga q va desde el punto A hasta el punto B dividido por la carga q es igual a la diferencia de potencial entre los puntos A y B .

La unidad de potencial eléctrico es el Volt, definido por:

$$1\,[V] = 1\,[J] \,/\, 1\,[C] \quad .$$

Generalmente, cuando se trabaja con partículas cargadas en electrostática, se asigna potencial nulo a los puntos en el infinito. Pero en los circuitos eléctricos en general se asigna potencial nulo a la tierra, que se conecta a algún punto del circuito.

Si el punto de referencia, con potencial nulo, es el infinito, entonces:

$$V_A = -\int_{\infty}^{A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad .$$

Puesto que las unidades en ambos miembros de esta ecuación deben ser iguales, se sigue que la unidad de campo eléctrico, además de su expresión en término de las unidades de fuerza y de carga eléctrica, es decir como [N/C] , puede expresarse también en función de las unidades de potencial eléctrico y de longitud:

1 unidad de campo eléctrico = 1 [V] / 1 [m] .

3.2.- La superposición de potenciales eléctricos:

De manera análoga a la superposición de las fuerzas y de los campos eléctricos, se superponen las energías potenciales y los potenciales eléctricos. En efecto se puede demostrar que, en particular, el potencial eléctrico resultante, $V(1,2)$, asociado al efecto conjunto de dos distribuciones de partículas cargadas que separadamente tienen funciones potenciales $V(1)$ y $V(2)$, es la suma de estos potenciales:

$$V(1,2) = V(1) + V(2)$$

En general, el potencial resultante, V , de varias distribuciones de cargas eléctricas con potenciales eléctricos asociados, V_i , es la suma de ellos:

$$V = \Sigma V_i$$

En el caso de una distribución continua de carga, el potencial resultante es la superposición de los potenciales diferenciales:

$$V = \int dV$$

Nótese que, a diferencia al caso de superposición de los campos eléctricos, que son funciones vectoriales, en este caso se superponen (se suman o se integran) funciones escalares, lo que evidentemente facilita los cálculos correspondientes.

3.3.- Las superficies equipotenciales:

De manera similar a la representación gráfica de los campos eléctricos por las líneas de campo, lo que permite visualizar la dirección y la intensidad relativa del campo eléctrico en diferentes puntos del espacio físico, así también se puede representar gráficamente a los potenciales eléctricos por superficies equipotenciales, lo que permite visualizar sus valores en diferentes regiones del espacio. Estas superficies, como su nombre lo indica, están formadas por los puntos que tienen el mismo potencial eléctrico.

Se demuestra que son perpendiculares a las líneas de campo eléctrico correspondiente.

Ejercicio 1 : Demostrar la afirmación anterior.

Indicación: Utilizar el método de reducción al absurdo (suponer que el campo eléctrico no es perpendicular a la superficie equipotencial).

3.4.- Ejemplos:

1.- Una carga eléctrica q , positiva, se mueve desde un punto A hasta un punto B pasando por el punto C. Calcular el trabajo del campo eléctrico, o más bien de la fuerza eléctrica, en función del campo eléctrico supuesto constante, a partir de la diferencia de potencial calculada entre los puntos inicial y final.

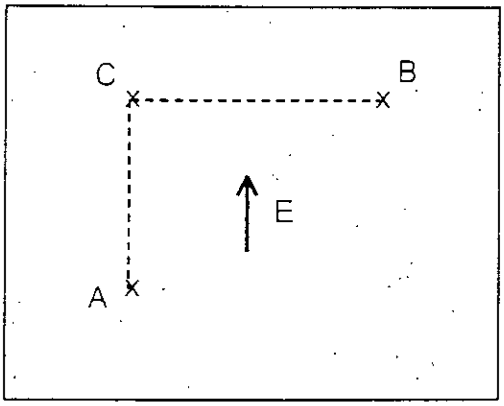


Fig. 3.1

Solución:

Para el trayecto completo se tiene:

$$V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_B) \quad ;$$

para el trayecto rectilíneo AC se tiene:

$$V_A - V_C = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad ; \qquad \text{luego:} \qquad V_A - V_C = E\,d \quad ;$$

para el trayecto rectilíneo CB se tiene:

$$V_C - V_B = 0 \quad ; \qquad \text{luego:} \qquad W_{AB} = q\,E\,d$$

2.- Cálculo del potencial de una carga puntual.

Se elige como punto de referencia con potencial nulo a los puntos del infinito. En consecuencia, a partir de la definición de potencial eléctrico, cambiando el orden de los límites de la integral, lo que implica un cambio de signo de la integral, se tiene:

$$V(\mathbf{r}) = \int_r^{\infty} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{r}$$

Puesto que el valor de la integral no depende del camino recorrido sino que sólo de los puntos extremos. elegimos una recta radial como curva de integración, en cuyo caso los vectores del integrando son paralelos, y en consecuencia:

$$V(\mathbf{r}) = \int_r^{\infty} E\ dr$$

El campo eléctrico de una partícula cargada está dado por la ley de Coulomb; por lo tanto:

$$V(\mathbf{r}) = \int_r^{\infty} k\ (q/r^2)\ dr$$

Luego:

$$V(\mathbf{r}) = (-\,k\,q/r)\ \Big|_r^{\infty}$$

en consecuencia se tiene finalmente:

$$V(\mathbf{r}) = k\,q/r$$

donde $k = (1/4\pi\epsilon_o)$. A partir de este resultado se obtiene que las superficies equipotenciales son esferas con centro en la partícula.

3.- Potencial de una esfera cargada con ρ constante (simetría esférica).

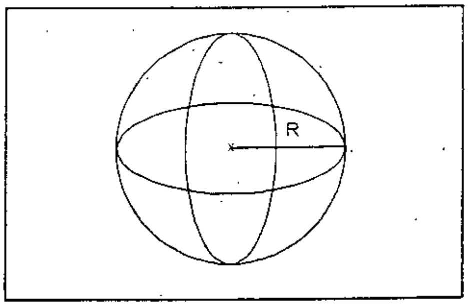


Fig. 3.2

El campo eléctrico fuera de la esfera, es decir a una distancia r mayor que el radio R de la esfera, es igual al campo de una partícula cargada colocada en el centro de la esfera y con una carga Q igual a la carga de la esfera;

explícitamente su magnitud es entonces:

$$E = k\,Q / r^2$$

Por otra parte, si la densidad de carga ρ es constante, el campo eléctrico al interior de la esfera, es decir a una distancia r menor que el radio R de la esfera, es proporcional a la carga Q' encerrada al interior de la esfera de radio r: $Q' = \rho\,(4\pi\, r^3/3)$.

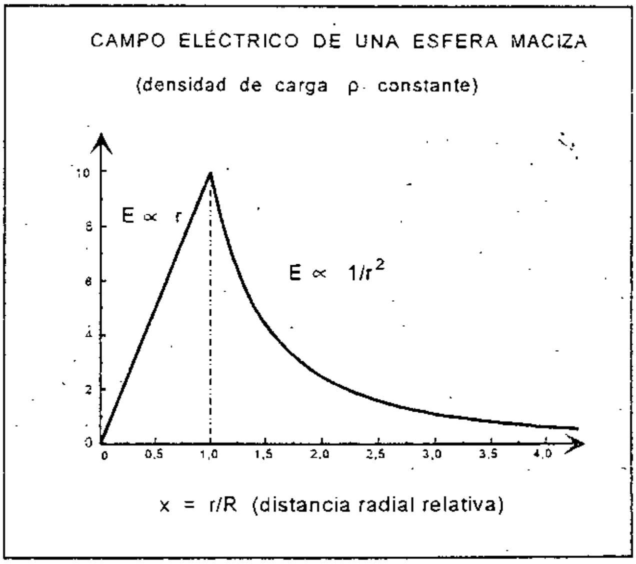
Por lo tanto el campo eléctrico al interior de la esfera es entonces $E = k\,(4\pi/3)\,\rho\, r$; en función de la carga total Q, con $\rho = Q/(4\pi R^3/3)$, se tiene:

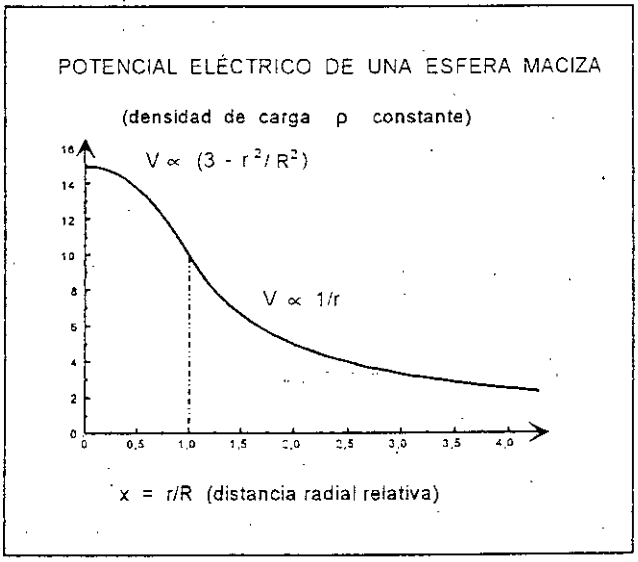
$$E = k\,(Q/R^3)\,r$$

(Nótese que para $r = R$ se tiene el campo eléctrico de una partícula, $E = k\,Q/R^2$).

En consecuencia, también el potencial fuera de la esfera es el mismo que el de la partícula cargada equivalente, $V = k\,Q/r$; en particular, el potencial en la superficie de la esfera es $V = k\,Q/R$.

Por otra parte, el potencial al interior de la esfera resulta ser entonces:





$$V(\mathbf{r}) = \int_r^R k\,(4\pi/3)\,\rho\, r\, dr + V(R).$$

$V=\left(\frac{3kq}{2R}\right)-\left(\frac{kq}{2R^{3}}\right)r^{2}$

Finalmente resulta:

$$V(r) = (3/2)\,k\,Q/R - k\,(Q/2R^3)\,r^2 .$$

4.- Potencial de un dipolo eléctrico.

El potencial de un dipolo eléctrico en un punto P a una distancia **r** del centro del dipolo es la suma de los potenciales de cada una de las cargas eléctricos del dipolo. Sea M el punto medio del dipolo, y θ el ángulo que forma la recta MP con el momento dipolar.

En el cálculo se desprecia los términos de segundo orden en (a/r), es decir se supone $(a/r)^2 \approx 0$. Entonces la distancia de la carga negativa al punto P está dada por:

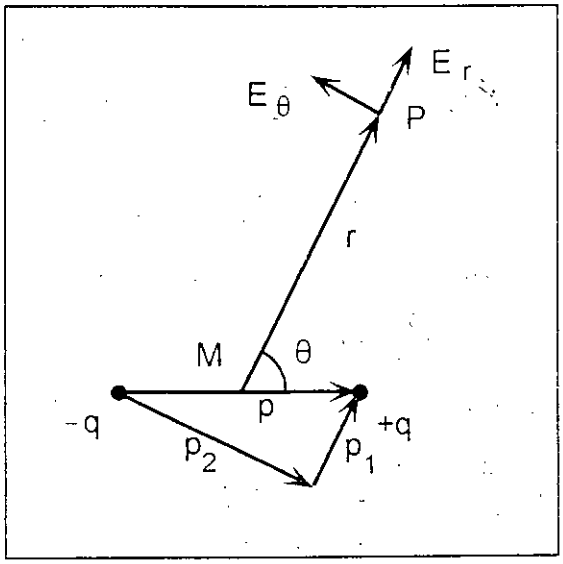


Fig. 3.3

$$r(-q) = r + (a/2)\cos\theta ,$$

y la distancia de la carga positiva al punto P está dada por:

$$r(+q) = r - (a/2)\cos\theta .$$

En consecuencia el potencial del dipolo eléctrico en el punto P es:

$$V = k\left(\frac{q}{r-(a/2)\cos\theta} - \frac{q}{r+(a/2)\cos\theta}\right) ,$$

lo que se reduce, con la misma aproximación, a:

$$v(r,\theta) = k\,\frac{p\cos\theta}{r^2} .$$

A partir de esta expresión del potencial, se puede calcular el campo eléctrico, que es igual al gradiente del potencial con signo negativo. Nótese que el potencial está expresado en función de las coordenadas polares del punto P ; en consecuencia conviene calcular el gradiente también en coordenadas polares, de manera que se obtendrá las componentes del campo eléctrico en las direcciones de los vectores unitarios asociados a dichas coordenadas.

$$E_r = -\partial V / \partial r \quad ,$$

$$E_r = k \frac{2\,p\,\cos\theta}{r^3} \quad ;$$

$$E_\theta = -(1/r)\ \partial V / \partial\theta \quad ,$$

$$E_\theta = k \frac{p\ \mathrm{sen}\,\theta}{r^3}$$

Estos resultados coinciden con los resultados obtenidos en el cálculo del campo eléctrico directamente a partir de la ley de Coulomb y del Principio de Superposición, en el capítulo de Campo Eléctrico.

5.- Superficies y líneas equipotenciales de un dipolo y de tres partículas cargadas.

El conocimiento de las superficies y líneas equipotenciales de las partículas cargadas y el Principio de Superposición permiten analizar cualitativamente, con relativa facilidad, el potencial de distribuciones simples de partículas cargadas, tales como el dipolo eléctrico o diversas combinaciones y distribuciones de tres partículas cargadas.

6.- Calcular el potencial eléctrico en los puntos que se encuentran sobre el eje de un disco de radio a uniformemente cargado con densidad superficial de carga σ , a una distancia b del disco.

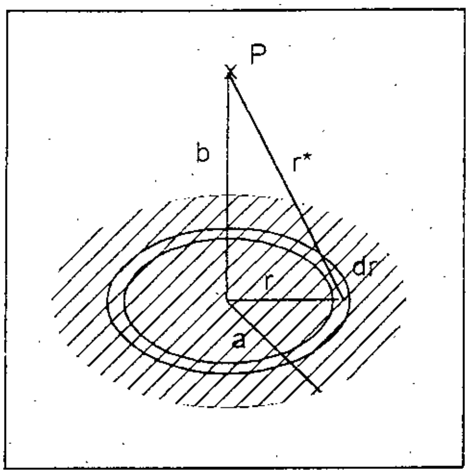


Fig. 3.4

Solución:

Sea dq la carga del anillo de radio r y de ancho dr ; entonces se tiene la relación:

$$dq = \sigma\,(2\pi\,r)\,dr \quad .$$

El potencial en el punto P, producido por la carga dq, es:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{dq}{r^*}$$

Con $r^* = (b^2 + r^2)^{1/2}$, y $dq = \sigma(2\pi r)\,dr$ se tiene:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\sigma(2\pi r)\,dr}{(b^2 + r^2)^{1/2}}$$

El potencial se obtiene sumando en forma continua, es decir integrando los potenciales de todos los anillos desde $r = 0$ hasta $r = a$:

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_o} \int_0^a r\,(b^2 + r^2)^{-1/2}\,dr$$

El cálculo de la integral correspondiente da como resultado:

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_o} \left[(b^2 + a^2)^{1/2} - b \right]$$

Casos particulares:

a) $b \to \infty$: En este caso el potencial tiende a cero.

b) $b >> a$, o más exactamente, $(a/b)^4 \approx 0$:

En este caso, con la aproximación indicada:

$$(b^2 + a^2)^{1/2} \approx b\,[1 + (a/b)^2/2] \quad ;$$

además, $\sigma = Q/\pi a^2$, donde Q es la carga total del disco. En consecuencia:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{b} \qquad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_o b}$$

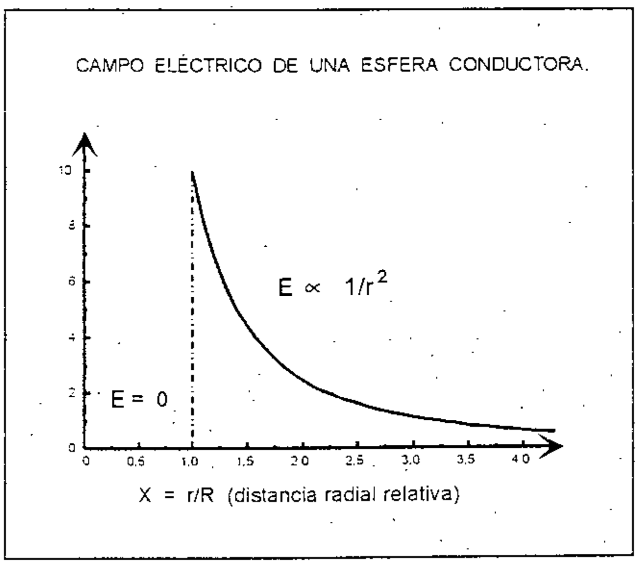
Nótese que el potencial corresponde al potencial de una partícula cargada, con carga Q igual a la carga total del disco, y a una distancia igual a la distancia b desde el centro del disco.

7.- El potencial eléctrico de un conductor aislado en equilibrio.

El potencial eléctrico de un conductor aislado en equilibrio tiene la siguiente propiedad: "Todos los puntos del conductor tienen el mismo potencial eléctrico". La demostración utiliza el método de la reducción al absurdo: Si no fuera así (si no todos los puntos tuvieran el mismo potencial), entonces las cargas se moverían de los puntos de mayor potencial a los puntos de menor potencial (en caso de ser las cargas positivas; en la realidad, en los conductores sólidos se mueven las cargas negativas, es decir los electrones, que en consecuencia se mueven en sentido contrario, es decir de los puntos de menor potencia a los puntos de mayor potencial). Este resultado permite analizar algunas situaciones particulares simples e interesantes.

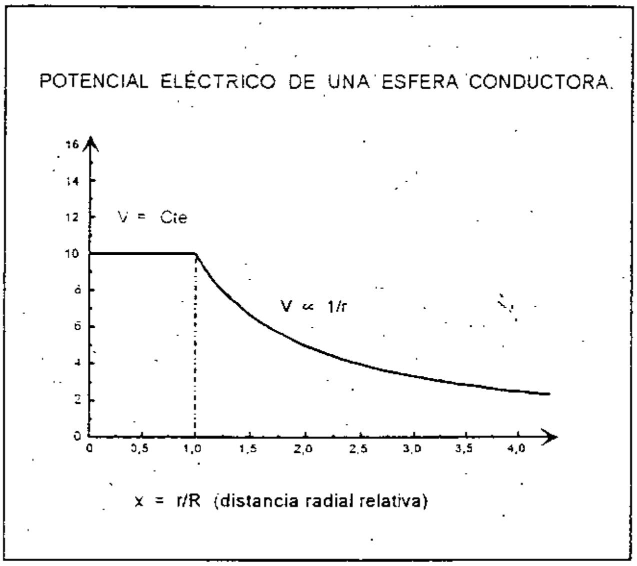
a) Potencial de una esfera conductora cargada (hueca o maciza).

Dada una esfera conductora de radio igual a 10 [cm] y con una carga de $1{,}0 \cdot 10^{6}$ [C], analizar el potencial de esta distribución de carga eléctrica. Recuérdese que el campo eléctrico fuera de la esfera es igual al campo eléctrico de la carga eléctrica total situada en el centro de la esfera. En consecuencia, el potencial eléctrico fuera de la esfera es también igual al potencial correspondiente a la carga eléctrica total situada en el centro de la esfera.



Por otra parte, al interior de la esfera, el campo eléctrico es nulo, en consecuencia el potencial eléctrico es constante en esta región del espacio.

Resulta ilustrativo comparar estos resultados con los valores del campo y del potencial eléctrico de una esfera (no-conductora) con densidad de carga constante, ya que coinciden al exterior de la esfera, pero difieren al interior de ella.



b) Concentración de la carga en las puntas de la superficie de un conductor.

Consideremos dos esferas conductoras cargadas, con radios diferentes R_1 y R_2, respectivamente. Al conectar ambas esferas mediante un conductor se producirá una redistribución de la carga, de tal manera que al establecerse el equilibrio el potencial de ambas esferas es el mismo. Para simplificar el análisis, supondremos que las esferas están mutuamente alejadas, de manera que se puede suponer que el potencial de las esferas, en función de la carga de cada una de ellas, es aproximadamente igual al de cada esfera aislada

$$V = k\ Q_1 / R_1 \quad , \quad V = k\ Q_2 / R_2$$

Luego, las cargas de las esferas son proporcionales a sus radios respectivos:

$$Q_1 / R_1 = Q_2 / R_2$$

Por otra parte, la densidad de carga en la superficie de las esferas, por definición, es:

$$\sigma_1 = Q_1 / (4\pi\ R_1^2) \quad , \quad \sigma_2 = Q_2 / (4\pi\ R_2^2)$$

En consecuencia, se tiene $\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$, es decir las densidades superficiales de carga eléctrica son inversamente proporcionales a los radios de las esferas.

3.5.- Aplicaciones.

a) Rigidez dieléctrica.

Existe un límite superior para el valor del campo eléctrico antes que se produzca una descarga eléctrica, es decir antes que el aire se ionice y se transforme en conductor. A este valor máximo del campo eléctrico, E_m, se le denomina "rigidez dieléctrica". En el aire seco su valor es de $0{,}8 \cdot 10^6$ [NC^{-1}].

En la superficie de una esfera, el potencial y el campo eléctrico están relacionados por la ecuación: $V = R\,E$; en consecuencia el potencial máximo antes que se produzca una descarga es $V_m = R\,E_m$.

Por otra parte, en las vecindades de una superficie con densidad superficial de carga eléctrica σ el campo eléctrico esta dado por σ/ϵ_o ; en consecuencia, en las puntas, donde se concentran las cargas en un conductor, se produce un campo eléctrico más intenso, aumenta la probabilidad de una ionización del aire, y por lo tanto aumenta la probabilidad de una descarga eléctrica al adquirir el aire propiedades conductoras, como todo fluido ionizado.

b) El experimento de Millikan (1911).

Después de encontrar que los rayos catódicos tenían una naturaleza corpuscular, es decir después de verificar la existencia del electrón (por J. J. Thomson, en 1897), se intentó medir su carga. Un método muy ingenioso fue utilizado por J. J. Thomson y su discípulo J. S. E. Townsend (1898), pero adolecía de falta de precisión, ya que requería la determinación de la rapidez de sedimentación de nubes de gotas de agua. En efecto, midiendo la corriente en un gas expuesto a los rayos X y que está sometido a un potencial conocido, se puede determinar el producto $n\,e\,v$. Conocida la velocidad v, que fue determinada por Rutherford en 1897, bastaba determinar n para calcular la carga del electrón. El método para determinar su valor se basó en la propiedad de los rayos X de producir la condensación del vapor de agua en un ambiente libre de polvo, al ionizar el aire; se estimaba el tamaño de las gotas de agua por la rapidez de sedimentación, y se medía el agua condensada, y de allí se estimaba n. El valor obtenido por Townsend con este método fue $3 \cdot 10^{-10}$ esu. Thomson lo repitió con algunas modificaciones y obtuvo $6{,}6 \cdot 10^{-10}$ esu.

Robert A. Millikan (n. en Illinois, en 1868; doctorado en Columbia, en 1895; premio Nobel en 1923; m. en California, en 1953) mejoró el experimento en 1907 estudiando el movimiento de una sola gota de agua, bajo la acción de la gravitación y de un campo eléctrico. Con posterioridad reemplazó las gotas de agua y alcohol, que se evaporaban con facilidad, por gotas de aceite. De este modo pudo medir con gran precisión la carga eléctrica del electrón, en 1911 (siendo profesor en Chicago). Posteriormente se ha corregido el valor de la viscosidad del aire, mejorando el resultado obtenido para el valor de la carga del electrón, de $4{,}93 \cdot 10^{-10}$ esu a $4{,}80_{25} \cdot 10^{-10}$ esu.

El método experimental consiste en pulverizar aceite entre placas metálicas horizontales, relativamente próximas entre si, con una cierta diferencia de potencial, de manera que haya un campo eléctrico prácticamente constante entre ellas. Las gotas de aceite que se ionizan con el roce del aire están sometidos a la fuerza de peso y a la fuerza electrostática. El campo eléctrico se orienta verticalmente hacia abajo, de modo que la fuerza eléctrica sobre las gotas esté dirigida hacia arriba, ya que las gotas habitualmente adquieren una carga negativa. El campo se ajusta de manera que una gota en particular, observada con un anteojo o telescopio se mantenga prácticamente en reposo. En tal situación se tiene que las fuerzas son iguales y contrarias, es decir se tiene:

$$q E = mg \qquad ;$$

con $E = V/d$ y $m = \rho\, 4 \pi r^3/3$, donde d es la distancia entre las placas metálicas, ρ es la densidad del aceite, y r es el radio de la gota, se obtiene, para la carga de la gota:

$$q = 4 \pi \rho r^3 g d / 3 V$$

Todas las magnitudes del lado derecho de esta ecuación se pueden determinar con cierta facilidad y precisión, excepto el radio de la gota, que es muy pequeño para medirlo directamente ($\approx 10^{-5}$ cm). Sin embargo puede ser calculado a partir de la observación de la velocidad límite, v_L, de caída de la gota bajo el efecto de su peso y de la fuerza de roce producida por la viscosidad del aire, por la fórmula de Stokes, de la dinámica de fluidos:

$$mg = 6 \pi \eta r v_L \qquad ;$$

despejando r se obtiene:

$$r = 3 (\eta v_L / 2 \rho g)^{1/2}$$

Los resultados experimentales dan como carga de las gotas múltiplos de una carga elemental, que se denomina e, y que es la carga del electrón.

Con una distancia de 1,600 [cm] entre las placas horizontales, una temperatura de 24,6 [° C], una densidad del aceite a 25 [° C] de 0,8960 [gr/cm^3], y una viscosidad del aire a 25,2 [° C] de $1{,}836 \cdot 10^{-4}$, Millikan obtuvo inicialmente para la carga del electrón o carga elemental el valor de $4{,}93 \cdot 10^{-10}$ [esu]. El valor definitivo que obtuvo fue 4,774 * 10^{-10} [esu], el que fue aceptado durante cerca de 20 años. Posteriormente se corrigió el valor de la viscosidad, aumentándolo en cerca del 0,5 por ciento, resultando el valor de la carga elemental igual a 4,804 * 10^{-10} [esu] . El mejor valor actual (1982) es 4,8032 * 10^{-10} [esu] , o expresado en [C] , la carga del electrón es 1.60219 * 10^{-19} [C] , con 1 [C] = 2,9979 * 10^{9} [esu] ,

En la teoría de partículas, se considera que los protones están constituidos por partículas con cargas cuyos valores serían 1/3 y 2/3 del valor positivo o negativo de la carga del electrón. Estas partículas se denominan los "quarks". Sin embargo la teoría implicaría que estas partículas no se podrían observar aisladamente.

c) El osciloscopio.

El osciloscopio es un instrumento que permite medir, y sobre todo visualizar, diferencias de potencial eléctrico. En particular permite visualizar diferencias de potencial que varían con el tiempo. A menudo se le denomina "osciloscopio de rayos catódicos", utilizando una terminología que se justificó en el pasado, cuando no se conocía la naturaleza de los rayos catódicos; Ahora que se sabe que son haces de electrones no parece necesario seguir utilizando esa denominación.

El instrumento consiste esencialmente en un tubo de rayos catódicos, es decir un dispositivo formado por un tubo de forma característica, de paredes aislantes (habitualmente de vidrio), en cuyo interior, donde se ha hecho vacío, se produce un haz de electrones, los que inciden perpendicularmente en un extremo relativamente plano del tubo, cubierto con una substancia fluorescente, tal que hace visible el punto en el que impactan los electrones.

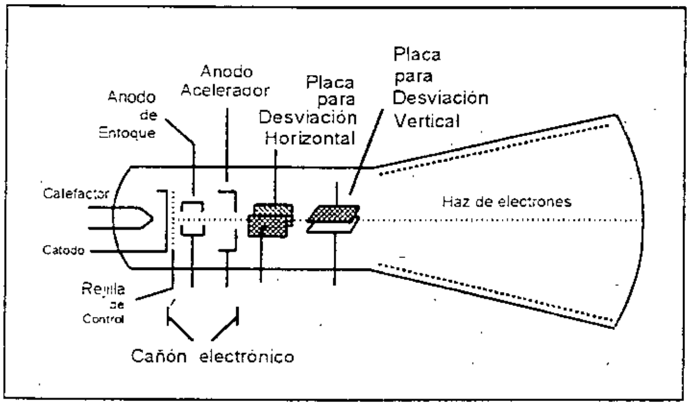


Fig. 3.5

El cátodo es un filamento incandescente del que se emiten electrones, los que son acelerados por una diferencia de potencial respecto del ánodo, cuya forma permite el paso de un haz de electrones. Este haz de electrones pasa entre dos pares de placas conductoras; cada par de placas son paralelas entre sí y al haz de electrones; además los dos pares de placas son perpendiculares entre si (habitualmente verticales y horizontales).

Para medir y/o visualizar una diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos, se les conecta a un par de placas paralelas del osciloscopio, entre las cuales se establece entonces la misma diferencia de potencial. Se crea así un campo eléctrico entre esas placas, de manera que el haz de electrones se desvía, con un desplazamiento que, dentro de ciertos límites, es proporcional a la diferencia de potencial aplicado.

Si se quiere observar la variación periódica en el tiempo de una cierta diferencia de potencial, se puede aplicar a las placas perpendiculares a las anteriores una diferencia de potencial que sea una función con el mismo período, o igual a un múltiplo (pequeño) del período del potencial que se desea estudiar, y tal que en cada período sea una función lineal del tiempo (esta función se denomina habitualmente "diente de sierra"). De esta manera se obtiene en la pantalla del osciloscopio una representación de la diferencia de potencial en función del tiempo. Habitualmente el potencial a estudiar se aplica a las placas horizontales, las que producen un desplazamiento vertical, y el potencial diente de sierra se aplica a las placas verticales, las que producen un desplazamiento horizontal.

La sensibilidad del instrumento y las características de los circuitos eléctricos permiten estudiar las variaciones del potencial en intervalos de tiempo muy pequeños, por ejemplo del orden del microsegundo [μs] .

Este mismo tipo de tubo se utiliza en los televisores tradicionales, a diferencia de los que utilizan las propiedades de los cristales líquidos los que tienen pantalla plana. En esta aplicación el punto de incidencia del haz de electrones en la pantalla la recorre muchas veces por segundo - más de 16 veces por segundo - para producir la sensación de una imagen fija o que se mueve, en forma análoga al cine donde se proyecta más de 16 cuadros por segundo para que el ojo, o más exactamente la retina, no alcance a dejar de percibir la imagen.

d) El electronvolt (eV) .

Puesto que el producto de una carga eléctrica por un potencial eléctrico es una energía, al multiplicar la carga eléctrica del electrón (o más bien del protón, ya que se considera el valor positivo) por la unidad de potencial se obtiene una unidad de energía (diferente del Joule), que se denomina "electronvolt" y se escribe "eV":

$$1\,[\mathrm{eV}] = e\,[\mathrm{C}] \times 1\,[\mathrm{V}] \quad ;$$

en consecuencia:

$$1\,[\mathrm{eV}] = 1{,}6 * 10^{-19}\,[\mathrm{J}] \,.$$

Esta unidad de energía es muy utilizada en electrónica, ya que en ese campo a menudo se trabaja con fenómenos eléctricos en que las energías son de este orden de magnitud.

4.- LOS CONDENSADORES Y LA CAPACITANCIA ELECTRICA.

4.1.- El concepto de condensador y la definición de capacitancia.

La existencia de cargas positivas y negativas que ejercen fuerzas mutuas de atracción, junto con la existencia de materiales conductores y materiales aislantes, permiten construir ciertos dispositivos en los cuales se puede acumular carga eléctrica en cantidades apreciables, con diversos objetivos útiles en las aplicaciones prácticas del electromagnetismo. Estos dispositivos se denominan condensadores, capacitores o acumuladores. En consideración al término usado habitualmente en la práctica, aquí utilizaremos el primero de los nombrados: condensador.

Los condensadores consisten esencialmente en dos superficies conductoras regulares, denominadas usualmente placas del condensador, colocadas a una distancia constante, separadas por un medio aislante, que en ciertos casos puede ser vacío o aire, llamado dieléctrico, con sendas cargas iguales pero de diferente signo. Por ejemplo, pueden ser dos planos paralelos o dos superficies cilíndricas concéntricas.

Al conectar las placas del condensador a puntos con una diferencia de potencial V, las placas adquieren sendas cargas eléctricas $+Q$ y $-Q$, respectivamente, tales que su magnitud Q es proporcional a la magnitud de la diferencia de potencial. Es decir se tiene:

$$\boxed{Q = C\,V}$$

donde C es una constante independiente de la diferencia de potencial V, denominada la capacitancia del condensador. Esta propiedad, es decir la proporcionalidad de Q y V, se puede demostrar en algunos casos particulares, como por ejemplo en el caso del condensador de placas paralelas, en cuyo caso se obtiene para la capacitancia una expresión que depende solamente de las características geométricas del condensador y de una constante electrostática del medio dieléctrico.

Estos dispositivos son muy importantes en los circuitos eléctricos, de manera que resulta útil definir una unidad para la capacitancia, que es una característica del condensador, importante de especificar en las aplicaciones. La unidad de capacitancia se denomina el farad (en homenaje a Faraday), se le designa por F, y se define como la capacitancia de un condensador que adquiere una carga de un Coulomb cuando la diferencia de potencial entre sus placas es de un Volt. En la práctica esta es una unidad muy grande, y a menudo los condensadores tienen capacitancias del orden del μF (microfarad).

4.2.- La capacitancia de condensadores de placas paralelas.

Consideremos un condensador de placas paralelas, es decir un dispositivo constituido por dos placas paralelas conductoras iguales, de áreas A y separadas por una distancia d. Supongamos que el medio que las separa es el vacío. Nos interesa calcular la relación entre la carga de las placas y la diferencia de potencial que hay entre ellas. La carga de las placas la podemos relacionar con el campo eléctrico, utilizando la ley de Gauss, y el campo eléctrico lo podemos relacionar con la diferencia de potencial entre las placas.

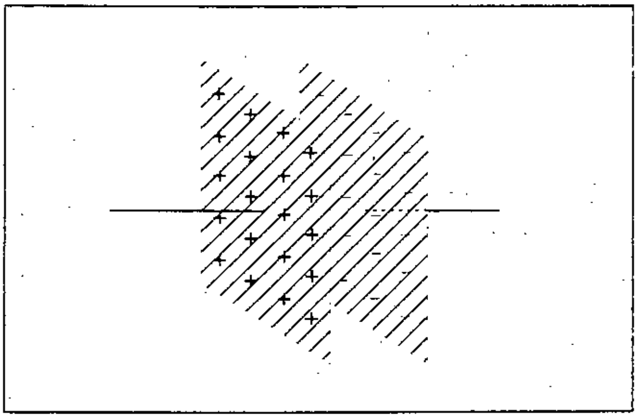


Fig. 4.1

En efecto, consideramos una superficie gaussiana con la forma de un paralelepípedo que encierre a una de las placas, y colocamos las placas a una distancia mutua pequeña comparada con el tamaño de estas placas. En este caso el flujo del campo eléctrico a través de la superficie gaussiana es nulo excepto en la superficie entre las placas, donde el campo eléctrico es prácticamente constante. En consecuencia, el flujo del campo eléctrico es simplemente el producto del campo eléctrico por la superficie de una placa. Por otra parte el flujo es el producto de la constante ϵ_o por la carga que hay al interior de dicha superficie. Se tiene entonces:

$$E A = Q / \epsilon_o$$

Por otra parte, si el campo eléctrico es prácticamente constante, entonces:

$$\Delta V = E d$$

En consecuencia, eliminando el campo eléctrico E entre ambas ecuaciones se obtiene:

$$\Delta V A = d (Q / \epsilon_o)$$

Despejando Q se deduce la ecuación:

$$Q = (\epsilon_o A / d) \Delta V \quad ,$$

o, designando simplemente por V la diferencia del potencial eléctrico entre las placas:

$$Q = (\epsilon_o A / d) V \quad .$$

Luego, en este caso:

$$C = (\epsilon_o A / d) \quad .$$

4.3.- La capacitancia de una esfera conductora aislada.

Una esfera conductora aislada se considera un condensador, donde la otra superficie estaría en el infinito. Para el potencial en la superficie de la esfera se tiene, como se deduce de la aplicación de la ley de Gauss:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{Q}{R} \quad .$$

Por otra parte, el potencial en el infinito es nulo, por lo tanto:

$$Q = (4\pi \epsilon_o R) \Delta V \quad ;$$

En consecuencia:

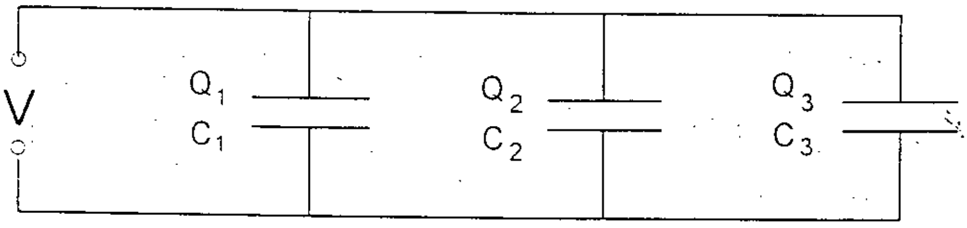
$$C = 4\pi \epsilon_o R \quad .$$

4.4.- La capacitancia equivalente de condensadores colocados en serie o en paralelo.

En las aplicaciones de los condensadores como parte de circuitos, a menudo se combinan colocándolos en serie o en paralelo, es decir uno a continuación de otro, o uno al lado del otro en conexiones paralelas. En ambos casos es útil definir la capacitancia equivalente del conjunto como la relación entre la diferencia de potencia aplicada al conjunto y la cantidad de carga que se ha transferido entre los extremos del conjunto para cargar los condensadores.

a) Condensadores en paralelo.

En este caso la diferencia de potencial es la misma para todos los condensadores, cada uno de los cuales adquiere una carga determinada por la capacitancia individual respectiva. Para simplificar supongamos que se tiene a tres condensadores, con capacitancia C_1, C_2 y C_3, respectivamente. Entonces se tiene:



$$Q_1 = C_1 V \quad ; \quad Q_2 = C_2 V \quad ; \quad Q_3 = C_3 V$$

Además:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q$$

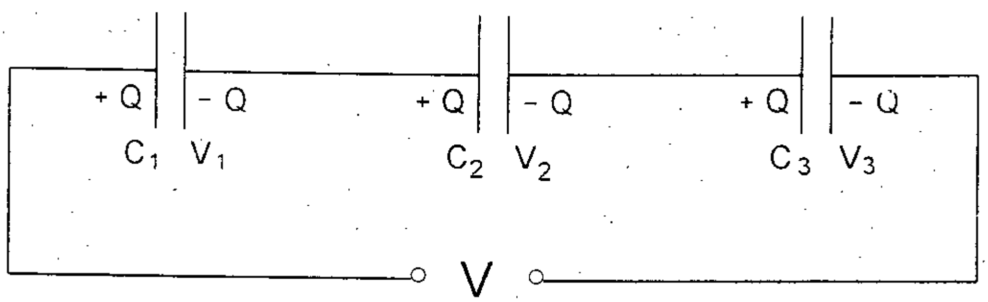
Luego:

$$Q = (C_1 + C_2 + C_3)\, V \quad ;$$

en consecuencia, la capacitancia equivalente del conjunto es:

$$\boxed{C = C_1 + C_2 + C_3}$$

b) Condensadores en serie:



En este caso la carga de cada uno de los condensadores es la misma, ya que se supone que inicialmente los condensadores están descargados y se aplica una diferencia de potencial a los extremos del conjunto, de manera que se produce un movimiento de carga hasta que la diferencia de potencial entre los extremos del conjunto es igual al potencia aplicado. Entonces se tiene ahora:

$$Q = C_1 V_1 \quad ; \quad Q = C_2 V_2 \quad ; \quad Q = C_3 V_3$$

Además:

$$V_1 + V_2 + V_3 = V$$

Luego:

$$V = Q\,(1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3) \quad ;$$

en consecuencia, la capacidad equivalente del conjunto es:

$$\boxed{1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3}$$

4.5.- Los dieléctricos y la polarización eléctrica.

4.5.1.- Dieléctricos.

La capacitancia de un condensador, que expresa en forma cuantitativa la proporcionalidad entre la carga de cada una de las placas del condensador y la diferencia de potencial entre las placas, depende de la naturaleza del medio material que hay entre las placas.

En efecto, si la capacitancia tiene un determinado valor C cuando entre las placas hay vacío, o aire seco (que para los efectos prácticos es similar), entonces, al colocar un medio material (diferente del aire seco), la capacitancia aumenta, es decir para una misma diferencia de potencial la carga es mayor, o lo que es equivalente, para una misma carga en las placas la diferencia de potencial es menor. El medio material entre las placas se denomina en este caso "dieléctrico".

Supongamos que un condensador, en el caso en que hay vacío (o aire seco) entre sus placas, tiene una capacitancia C, tal que a una determinada carga Q en las placas corresponde una diferencia de potencial eléctrico V_o; entonces se tiene:

$$Q = C V_o \qquad ;$$

si ahora se coloca un determinado dieléctrico entre las placas, sigue habiendo proporcionalidad entre la carga y la diferencia de potencial, pero la constante es diferente, ya que a la carga Q le corresponde una diferencia de potencial menor, y por lo tanto la capacitancia es mayor.

Se define la "constante dieléctrica" del medio en cuestión, designada por "κ", como la razón entre la capacitancia con el medio entre la placas, C_κ, y la capacitancia en el vacío (o aire seco):

$$\boxed{C_\kappa = \kappa C}$$

Para un medio isotrópico, el valor de esta constante no varía con la dirección, y en consecuencia es un escalar. En el caso más general de un medio anisotrópico, el valor de la constante depende de la dirección de las caras del condensador respecto del material, y en ese caso la constante dieléctrica es un tensor de segundo orden, como se verá más adelante.

Se encuentra experimentalmente que la constante dieléctrica es siempre mayor que uno. Por otra parte, como se ha dicho, cuando la carga de las placas es la misma, la diferencia de potencial con dieléctrico, V_d, es menor que la diferencia de potencial en el vacío, V_o:

$$V_d = V_o / \kappa$$

Los cálculos teóricos de las capacitancias muestra que, en el vacío, dependen de ϵ_o; en consecuencia, con un medio material entre las placas, la capacitancia depende del producto de $\kappa \epsilon_o$, que se denomina "permitividad" y se designa por "ϵ":

$$\epsilon = \kappa\epsilon_o$$

Tal como ocurre para la constante dieléctrica, para medios isotrópicos, la permitividad es un escalar, pero en el caso de medios anisotrópicos es un tensor de segundo orden. Nótese que en el vacío (o en el aire seco), $\kappa = 1$, y en consecuencia $\epsilon = \epsilon_o$; se dice que ϵ_o es la permitividad en el vacío.

En el caso particular del condensador con placas paralelas, la capacitancia con dieléctrico es:

$$C_\kappa = \kappa\,\epsilon_o A / d \quad ;$$

o, lo que es equivalente:

$$C_\kappa = \epsilon A / d \quad .$$

4.5.2.- La polarización eléctrica.

El cambio producido en la capacitancia de un condensador debido al medio material entre las placas se puede explicar por el efecto, sobre los átomos que constituyen la materia, del campo eléctrico de las cargas eléctricas en las placas.

Es bien sabido en la actualidad que la materia está formada de átomos. En primera aproximación podemos considerar a los átomos como sistemas físicos formados por los electrones, que son partículas con carga negativa, los que se distribuyen alrededor del núcleo, que tiene carga positiva, constituido por los protones, partículas positivas, y por los neutrones, partículas neutras.

La carga eléctrica del condensador (denominada "carga libre", ya que en el proceso de carga del condensador se supone que se desplaza de una placa a la otra) crea entre las placas un campo eléctrico, E, que actúa sobre las partículas cargadas - electrones y protones - que constituyen los átomos. Las partículas con carga negativa, es decir los electrones, se desplazan en el sentido contrario al sentido del campo eléctrico, pero manteniéndose cerca del átomo al cual pertenecen, ya que no pueden moverse libremente porque se supone que el dieléctrico es un material aislante. Las partículas positivas, es decir los protones o más bien los núcleos, donde están unidos los protones y los neutrones, se desplazan en el sentido del campo eléctrico, pero manteniendo su posición relativa respecto de otros átomos, ya que se supone que el dieléctrico es un sólido y en consecuencia el material no cambia su forma, determinada por la posición relativa de sus átomos.

El desplazamiento relativo de las cargas negativas y positivas, es decir de los electrones y de los núcleos, fenómeno que denominaremos la "polarización eléctrica", crea a su vez un campo eléctrico, que llamaremos "campo de polarización", E_p, tal que el campo eléctrico resultante en el condensador con dieléctrico, E_d, es la superposición del campo eléctrico de la carga libre, E_o, y del campo eléctrico de polarización.

$$\mathbf{E}_d = \mathbf{E}_o + \mathbf{E}_p$$

Nótese que el campo de polarización tiene sentido contrario al campo de la carga libre, por lo tanto:

$$E_d = E_o - E_p$$

Sea q la carga de las placas y q' la carga equivalente en las superficies del dieléctrico que produciría el campo de polarización. Por el teorema de Gauss, tenemos sucesivamente:

$$E_o = q / \epsilon_o A \quad ,$$

$$E_p = q' / \epsilon_o A$$

Se define entonces la "polarización eléctrica", **P**, como un vector cuya magnitud es $\epsilon_o E_p$, pero de sentido contrario a ese campo eléctrico, de modo que está dirigido de las cargas negativas hacia las cargas positivas, tal como los vectores de los dipolos eléctricos. Se tiene entonces:

$$P = q' / A \quad ;$$

al amplificar por d, la distancia entre las placas, que es también la distancia entre las cargas de polarización, se tiene el dipolo asociado a esas cargas dividido por el volumen del dieléctrico, es decir la polarización sería la densidad de momento dipolar eléctrico asociado a las cargas de polarización:

$$P = q' d / A d$$

4.6.- Los tres vectores eléctricos y las tres constante eléctricas.

La ecuación que relaciona los campos eléctricos de las cargas libres en las placas del condensador, de las cargas de polarización, y el campo eléctrico resultante, puede adquirir otra forma, en función de la polarización eléctrica. En efecto, al multiplicar la ecuación que relaciona los campos eléctricos por ϵ_o, se obtiene:

$$\epsilon_o \mathbf{E}_d = \epsilon_o \mathbf{E}_o + \epsilon_o \mathbf{E}_p$$

En consecuencia, introduciendo la polarización eléctrica y reordenando los términos de la ecuación, se puede escribir:

$$\epsilon_o \mathbf{E}_o = \epsilon_o \mathbf{E}_d + \mathbf{P}$$

Al vector $\epsilon_o \mathbf{E}_o$ se le denomina "desplazamiento eléctrico", $\mathbf{D}$. La relación entre desplazamiento eléctrico, polarización eléctrico y campo eléctrico resultantes es entonces:

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_o \mathbf{E}_d + \mathbf{P}}$$

Pero interesa aefinir estos nuevos vectores en función del campo eléctrico resultante. Observemos que la norma del desplazamiento eléctrico es igual a q/A, ya que el valor de E_o es $q/\epsilon_o A$. Por otra parte, puesto que $V_d = V_o / \kappa$, y $V = E\, d$, entonces:

$$E_d = E_o / \kappa$$

y por lo tanto:

$$E_d = q / \kappa \epsilon_o A \quad ;$$

en consecuencia:

$$\mathbf{D} = \kappa \epsilon_o \mathbf{E}_d \quad ,$$

o, lo que es lo mismo, en función de la permitividad:

$$\boxed{D = \epsilon E_d}$$

Por otra parte se puede expresar la polarización eléctrica en función del campo eléctrico resultante, a partir de la ecuación anterior:

$$P = D - \epsilon_o E_d \quad ;$$

en consecuencia:

$$P = \epsilon E_d - \epsilon_o E_d \quad ;$$

puesto que $\epsilon = \kappa \epsilon_o$, se factoriza, y queda la relación:

$$P = \epsilon_o (\kappa - 1) E_d$$

Se define una tercera constante eléctrica, denominada "susceptibilidad eléctrica" y designada por χ , por la ecuación:

$$\boxed{\chi = \kappa - 1}$$

La polarización eléctrica es entonces, en función del campo eléctrico resultante:

$$\boxed{P = \epsilon_o \chi E_d}$$

En conclusión, el efecto del campo eléctrico sobre un dieléctrico es producir una polarización del medio material, lo que implica originar una carga eléctrica de polarización en las caras del dieléctrico, y el correspondiente campo eléctrico de polarización. Para la generalidad de los materiales y para campos eléctricos no demasiados intensos, la polarización es proporcional al campo eléctrico, es decir el comportamiento del medio material es lineal. Sin embargo, en el caso más general de relación lineal de estos dos vectores, la susceptibilidad eléctrica es un tensor de segundo orden, lo que implica que la constante dieléctrica y la permitividad eléctrica, definidas en función de la susceptibilidad, también serían en ese caso tensores de segundo orden.

4.7.- La energía asociada al campo eléctrico.

4.7.1.- Energía potencial asociada a un condensador.

La carga de un condensador de capacitancia C con una carga Q a un potencial V implica que el sistema de cargas eléctricas ha adquirido una cierta energía potencial U. Supongamos que el condensador tiene una carga q a un potencial V, y evaluamos el aumento de energía potencial dU cuando se incrementa la carga en dq : $dU = V\,dq$; la energía potencial total del sistema cuando la carga llega al valor Q es entonces:

$$U = \int_0^Q V(q)\,dq \qquad ,$$

o, lo que es equivalente:

$$U = \int_0^Q (q/C)\,dq \qquad ;$$

en consecuencia, se tiene para la energía total:

$$U = Q^2/2C \qquad ,$$

o, lo que es lo mismo:

$$U = QV/2$$

4.7.2.- Energía asociada al campo eléctrico.

Esta energía potencial asociada a las cargas del condensador se puede expresar en función del campo eléctrico que existe en el condensador por efecto de las cargas de sus placas. En efecto, la energía del condensador, en función del potencial y de la capacitancia, se expresa por:

$$U = C V^2 / 2$$

Consideremos el caso de un condensador de caras paralelas, y expresemos el potencial en función del campo eléctrico y la capacitancia en función de las magnitudes geométricas del condensador:

$$V = E d \qquad\qquad C = \epsilon_o A / d$$

Entonces:

$$U = \epsilon_o A E^2 d / 2$$

Nótese que el producto $A d$ es el volumen comprendido entre las placas del condensador, de modo que se puede considerar a la energía del condensador como una energía asociada al campo eléctrico, con una densidad u dada por:

$$\boxed{u = \epsilon_o E^2 / 2}$$

Este resultado se generaliza en la hipótesis de asociar a todo campo eléctrico una densidad de energía dada por la expresión anterior.