UNIVERSIDAD DE ATACAMA

FACULTAD DE INGENIERIA

PROGRAMACION LINEAL

Profesor: David Elal Olivero

I. PROGRAMACION LINEAL

La programación lineal estudia el problema de asignar "de la mejor manera" recursos escasos a actividades que compiten por el uso de ellos. La programación lineal como su nombre lo indica requiere que las funciones matemáticas que constituyen el modelo sean lineales

La expresión matemática de la forma general del problema de programación lineal es la siguiente:

Encontrar los valores de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tal que optimicen (maximicen o minimicen) la función lineal

$$Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_n X_n$$

y que cumplan con las restricciones lineales.

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n \leq b_1 \qquad (\text{o bien} \geq b_1)$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n \leq b_2 \qquad (\text{o bien} \geq b_2)$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n \leq b_n \qquad (\text{o bien} \geq b_n)$$

y con $X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0, \ldots, X_n \geq 0$

OBSERVACIONES

i) Los a_{ij}, b_i y c_j son números reales llamados *coeficientes técnológicos, de disponibilidad de recursos o de demanda y de precios o costos* respectivamente. Ellos representan *constantes* que son obtenidas como datos para el modelo

ii) La función $Z = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ que se debe maximizar o minimizar se denomina *función objetivo* y es la representación matemática del criterio de efectividad.

TABLA 1.

Disponibilidad de horas en las diferentes secciones:

SECCION	CAPACIDAD TIEMPO DISPONIBLE
Modelaje	300 hrs/semana
Fundición	500 hrs/semana
Fresa	350 hrs/semana
Pulido	160 hrs/semana
Pintado	48 hrs/semana

TABLA 2.

Requerimientos de tiempo en cada sección por cada unidad de producto.

PRODUCTIVIDAD (hrs/unidad)

SECCION	P_1	P_2	P_3
Modelaje	4	3	3
Fundición	7	6	7
Fresa	2	3	3
Pulido	2	1	1
Pintado	0.9	0.4	0.8

Además:

a) El departamento de Comercialización estima que las ventas del producto P_2 pueden exceder la capacidad máxima de producción, pero en cambio no se podría colocar mas de 50 unidades del producto P_1 y 45 del producto P_3. Según estos mismos estudios de mercado se estima que las utilidades (Ingreso - Costos) para el período separa de $20, $12 y $14 por unidad de los productos P_1, P_2 y P_3 respectivamente.

II.- *Fundición:*

$$7X_1 + 6X_2 + 7X_3 \leq 500$$

III.- *Fresa*

$$2X_1 + 3X_2 + 3X_3 \leq 350$$

IV.- *Pulido*

$$2X_1 + X_2 + X_3 \leq 160$$

V.- *Pintado*

$$9X_1 + 4X_2 + 8X_3 \leq 480$$

b) Capacidad del mercado:

I.- *Producto 1:*

$$X_1 \leq 50$$

II.- *Producto 3:*

$$X_3 \leq 45$$

Con todos estos elementos hasta ahora desarrollados podemos plantear el problema de la siguiente manera:

$$\text{Max } Z = 20X_1 + 6X_2 + 14X_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 4X_1 + 3X_2 + 3X_3 &\leq 300 \\ 7X_1 + 6X_2 + 7X_3 &\leq 500 \\ 2X_1 + 3X_2 + 3X_3 &\leq 350 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 &\leq 160 \\ 9X_1 + 4X_2 + 8X_3 &\leq 480 \\ X_1 &\leq 50 \\ X_3 &\leq 45 \end{aligned}$$

con

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \text{ y } X_3 \geq 0$$

que es el modelo pedido.

2.- Se solicita determinar la alimentación apropiada para un horno eléctrico, de tal forma que el producto final satisfaga ciertas condiciones dadas y optimice la operación de la fundición. La observación detallada del problema, arroja la siguiente formulación simplificada:

X_5: N$^{\underline{o}}$ de toneladas de briquetas de carbono a usar

X_6: N$^{\underline{o}}$ de toneladas de briquetas de silicio a usar

que por supuesto deben ser mayor o igual a cero.

II.- *Función objetivo* (¿Que se debe optimizar? o ¿que es lo que mide la eficacia?).

Vemos que en este caso lo que nos dice si una solución es mejor que otra, son los costos asociados. Luego debemos minimizar los costos.

$$\text{Min } Z = (\text{Costo total})$$

esto es

$$\text{Min } Z = 67X_1 + 64X_2 + 73X_3 + 43X_4 + 700X_5 + 1150X_6$$

III.- *Restricciones.* (¿Qué limita nuestra decisión?)

a) Hay que cumplir con las especificaciones del producto final.

i) Mínimo de carbono 3.25%, es decir 0.065 toneladas del total de 2 toneladas que componen la carga total.

Así: Carbono total de la carga ≥ 0.065 toneladas

luego $0.0045X_1 + 0.004X_2 + 0.035X_3 + 0.03X_4 + X_5 \geq 0.065$

Carbono por tonelada   Numero de toneladas

Total de carbono en toneladas

ii) Máximo de carbono 3.41% 3.14%, es decir 0.0682 toneladas del total de 2.

Así: Carbono total de la carga ≤ 0.0682 toneladas

luego $0.0045X_1 + 0.004X_2 + 0.035X_3 + 0.03X_4 + X_5 \leq 0.0682$

iii) Mínimo de silicio 2.05%, es decir 0.041 toneladas.

Así

Silicio total en la carga ≥ 0.041 toneladas

luego $0.001X_1 + 0.0015X_2 + 0.023X_3 + 0.022X_4 + X_6 \geq 0.041$

iv) Máximo de silicio 2.25%, es decir 0.045 toneladas.

luego $0.001X_1 + 0.0015X_2 + 0.023X_3 + 0.022X_4 + X_6 \leq 0.045$

1.- *Linealidad:* Es una exigencia del modelo que la representación matemática de la función objetivo y de las restricciones sean funciones lineales. Esta exigencia particulariza la aplicabilidad de la programación lineal y deja una gran variedad de problemas fuera.

2.- *Independencia entre actividades:* Se supone que el nivel de una actividad no depende de ninguna otra actividad, con esto se pretende garantizar que el problema permanezca en forma lineal.

3.- *Divisibilidad:* La programación lineal entrega por lo general resultados con decimales; sin embargo, el problema es tal que sólo acepta resultados enteros. Por ejemplo la asignación de hombres a diversas tareas.

4.- *Determinísticos:* Se supone que todas las constantes que aparecen en el modelo son conocidas con certeza. Generalmente ellas son estimaciones basadas en el comportamiento esperado.

METODOS DE RESOLUCION

A continuación presentaremos dos métodos matemáticos, bajo ciertas limitantes, para llegar a la solución de un problema de programación lineal.

I.- *Solución gráfico.*

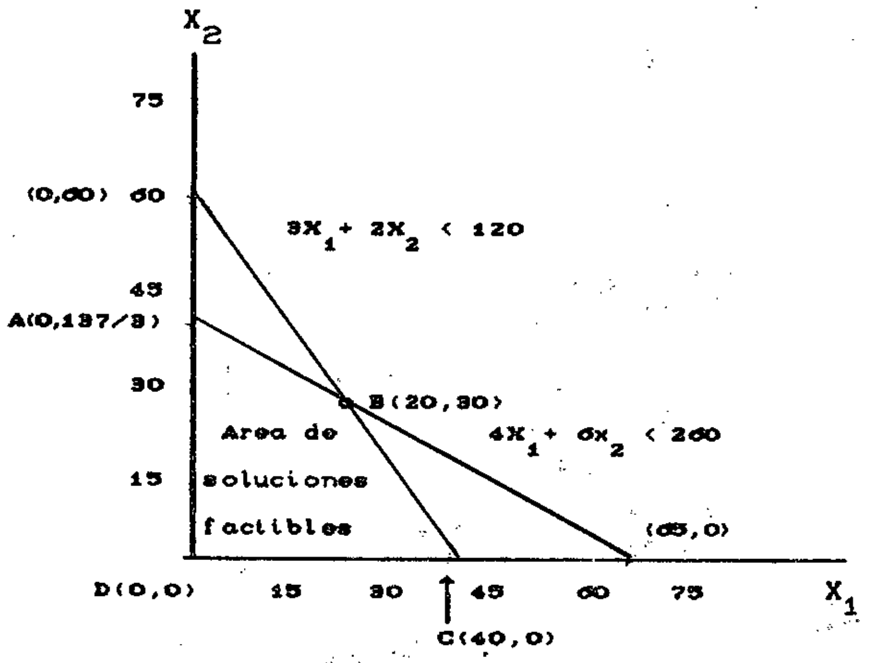
Cuando un modelo de programación lineal se establece en términos de dos variables de decisión, se le puede resolver por procedimientos gráficos. El método gráfico proporciona un magnífico cuadro visual de referencia, y resulta extremadamente útil para la comprensión de aquellos aspectos que pueden aparecer en la solución de problemas de programación lineal. Desarrollaremos en esta sección el método de solución gráfica apoyados en el siguiente problema de programación lineal.

3.- Una firma elabora dos productos, a cada uno de los cuáles se les debe procesar en los departamentos 1 y 2. En la tabla que se detalla a continuación se resúmen las necesidades en horas por unidad de cada producto en cada departamento. También se presentan las capacidades semanales de cada departamento, precio por unidad, costo de la mano de obra por unidad, y costo de la materia prima por unidad. Determinar el número de unidades a producir de cada

$$X_1 \geq 0 \text{ y } X_2 \geq 0$$

En el desarrollo de la presentación del método gráfico haremos mención de algunas definiciones que se darán formalmente en las secciones siguientes.

El primer paso en el procedimiento gráfico es identificar el conjunto solución para el sistema de limitantes. A este conjunto solución se le denomina, como veremos mas adelante, *área de soluciones factibles.* Simplemente identifica todas las combinaciones de las variables de decisión (X_1 y X_2) que satisfacen las restricciones. Estas combinaciones son candidatos para la solución óptima. Representaremos a continuación el área determinada por las restricciones del problema.



Cada punto dentro del área de soluciones posibles representa una combinación de los dos productos que se pueden producir. El problema es ahora determinar la combinación o combinaciones que maximicen la función objetivo.

Incorporación de la función objetivo

El procedimiento de solución de la programación lineal investiga el área de soluciones posibles para la solución óptima. Desarróllese en forma gradual un procedimiento de investigación examinando primero algunas características de la función objetivo. En el problema de producción combinada, identifíquense las la que podemos expresar en términos de X_2 como

$$X_2 = -\frac{5}{6}X_1 + \frac{Z}{6}$$

donde podemos ver que la pendiente de la recta es -5/6 y no está influenciada por el valor de Z. Por otra parte la intercepción con el eje X_2 es Z/6 que depende obviamente de Z y conforme Z cambie su valor tambien lo hace la intercepción produciendose el dezplasamiento paralelo esperado.

Para este problema, cada recta de utilidad tiene una pendiente de -5/6. Si se tiene interés en maximizar la utilidad, se dezplasa la recta de utilidad, alejándose del origen, en forma paralela hasta tener contacto con el último punto de la región factible. Este último punto queda sobre la recta de utilidad igual a 280 dólares y tiene coordenadas (20,30). *Conclusión: la utilidad se maximiza a un valor de* 280 *dólares, cuando se elaboran* 20 *unidades del producto* A y 30 *unidades del producto* B.

II . *Solución punto en la esquina*

El procedimiento de investigación se puede simplificar si se aprovechan las caracteristicas conjuntas del área de soluciones factibles y de la función objetivo. Un *conjunto convexo* es un conjunto de puntos tales que si dos puntos cualesquiera seleccionados en forma arbitraria dentro del conjunto se unen con una linea recta, todos los puntos sobre el segmento de recta tambien pertenecen al conjunto.

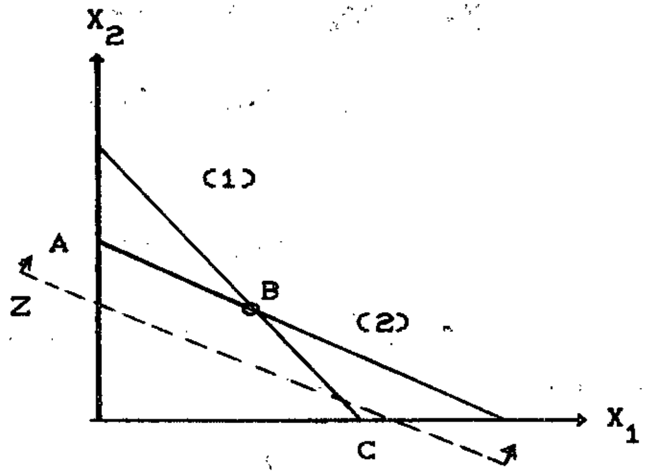
Esto conduce a los siguientes enunciados, los cuáles son de una importancia fundamental en la programación lineal y que serán demostrados formalmente en una sección mas adelante.

1.- *El conjunto solución para un grupo de desigualdades lineales es un conjunto convexo. Por lo que el área de soluciones factibles para un problema de programación lineal es un conjunto convexo.*

2.- Dada una función objetivo en un problema de programación lineal, la solución óptima incluirá siempre un punto angular en el área de soluciones factibles. Esto es cierto haciendo caso omiso de la pendiente de la función objetivo, y para problemas tanto de maximización como de minimización.

ejemplo.

situación, existiría un número infinito de puntos, cada uno de los cuáles resultaría del mismo valor máximo de Z. En situaciones como ésta se dice que existen soluciones óptimas alternativas al problema.



FORMAS EQUIVALENTES DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

En el desarrollo que a continuación se presenta se usa la siguiente forma de la programación lineal denominada *forma canónica*.

$$\text{Max } Z = cX$$

sujeto a

$$AX \leq b$$
$$X \geq 0$$

cualquier otra forma es equivalente a esta, las que pueden ser demostradas fácilmente por medio del uso de cualquiera de las siguientes cinco reglas.

Regla 1

a) Maximizar cX es equivalente a Minimizar -cX

b) Minimizar cX es equivalente a Maximizar -cX

ejemplo:

a) $$\text{Max } Z = 3X_1 - 4X_2 + 5X_3$$

es equivalente a

$$\text{Min } -Z = -3X_1 + 4X_2 - 5X_3$$

b) $$\text{Min } Z = 16X_1 - 5X_2$$

es equivalente a

$$\text{Max } -Z = -16X_1 + 5X_2$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_m \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ejemplo

a)

$$\begin{aligned} 14X_1 - 3X_2 &\leq 10 \\ 12X_1 + 4X_2 &\leq 12 \end{aligned}$$

es equivalente a

$$\begin{aligned} 14X_1 - 3X_2 + X_3 &= 10 \\ 12X_1 + 4X_2 + X_4 &= 12 \end{aligned}$$

$$X_3 \geq 0, \quad X_4 \geq 0$$

donde el vector de holgura es

$$\begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} 16X_1 - 8X_2 &\geq 5 \\ 7X_1 + 3X_2 &\geq 10 \end{aligned}$$

es equivalente a

$$\begin{aligned} 16X_1 - 8X_2 - X_3 &= 5 \\ 7X_1 + 3X_2 - X_4 &= 10 \end{aligned}$$

$$X_3 \geq 0, \quad X_4 \geq 0$$

donde el vector superfluo es

$$\begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

regla 5

Una variable *no restringida*, o sea aquella que puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$ puede escribirse como la diferencia de dos variables no-negativas.

ejemplo

$$\text{Max } h = -3X_1 - 4X_4 - X_5 + X_6$$

sujeto a

$$\begin{aligned} -0.5X_1 + 2X_4 \qquad\qquad &\le -3 \\ -X_4 - X_5 + X_6 &\le 4 \\ X_4 + X_5 - X_6 &\le -4 \end{aligned}$$

con

$$X_1 \ge 0,\ X_4 \ge 0,\ X_5 \ge 0 \text{ y } X_6 \ge 0$$

Esta última expresión tiene la estructura canónica pedida.

UNA MIRADA AL METODO SIMPLEX

Para todos los propósitos prácticos, los procedimientos de solución gráfica sólo son aplicables a los problemas de programación lineal de dos variables. Se puede analizar la geometría de los problemas de tres variables; sin embargo, las dificultades que ésta presenta son obvias. Además, con más de tres variables se carece de un marco o cuadro geométrico de referencia. Puesto que muchas de las aplicaciones reales de la programación lineal contienen más de dos variables, se tiene la necesidad de un procedimiento de solución diferente del método gráfico.

El procedimiento no gráfico mas popular es el *método simplex*. Este método es un procedimiento algebraico, de cierta complejidad, para la solución de sistemas de ecuaciones simultáneas, en donde se pretende optimizar una función objetivo. Es un proceso *iterativo* en el que se identifica una solución inicial factible. Se prosigue investigando para ver si existe una solución "mejor" debe entenderse la medida en la que se puede perfeccionar el valor de la función objetivo. Si se identifica una solución mejor, la investigación se reanuda. La generación de cada solución sucesiva precisa de la solución de un sistema de ecuaciones lineales. La búsqueda continúa hasta que en la función objetivo ya no sea posible una mejora adicional. Una característica importante del método simplex es que garantiza que cada solución susesiva será factible, y que el valor de la función objetivo será por lo menos tan aceptable como el valor de la función anterior.

Antes de resolver por el método simplex un problema de programación lineal en su forma canónica las restricciones, es decir $AX \le b$, deberán ser transformadas en igualdades, mediante

Consideremoa el siguiente problema de programación lineal

$$\text{maximícese } Z = 5X_1 + 6X_2$$

sujeto a

$$3X_1 + 2X_2 \leq 120 \quad \text{departamento 1}$$
$$4X_1 + 6X_2 \leq 260 \quad \text{departamento 2}$$
$$X_1 \geq 0, \quad X_2 > 0$$

Antes de resolver este problema por el método simplex se debe transformar el conjunto de restricciones en el conjunto equivalente

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 = 120$$
$$4X_1 + 6X_2 + X_4 = 260$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 > 0, \quad X_3 \geq 0, \quad X_4 > 0$$

Ahora el conjunto de restricciones es de dos ecuaciones y cuatro variables. De todas las soluciones posibles para el conjunto de restricciones se demuestra (como veremos mas adelante) que ocurre una solución óptima cuando en este problema igualan a cero dos de las cuatro variables, y se resuelve el sistema para las otras dos variables. La cuestión es ¿Cuáles son las dos variables que se deben hacer igual a cero?.. Es fácil ver que las posibles combinaciones de hacer dos variables iguales a cero está dada por las combinaciones de 4 sobre 2, es decir $\binom{4}{2} = 6$.

En la iguiente tabla se resúmen todas las posibilidades de solución, habiéndose asignado a dos de las cuatro variables el valor cero.

Solución	Variables que se igualan a cero	Valores de las otras variables	
1	X_3, X_4	$X_1=20$,	$X_2=30$
* 2	X_1, X_3	$X_2=60$,	$X_4=-100$
3	X_1, X_4	$X_2=130/3$,	$X_3=100/3$
4	X_2, X_3	$X_1=40$	$X_4=100$
* 5	X_2, X_4	$X_1=65$,	$X_3=-75$
6	X_1, X_2	$X_3= 120$,	$X_4=260$

TEOREMAS BASICOS DE LA PROGRAMACION LINEAL

Se considera la forma canónica

$$\text{Max } Z = c^t X$$

sujeto a

$$AX \leq b$$

con

$$X \geq 0$$

donde $c^t = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $X^t = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ X^t traspuesta de X

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $b^t = (b_1\ b_2, \ldots, b_m)$.

Definiciones

1.- *Solución factible.* Una solución factible al problema lineal es aquel vector $X^t = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ que satisface las restricciones.

$$AX \leq b$$

y

$$X \geq 0$$

2.- *Solución factible básica.* Una solución factible básica $X^t = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se obtiene haciendo $n - m$ de las componentes de X iguales a cero y encontrando una solución no negativa para las restantes componentes, siempre y cuando los m vectores (columnas de A) correspondientes a las componentes de X que no se hayan hacho cero sean linealmente independientes.

Nota. Considerando definición anterior. Las componentes de X que inicialmente no se hicieron iguales a cero, se denominan *variables básicas*. Si una o más de las variables básicas resulta igual a cero, la solución factible básica es *degenarada*; si todas las variables básicas son positivas , la solución factible básica es *no degenerada*.

3.- *Región de factibilidad.* Es el conjunto de todas las soluciones factibles.

Ejemplo.

Considere el problema lineal;

intuitivos, un conjunto es *convexo*, si dado dos puntos cualesquiera dentro del conjunto, el segmento de recta que une a los dos puntos está contenido totalmente dentro del conjunto.

Definición. Un punto **X** de un conjunto convexo **K** se llama *punto extremo* si y sólo si $X = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$, $0<\lambda<1$, implica que $X = X_1 = X_2$ ó que $X_1 \notin K$ ó que $X_2 \notin K$. De lo anterior se se resume que un punto extremo no puede representarse como una combinación convexa de puntos del conjunto convexo.

observación. Nótese que un punto extremo es siempre un punto de la *frontera* del conjunto convexo pero que no todo punto de la frontera, es un punto extremo.

Teorema. El conjunto de todas las soluciones factibles de un problema de programación lineal es un conjunto convexo.

Teorema. La función objetivo de un programa lineal obtiene su valor máximo (o mínimo) en un punto extremo del conjunto convexo de soluciones factibles.

Nota. Para el siguiente teorema es conveniente escribir la forma canónica de la siguiente manera:

$$Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n$$

y que cumplan con las restricciones lineales.

$$\begin{array}{ll}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n \leq b_1 & (\text{o bien} \geq b_1) \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n \leq b_2 & (\text{o bien} \geq b_2) \\
\vdots & \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n \leq b_n & (\text{o bien} \geq b_n)
\end{array}$$

y con $X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0, \ldots, X_n \geq 0$

donde las columnas de la matriz **A** se denotaran por $a_1, a_2, \ldots, a_n$, es decir, Estas tres conclusiones son importantisimas, porque aún cuando existe un *número infinito* de vectores **X** que son factibles (todos los puntos en el interior y en la frontera de la región convexa de factibilidad), solamente existe un *número finito* de puntos extremos. La solución óptima se obtiene en un punto extremo. Entonces, para obtener la solución de un programa lineal, habrá que ver en teoría que valor tiene la función objetivo en cada punto extremo y seleccionar el mejor. Esto puede convertirse en un tarea bastante tediosa, si se tiene en cuenta que una región factible proveniente de un programa lineal con n variables de decisión y m restricciones puede tener un máximo de m combinaciones sobre n, es decir $\binom{n}{m}$, puntos extremos, que pueden ser muchos en un caso concreto.

Afortunadamente el Dr. George Dantzig, llamado el padre de la programación lineal, halló un método a fines de la década de los años 40, que permite resolver un problema lineal sin necesidad de analizar explícitamente el valor de la función objetivo en cada punto extremo. Su método se conoce con el nombre del *método simplex*, cuya teoría se cubre a continuación pasando después a las reglas del mismo con su respectiva ilustración.

Teoría del método simplex

Se considera el programa lineal en su forma canónica con la salvedad de que la restricción $\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$ mediante la adición de variables de holgura se transforma en su forma equivalente a $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$. De esta manera el programa lineal queda.

$$\text{Max } Z = c^t\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

con

$$\mathbf{X} \geq 0$$

donde $c^t = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ $\mathbf{X}^t = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ $\mathbf{X}^t$ traspuesta de $\mathbf{X}$

$A = (a_{ij})_{mxn}$ y $b = (b_1\ b_2, \ldots, b_m)^t$.

Supongamos que el vector $\mathbf{X} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}_B \\ \hline \mathbf{X}_N \end{array}\right]$ corresponde a una solución

Se supone que el vector que se va sacar de B es el a_r y que la componente $Y_{rj} \neq 0$

entonces

$$a_j = \sum_{k=1}^{m} Y_{kj} a_k = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^{m} Y_{kj} a_k + Y_{rj} a_r$$

despejando a_r tenemos que

$$a_r = \frac{1}{Y_{rj}} a_j - \frac{1}{Y_{rj}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^{m} Y_{kj} a_k \quad , \quad Y_{rj} \neq 0$$

$$= \frac{1}{Y_{rj}} a_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^{m} \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}} a_k \quad , \qquad Y_{rj} \neq 0$$

Por otra parte la solución factible básica $BX_B = b$ puede escribirse en función de las columnas de la base de B como

$$\sum_{k=1} a_k X_{B_k} = b$$

donde X_{B_k} , $k = 1,2,\ldots,m$ son las m componentes de X_B. Pero puede reescribirse como

$$a_r X_{B_r} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^{m} a_k X_{B_k} = b$$

reemplazando el valor de a_r antes calculado, en esta última ecuación tenemos

$$\left(\frac{1}{Y_{rj}} a_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^{m} \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}} a_k \right) X_{B_r} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^{m} a_k X_{B_k} = b$$

$$X_{B_k} - X_{B_r} \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}} \qquad Y_{rj} > 0$$

dividamos dicha expresión por $Y_{kj} > 0$

$$\frac{X_{B_k}}{Y_{kj}} - \frac{X_{B_r}}{Y_{kj}} \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}}, \qquad Y_{rj} > 0, \qquad Y_{kj} > 0$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{X_{B_k}}{Y_{kj}} - \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}}, \qquad Y_{rj} > 0, \qquad Y_{kj} > 0$$

De esta manera, decir que $\hat{X}_k \geq 0$ es equivalente a que

$$\frac{X_{B_k}}{Y_{kj}} - \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} \geq 0 \qquad Y_{rj} > 0, \qquad Y_{kj} > 0$$

$$\frac{X_{B_k}}{Y_{kj}} \geq \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} \qquad Y_{rj} > 0, \qquad Y_{kj} > 0$$

Esto sólo se puede llevar a cabo si en las reglas del juego, la columna que se remueve de la base B, satisface la siguiente condición importantísima

$$\boxed{\frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} = \underset{k}{\mathrm{Min}} \left\{ \frac{X_{B_k}}{Y_{kj}} \;\Big/\; Y_{kj} > 0 \right\}}$$

Condición que traducido a otro lenguaje significa que si se supiera a priori que columna a_j de N entraría en la nueva base B, reemplazando los valores de $\hat{X}_k$ y $\hat{X}_r$ anteriormente calculados, tenemos

$$\hat{Z} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^{m} c_{B_k} \left[X_{B_k} - X_{B_r} \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}} \right] + c_j \frac{X_{B_k}}{Y_{kj}}, \qquad Y_{rj} \neq 0$$

Si se nota cuidadosamente, el único término faltante en la sumatoria es el siguiente:

$$c_{B_r} \left[X_{B_r} - X_{B_r} \frac{Y_{rj}}{Y_{rj}} \right] = 0, \quad Y_{rj} \neq 0$$

que es igual a cero. Si se introduce este término en la sumatoria, evidentemente no afectará a la expresión, y en tal caso queda

$$\hat{Z} = \sum_{k=1}^{m} c_{B_k} \left[X_{B_k} - X_{B_r} \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}} \right] + c_j \frac{X_{B_k}}{Y_{kj}}, \qquad Y_{rj} \neq 0$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_{B_k} X_{B_k} - \sum_{k=1}^{m} c_{B_k} X_{B_r} \frac{Y_{kj}}{Y_{rj}} + c_j \frac{X_{B_k}}{Y_{kj}}, \qquad Y_{rj} \neq 0$$

$$= Z - \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} \sum_{k=1}^{m} c_{B_k} Y_{kj} + c_j \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} \qquad Y_{rj} \neq 0$$

si hacemos $z_j = \sum_{k=1}^{m} c_{B_k} Y_{kj}$ tenemos que

$$\hat{Z} = Z - \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} z_j + \frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} c_j, \qquad Y_{rj} \neq 0$$

que tenga la $(z_j - c_j)$ más negativa, $j \in \mathbb{N}$.

Regla de salida. Una vez que se sepa que a_j va a entrar en la nueva base $\hat{B}$, sáquese aquel vector $a_r \in B$ que cumpla con la siguiente condición:

$$\boxed{\frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} = \underset{k}{\mathrm{Min}} \left\{ \frac{X_{B_k}}{Y_{kj}} \bigg/ \quad Y_{kj} > 0 \right\}}$$

Ya se sabe, al menos en teoría, como mejorar el valor de la función objetivo, pero,¿cuándo se debe detener el proceso, pues se ha obtenido una solución óptima?. El siguiente teorema da la respueta.

Teorema. La solución óptima del programa canónico:

$$\mathrm{Max}\ Z = c^t X$$

sujeto a

$$AX \le b$$

con

$$X \ge 0$$

se obtiene cuando todas las $(z_j - c_j) \ge 0 \quad \forall\ j \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $X = \begin{pmatrix} X_B \\ \hline X_N \end{pmatrix}$ con $X_B^t = [X_1, X_2, \ldots, X_m] \ge 0$, una solución factible básica al sistema $AX = b$, donde $A = (B|N)$. con $B = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, consideremos además el vector $c = (c_B/c_N)$ con $c_B^t = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$.

observación. las particiones antes mencionadas son generadas por la solución X reindiseada para lograr el recorrido de 1 a m, sin perder generalidad en la demostración.

Tenemos entonces que:

$$BX_B = b \quad \text{o bien} \quad \sum_{k=1}^{m} X_k a_k = b$$

y

$$Z = c_B X_B = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_m X_m$$

Cualquier vector $a_j \in N$, puede escribirse como una

$$\left[\sum_{h=1}^{n} X_h^* Y_{1h}\right]a_1 + \left[\sum_{h=1}^{n} X_h^* Y_{2h}\right]a_2 + \ldots + \left[\sum_{h=1}^{n} X_h^* Y_{mh}\right]a_m = \mathbf{b}$$

Esta última igualdad expresa al vector **b** en términos de los m vectores $a_1, a_2, \ldots, a_m$ que forman la base **B**. Como estos m vectores son linealmente independientes, la expresión de **b** es única y dado que $\mathbf{B}X_B = \mathbf{b}$ permite otra representación del vector **b** dada por

$$X_1 a_1 + X_2 a_2 + \ldots + X_m a_m = \mathbf{b}$$

se deduce que

$$X_i = \sum_{h=1}^{n} X_h^* Y_{ih} \qquad i = 1,2,\ldots,m.$$

Considerando las desigualdades $z_h \geq c_h$ y $X_h^* \geq 0$ $\forall\, h = 1,2,\ldots,n$ tenemos que $X_h^* z_h \geq X_h^* c_h$ y en consecuencia

$$\sum_{h=1}^{n} X_h^* z_h \geq \sum_{h=1}^{n} X_h^* c_h = Z^*$$

reemplazando el valor de z_h ya mencionado, tenemos que

$$\sum_{h=1}^{n} X_h^* \sum_{k=1}^{m} c_k Y_{kh} \geq \sum_{h=1}^{n} X_h^* c_h = Z^*$$

desigualdad que puede reescribirse como

$$\sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{h=1}^{n} X_h^* Y_{kh}\right] c_k \geq \sum_{h=1}^{n} X_h^* c_h = Z^*$$

de donde

$$\sum_{k=1}^{m} X_k c_k \geq \sum_{h=1}^{n} X_h^* c_h = Z^*$$

luego

$$Z \geq Z^*$$

En resúmen hemos considerado una solución factible básica

En tal caso la matriz A se ha ampliado, y si denotamos por $\tilde{A}$ a la matriz ampliada, tenemos que $\tilde{A} = (A_{mxn} / I_{mxm})$. Recordemos que dada una solución factible básica X, esta origina una partición en la matriz $A = (B / N)$ donde cada vector en N puede ser escrito como una combinación lineal de las columnas de B que forman una base en $\mathbb{R}^m$. Así tambien cada vector $e_i \in I_{mxm}$ puede escribirse como una combinación lineal de las columnas de B. En general

$$a_p = \sum_{k=1}^{m} Y_{kp} a_k \qquad p = 1,2,\dots,m,\dots,n,n+1,\dots n+m$$

por lo que $a_p = BY_p$ o equivalentemente $Y_p = B^{-1} a_p$ de esta manera

$$[Y_1, Y_2, \dots, Y_n, Y_{n+1}, \dots, Y_{n+m}] = B^{-1}\tilde{A} = B^{-1}(A / I) = (B^{-1}A / B^{-1})$$

Ovbiamente si consideramos el vector X ampliado, digamos $\tilde{X}$, entonces $\tilde{X}^t = (X^t / \bar{X}^t)$ con $\bar{X}^t = (X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+m})$ para expresar la función objetivo, debemos considerar la ampliación del vector de coeficientes de precios, digamos $\tilde{c}^t = (c^t_{nx1} / 0^t_{mxm})$ y en tal caso

$$Z = c^t X = \tilde{c}^t \tilde{X}$$

Ahora estamos en condiciones de dar los pasos a seguir para solucionar un programa lineal.

Paso 1.- Dado cualquier programa lineal transfórmese por medio de las reglas de equivalencia 1,2,3 y 5 al programa lineal canónico

$$\text{Max } Z = c^t X$$

sujeto a

$$AX \le b$$

con

$$X \ge 0$$

Si se proporciona únicamente las reglas del *método simplex* en relación a la forma canónica arriba descrita, se ahorran muchas palabras y reglas, y además se evitan confuciones al lector.

Paso 4. - Constrúyase una *tabla o tableau* con los coeficientes del programa lineal de la siguiente manera:

variables originales | variables de holgura | valor función objetivo

	Z	X_1	X_2		X_n	X_{n+1}	...	X_{n+m}	
	1	z_1-c_1	z_2-c_2	...	z_n-c_n	$z_{n+1}-c_{n+1}$	...	$z_{n+m}-c_{n+m}$	Z_o
a_{B_1}	0	Y_{11}	Y_{12}		Y_{1n}	$Y_{1,n+1}$		$Y_{1,n+m}$	X_{B_1}
a_{B_2}	0	Y_{21}	Y_{22}		Y_{2n}	$Y_{2,n+1}$		$Y_{2,n+m}$	X_{B_2}
⋮	..	....	....	....	....	....	....	....	.....
a_{B_m}	0	Y_{m1}	Y_{m2}		Y_{mn}	$Y_{m,n+1}$		$Y_{m,n+m}$	X_{B_m}

vectores que integran la base atual B

Identificación del punto extremo asociado a la base actual B

Este *tableau* también tendrá la siguiente estructura condensada que es equivalente a la anterior.

En el caso en que todas las Y_{kj} del denominador sean negativos, se tiene el caso de una *solución no acotada*.

Paso 7.- La intersección en el *tableau* de la columna que entra y la que sale determina el elemento *pivote* Y_{rj}. Apliuese operaciones matriciales elementales en el pivote Y_{rj}, con objeto de convertir a la columna a_j en el vector unitario e_r, es decir ceros en toda la columna y un uno en la r-ava componente, que resulta ser Y_{rj}. Regrésese al paso 5.

Por ejemplo si la columna seleccionada a entrar en la base es el a_2 y la columna a salir es el a_7, hágase el elemento Y_{72} del *tableau* igual a uno y el resto de las componentes de la columna a_2 ceros (incluyendo a $z_2 - c_2$) mediante el uso de operaciones matriciales elementales.

Este paso genera una nueva base B, un nuevo punto extremo $X^t = (X_B/X_N)$ y un nuevo valor de la función objetivo Z.

Ejemplo 1 .- Resuélvase por medio del *método simplex* el siguiente programa:

$$\text{Máz } Z = 5000X_1 + 3000X_2$$

sujeto a

$$3X_1 + 5X_2 \leq 15$$
$$5X_1 + 2X_2 \leq 10$$

con

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0$$

El paso 1 ya está satisfecho. El paso 2 genera

$$Z - 5000X_1 - 3000X_2 = 0$$

El paso 3 proporciona la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \text{Máz } Z - 5000X_1 - 3000X_2 \qquad\qquad &= 0 \\ 3X_1 + 5X_2 + X_3 \qquad &= 15 \\ 5X_1 + 2X_2 \qquad + X_4 &= 10 \end{aligned}$$

con

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \; X_3 \geq 0, \; X_4 \geq 0$$

Las variables X_3 y X_4 son de holgura. Así el *tableau* original tiene (Paso 4) la siguiente estructura;

$$z_j - c_j = \text{Min } (-5000,\ -3000) = -5000$$

por lo que la columna a entrar a la nueva base es a_1. Para ver que vector a_r debe salir de la base actual se aplica el paso 6. Los únicos candidatos a salir están dados por la regla

$$\frac{X_{B_r}}{Y_{rj}} = \underset{k}{\text{Min}} \left\{ \frac{X_{B_k}}{Y_{kj}} \ \Big/ \ Y_{kj} > 0 \right\}$$

o sea que sabiendo que $j = 1$ se tiene

$$\frac{X_{B_r}}{Y_{r1}} = \underset{k}{\text{Min}} \left\{ \frac{15}{3},\ \frac{10}{5} \right\} = 2$$

El vector que debe salir es el a_4. Sabiendo que el vector a_1 es el que debe entrar y a_4 el que va a salir, *el pivote* queda determinado. El pivote en este caso es el elemento $Y_{14} = 5$, tal como se muestra a continuación:

	Z	X_1 ↓	X_2	X_3	X_4		
	1	-5000	-3000	0	0	0	
a_3	0	3	5	1	0	15	
a_4	0	$\boxed{5}$	2	0	1	10	← X_B
		↑ pivote					

Ahora mediante operaciones elementales hay que llevar el vector (columna) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ al vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. El resultado de esta operación se muestra en el siguiente *tableau*.

Ahora mediante operaciones elementales hay que llevar el vector (columna) $\begin{bmatrix} 19/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$ al vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. El resultado de esta operación se muestra en el siguiente *tableau*.

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	
	1	0	0	5000/19	16000/19	235000/19
a_2	0	0	1	5/19	-3/19	45/19
a_1	0	1	0	-2/19	25/95	20/19

La nueva solución o punto extremo correspondiente a la nueva base $\mathbf{B} = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1)$, que por cierto es ya óptima porque todas las $z_j - c_j \geq 0$ es: $X_1 = 20/19$, $X_2 = 45/19$ $X_3 = 0$ y $X_4 = 0$. El valor óptimo (función objetivo) $Z = 235000/19$.

PROBLEMAS

1.- Considere el siguiente problema lineal

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 6X_2 + 5X_3 + 4X_4$$

sujeto a

$$2X_1 + 8X_2 + X_3 + X_4 \leq 6$$

$$X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 \leq 4$$

con $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, $X_3 \geq 0$ $X_4 \geq 0$

a) ¿ Cuál es el máximo número de soluciones factibles básicas posibles?

b) Identifique todas las soluciones factibles básicas.

c) Identifique todas las soluciones básicas factibles no degeneradas.

d) Identifique todas las soluciones básicas factibles degeneradas.

e) Encuentre la solución óptima en base, no al método simplex, sino al análisis de todos los puntos extremos o soluciones básicas factibles.

	Producto A	Producto B	Capacidad semanal
Departamento 1	3 h/unidad	2 h/unidad	120 h
Departamento 2	4 h/unidad	6 h/unidad	260 h
Precio venta dólarse	25	30	
Costo de mano de obra por unidad	16	20	
Costo de materia prima por unidad	4	4	

4.- Un dietista está planeando el menu para la merienda a servirse en el comedor de una universidad. Se servirán tres platillos principales, teniendo cada uno diferente contenido nutricional. El dietista tiene interes en proporcionar, por lo menos, las necesidades minimas de cada una de tres vitaminas en este alimento. En la tabla siguiente se resume el contenido *de vitamina por onza de cada tipo de alimento,* el costo por onza de cada alimento, y los niveles diarios minimos de las tres vitaminas. Se puede seleccionar cualquier combinación de los tres alimentos, siempre que la cantidad total a servir sea, de por lo menos, 9 onzas. Determinar el número de onzas de cada alimento que se debe incluir en la comida minimizando el costo de cada comida destinada a satisfacer los niveles minimos diarios de las tres vitaminas, así como la restricción de cantidad mínima a servir.

	Vitamina 1	Vitamina 2	Vitamina 3	costo por onza
Alimento 1	50 mg	20 mg	10 mg	$ 0.10
Alimento 2	30 mg	10 mg	50 mg	$ 0.15
Alimento 3	20 mg	30 mg	20 mg	$ 0.12
Necesidades vitamínicas diarias/mín	290 mg	200 mg	210 mg	

todo $i = 1,2,\ldots,m$, la solución del problema lineal es no acotado.

Demostración. Supóngase que $X_B = (X_{B_1}\ X_{B_2},\ldots,X_{B_m})$ es una solución básica factible. Entonces se cumple

$$X_{B_1}a_1 + X_{B_2}a_2 + \ldots + X_{B_m}a_m = b.$$

Si se suma y resta a la expresión anterior el vector αa_k, donde α es un escalar arbitrario y a_k es el vector a entrar a la base, se tiene que la expresión no cambia

$$X_{B_1}a_1 + X_{B_2}a_2 + \ldots + X_{B_m}a_m - \alpha a_k + \alpha a_k = b.$$

Pero a_k puede representarse como una combinación lineal de los vectores de la base. Se tiene entonces que

$$a_k = Y_{1k}a_1 + Y_{2k}a_2 + \ldots + Y_{mk}a_m$$

luego se tiene que

$$\sum_{i=1}^{m} X_{B_i}a_i - \alpha\sum_{i=1}^{m} Y_{ik}a_i + \alpha a_k = b$$

$$\sum_{i=1}^{m} (X_{B_i} - \alpha Y_{ik})a_i + \alpha a_k = b$$

Esta última expresión representa una solución factible, pero no básica puesto que las columnas de de A asociadas no son linealmente independiente. La función objetivo para esta solución es:

$$\hat{Z} = \sum_{i=1}^{m} c_{B_i}(X_{B_i} - \alpha Y_{ik}) + c_k\alpha$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_{B_i}X_{B_i} - \alpha\sum_{i=1}^{m} c_{B_i}Y_{ik} + c_k\alpha$$

$$= Z - \alpha z_k + c_k\alpha$$
$$= Z - \alpha(z_k - c_k).$$

SOLUCIONES OPTIMAS MULTIPLES

Existen problemas lineales que no tienen una solución óptima única, sino que al contrario, tienen un número infinito de soluciones. tal es el caso del siguiente programa lineal.

$$\text{Máx } Z = 5X_1 + 2X_2$$

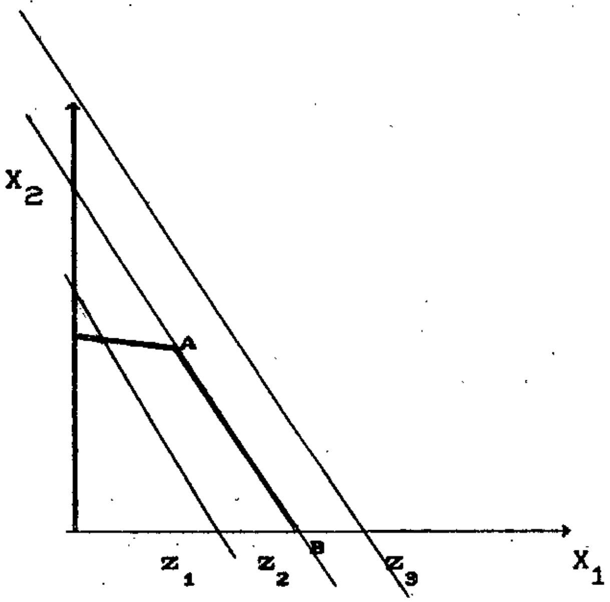
sujeto a

$$6X_1 + 10X_2 \leq 30$$
$$10X_1 + 4X_2 \leq 20$$

con

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0$$

cuya representación geométrica está dada a continuación



Como se ve en la figura, la función objetivo obtiene su valor óptimo cuando coincide con la arista AB de la región factible. La solución óptima se sigue obteniendo en un punto extremo, sólo que en este caso son dos puntos extremos, los óptimo a saber el punto A y el punto B. Cualquier combinación convexa de los puntos A y B, es también óptimo. De esta manera como hay una infinidad de puntos, existe una infinidad de soluciones óptimas, dando todas el mismo valor de la función objetivo.

El próximo teorema da las condiciones que permiten identificar soluciones óptimas múltiples en un tableau del método simplex.

$$\text{Máx } Z = 5X_1 + 2X_2$$

sujeto a

$$6X_1 + 10X_2 \le 30$$
$$10X_1 + 4X_2 \le 20$$

con

$$X_1 \ge 0, \quad X_2 \ge 0$$

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	
	1	-5	-2	0	0	0
a_3	0	6	10	1	0	30
a_4	0	$\boxed{10}$	4	0	1	20
	1	0	0	0	1/2	10
a_3	0	0	$\boxed{38/5}$	1	-6/10	18
a_1	0	1	2/5	0	1/10	2

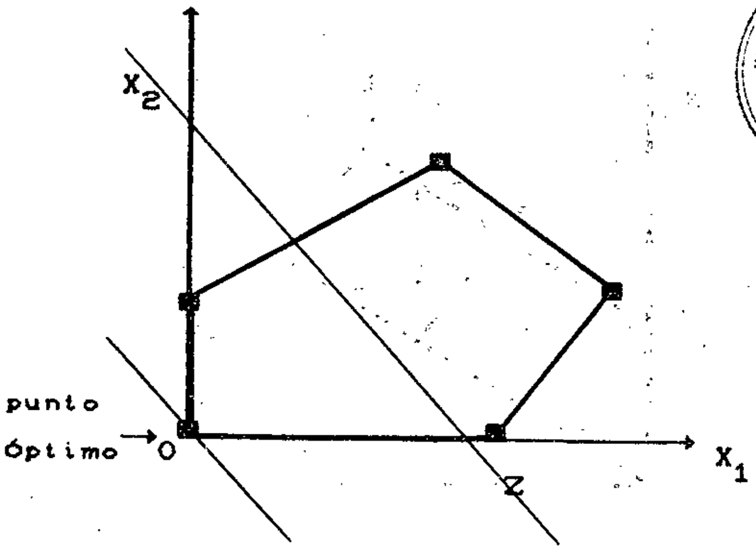
Como $z_2 - c_2 = 0$ y a_2 no está en la base $B = (a_3, a_1)$ y todas las demás $z_j - c_j > 0$, $j \in A$ se tiene una solución óptima múltiple. Sea un punto extremo óptimo el siguiente:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que da un valor óptimo de Z = 10. Para ver cuál sería el otro punto extremo se introduce a_2 a la base

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	
	1	0	0	0	1/2	0
a_2	0	0	1	5/38	-30/380	90/38
a_1	0	1	0	-1/19	125/950	20/19

Este tableau también es óptimo y corresponde a un punto extremo $\hat{X}$ cuyos componentes son



Los problemas de minimización interesantes son aquellos en donde el vector **b** no es necesariamente mayor o igual a **0**. Este tipo de problemas tienen la siguiente representación canónica

$$\text{Min } Z = c^t X$$

sujeto a

$$AX \geq b$$

con

$$X \geq 0$$

Con el objeto de ver cuáles son los problemas y los mecanismos de solución se toma el siguiente problema

$$\text{Min } Z = -3X_1 + 5X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 \quad\quad &\leq 4 \\ X_2 &\leq 6 \\ 3X_1 + 2X_2 &\geq 18 \end{aligned}$$

con

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$$

La región de factibilidad y la pendiente de la función objetivo se muestra a continuación restricción de que todas las variables, incluyendo las de holgura sean no-negativas. Se concluye que para problemas de minimización no triviales, el método simplex no trabaja. ¿Que modificaciones hay que hacerle al método simplex para resolver el problema?

Hay varias maneras de darle solución a este problema. Se describen a continuación dos, uno el *método* de *penalización* y el otro el *método de doble fase*.

METODO DE PENALIZACION

Teorema.- Si consideramos $\mathbf{M} = (\mu, \mu, \ldots, \mu)$, donde μ es una constante real, dependiendo el número de coordenadas de $\mathbf{M}$ del vector $\mathbf{W}$, entonces la solución óptima al problema

$$\text{Mín } Z = c^t\mathbf{X} + \mathbf{M}^t\mathbf{W}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} - \mathbf{Y} + \mathbf{W} = \mathbf{b}$$

con

$$\mathbf{X} \geq 0, \ \mathbf{Y} \geq 0, \ \mathbf{W} \geq 0$$

es también solución óptima al problema

$$\text{Mín } Z = c^t\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \geq \mathbf{b}$$

con

$$\mathbf{X} \geq 0$$

si y sólo si el vector $\mathbf{W} = 0$.

Demostración.- Dado el problema de minimización

$$\text{Mín } Z = c^t\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \geq \mathbf{b}$$

con

$$\mathbf{X} \geq 0$$

éste se puede escribir como

$$\text{Mín } Z = c^t\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} - \mathbf{Y} = \mathbf{b}$$

con

$$\mathbf{X} \geq 0, \ \mathbf{Y} \geq 0$$

dónde $\mathbf{Y}$ es un vector *superfluo* Este problema es igual a

con

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0,\ X_4 \geq 0,\ X_5 \geq 0$$

y ya introduciendo la *variable artificial* W_1,

$$\text{Máx } h = 3X_1 - 5X_2 - MW_1$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcl} X_1 + X_3 & = & 4 \\ X_2 + X_4 & = & 6 \\ 3X_1 + 2X_2 - X_5 + W_1 & = & 18 \end{array}$$

con

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0,\ X_4 \geq 0,\ X_5 \geq 0,\ W_1 \geq 0$$

que en forma de tableau da la siguiente estructura:

	h	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	W_1	
	1	-3	5	0	0	0	M	0
a_3	0	1	0	1	0	0	0	4
a_4	0	0	1	0	1	0	0	6
a_{W_1}	0	3	2	0	0	-1	1	18

Si se quiere que la base B esté compuesta de los vectores a_3, a_4, a_{W_1}, se necesita que a_{W_1} sea un vector unitario tipo e_3. Para eso se convierte $z_{W_1} - c_{W_1}$ en cero, mediante operaciones matriciales elementales. El siguiente tableau da la primera base y el primer punto extremo (básico y factible) del programa modificado. A partir de ahí se sigue aplicando el método simplex en forma normal hasta que las condiciones de optimalidad se cumplan.

que pueden afectar seriamente el resultado final óptimo. Por esta razón el *método penal* se ha substituido en la práctica por el *método de doble fase*.

METODO DE DOBLE FASE

En esencia s igual al *método penal*, en que primero se introducen las variables artificiales al problema original

$$\text{Min } Z = c^t X$$

sujeto a

$$AX \geq b$$

con

$$X \geq 0$$

quedando como

$$\text{Min } Z = c^t X$$

sujeto a

$$AX - Y + W = b$$

con

$$X \geq 0, \quad Y \geq 0, \quad W \geq 0$$

donde W es el vector de variables artificiales con componentes $(W_1, W_2, \ldots, W_p)$. En la primera fase se resuelve el problema

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{p} W_i$$

sujeto a

$$AX - Y + W = b$$

con

$$X \geq 0$$

La solución óptima de esta fase debe ser $W = 0$. Si al obtener las condiciones de optimalidad en esta fase $W > 0$, el problema original no tiene solución.

Supóngase que la primera fase es óptima, $W = 0$ y que la base asociada al tableau es B. En la segunda fase se aplica el método simplex para resolver el problema

$$\text{Min } c^t X$$

sujeto a

$$B^{-1}AX - B^{-1}Y = B^{-1}b$$
$$X \geq 0, \quad Y \geq 0$$

	W_1	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
	1	0	0	0	0	0	0
a_3	0	1	0	1	0	0	4
a_4	0	0	1	0	1	0	6
a_{W_1}	1	3	2	0	0	-1	18

Para tener el primer punto extremo se requiere que los vectores de la base sean unitarios. Por lo tanto se convierte a_{W_1}, en vector unitario e_3

	W_1	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
	0	-3	-2	0	0	1	-18
a_3	0	$\boxed{1}$	0	1	0	0	4
a_4	0	0	1	0	1	0	6
a_{W_1}	1	3	2	0	0	-1	18
	0	0	-2	3	0	1	-6
a_1	0	1	0	1	0	0	4
a_4	0	0	1	0	1	0	6
a_{W_1}	1	0	$\boxed{2}$	-3	0	-1	6
	1	0	0	0	0	0	0
a_1	0	1	0	1	0	0	4
a_4	-1/2	0	0	3/2	1	1/2	3
a_2	1/2	0	1	-3/2	0	-1/2	3

Esta es la solución óptima a la fase uno, y como $W = 0$ el problema original tiene solución. Para empezar la fase dos, tómese todo el tableau óptimo anterior, únicamente ignorando la columna a_{W_1} (que ya no se necesita) y el renglón de los $z_j - c_j$. Sustitúyase ese renglón por la función objetivo original.

$$\text{Mín } Z = -3X_1 + 5X_2$$

o equivalentemente

$$X = \left[\begin{array}{c} X_B \\ \hline X_N \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} X_1 \\ X_4 \\ X_2 \\ \hline X_3 \\ X_5 \\ W_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 3 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

y

$$h = -Z = -3 \quad \text{o} \quad Z = 3$$

Este es el método utilizado en los programas de biblioteca de las computadoras electrónicas.

Ejercicio. Resolver el siguiente problema de programación lineal

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 2X_2 - X_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 4X_1 - 2X_2 + X_3 &\le 5 \\ X_1 \qquad\quad + X_3 &= 12 \\ -2X_1 + X_2 + X_3 &\ge 1 \end{aligned}$$

con

$$X_1 \ge 0, \quad X_2 \ge 0, \quad X_3 \ge 0$$

PROBLEMAS SIN SOLUCION

Tanto el método de *penalización* y el de *doble fase* permiten identificar cuando un programa lineal no tiene solución. Los problemas lineales no tienen solución cuando sus restricciones son inconsistentes. Tal es el caso del siguiente programa.

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 2X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\le 2 \\ X_1 + X_2 &\ge 4 \end{aligned}$$

con

$$X_1 \ge 0, \quad X_2 \ge 0$$

cuya representación gráfica se da a continuación.

PROBLEMAS DEGENERADOS Y LAS REGLAS LEXICOGRAFICAS

Se ha mencionado anteriormente que al existir un empate en decidir que vector entra a la base, éste puede romperse arbitrariamente sin ningún efecto considerable en el número de iteraciones del método simplex. En cambio un empate en el vector de salida no puede decidirse arbitrariamente porque se puede *ocasionar un ciclaje* tal, que nunca se obtenga la solución óptima. Por ejemplo, se analiza el siguiente problema lineal donde en la primera iteración se pueden seleccionar como vector de salida tanto a_5 como a_6. Seleccionando a_5 causa un ciclaje, tal como se ve a continuación.

$$\text{Max } Z = 3/4X_1 - 20X_2 + 1/2X_3 - 6X_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 1/4X_1 - 8X_2 - X_3 + 9X_4 &\leq 0 \\ 1/2X_1 - 12X_2 - 1/2X_3 + 3X_4 &\leq 0 \\ X_3 &\leq 1 \end{aligned}$$

con

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0,\ X_4 \geq 0$$

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
	1	-3/4	20	1/2	6	0	0	0	0
a_5	0	$\boxed{1/4}$	-8	-1	9	1	0	0	0 ←
a_6	0	1/2	-12	-1/2	3	0	1	0	0
a_7	0	0	0	1	0	0	0	1	1
	1	0	-4	-7/2	33	3	0	0	0
a_1	0	1	-32	-4	36	4	0	0	0
a_6	0	0	$\boxed{4}$	3/2	-15	-2	1	0	0 ←
a_7	0	0	0	1	0	0	0	1	1
	1	0	0	-2	18	1	1	0	0
a_1	0	1	0	$\boxed{8}$	-84	-12	8	0	0 ←
a_2	0	0	1	3/8	-15/4	-1/2	1/4	0	0
a_7	0	0	0	1	0	0	0	1	1

continúa el tableau.

El *ciclaje* que conduce al punto inicial de partida se debe a lo degenerado de las soluciones factibles básicas. Para evitar este tipo de problemas se usan las llamadas *reglas lexicográficas.*
Definición.- Un vector es lexicográficamente positivo si la primera componenete diferente de cero es positiva. Un vector lexicográficamente positivo se escribe $X \succ 0$.
Ejemplo.

$$X = (0.3,-2,9) \succ 0$$

$$Y = (108,-3,12) \succ 0$$

$$Z = (0,0,-3,12) \text{ no es} \succ 0$$

Definición. Un vector X es lexicográficamente mayor que otro vector Y, si el vector $X - Y \succ 0$.
Ejemplo.

$$X = (0,3,-2)$$

$$Y = (1,2,2)$$

entonces

$$Y - X = (1,-1,4) \succ 0$$

pero

$$X - Y = (-1,1,-4) \text{ no es} \succ 0.$$

Aplicando las reglas lexicográficas para romper un empate en decidir qué vector sale de la base, al usar el criterio

$$\frac{X_{B_r}}{Y_{rk}} = \underset{i=1,\ldots m}{\text{Mín}} \left\{ \frac{X_{B_i}}{Y_{ik}} \Big/ Y_{ik} \geq 0 \right\}$$

se tienen los siguientes pasos.
Paso 1. Arregle el tableau tal que los primeros m vectores del tableau sean los de la base B.
Paso 2. Calcúle el mínimo de los siguientes cocientes.

$$\underset{i=1,\ldots m}{\text{Mín}} \left\{ \frac{X_{B_i}}{Y_{ik}} \Big/ Y_{ik} \geq 0 \right\}.$$

Si el mínimo es único, por ejemplo $i=r$, entonces X_{B_r} sale de la base. En el caso contrario, constrúyase un conjunto de índices $I_1 \subseteq I$ (donde I es el conjunto de índices de todas las columnas que están en la base) formado por todos los índices para los

$$\text{Máx } Z = cX$$

sujeto a

$$AX \le b$$

con

$$X \ge 0$$

que se denomina el *problema primario*, se define la siguiente estructura (D_1)

$$\text{Mín } G = b^t Y$$

sujeto a

$$A^t Y \ge c^t$$

con

$$Y \ge 0$$

que se denomina el *problema dual*.

ejemplo. Consideremos el siguiente problema de programación lineal primal

$$\text{Máx } Z = 2X_1 + X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 + 5X_2 &\le 10 \\ X_1 + 3X_2 &\le 6 \\ 2X_1 + 2X_2 &\le 8 \end{aligned}$$

con

$$X_1 \ge 0,\ X_2 \ge 0,\ \cancel{X_3 \ge 0}$$

el dual correspondiente sería

$$\text{Mín } G = 10Y_1 + 6Y_2 + 8Y_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} Y_1 + Y_2 + 2Y_3 &\ge 2 \\ 5Y_1 + 3Y_2 + 2Y_3 &\ge 1 \end{aligned}$$

con

$$Y_1 \ge 0,\ Y_2 \ge 0,\ Y_3 \ge 0$$

De lo anterior podemos observar que, si el primal tiene m restricciones y n variables, entonces, el dual tiene n restricciones y m incognitas. De ahí que un problema de dos restricciones y cualquier número de variables puede ser resuelto en forma gráfica a través del dual.

Ejercicios

1.- Demuéstrese que tanto el programa primario como el dual, del

$$\text{Máx } Z = cX$$

sujeto a

$$AX = b$$

con

$$X \geq 0$$

Supóngase que la matriz de coeficientes tecnológicos A se ha particionado en una base B y el complemento de la partición N. Es decir

$$A = (B/N)$$

entonces el programa primario anterior puede escribirse

$$\text{Máx } Z = c_B X_B + c_N X_N$$

sujeto a

$$BX_B + NX_N = b$$

con

$$X_B \geq 0, \; X_N \geq 0$$

La solución de este problema, como ya se sabe, consiste en hacer al vector X_N que no está en la base igual a cero y resolver el vector básico X_B en términos de la base B, es decir, $X_B = B^{-1}b$. La función objetivo se convierte entonces en

$$Z = c_B B^{-1} b$$

por otra parte la función objetivo dual es

$$b^t Y = Y^t b$$

En condiciones de optimalidad, la función objetivo primaria es igual a la función objetivo dual, es decir

$$\hat{c}_B \hat{X}_B = \hat{c}_B \hat{B}^{-1} b = \hat{Y}^t b$$

donde $\hat{B}^{-1}$ es la inversa de la base óptima $\hat{B}$, $\hat{c}_B$ es el vector de los precios unitarios correspondientes al vector básico óptimo $\hat{X}_B = (\hat{X}_B = \hat{B}^{-1}b)$ y $\hat{Y}$ es el vector dual óptima. De la última igualdad se concluye por analogía em ambos lados de la igualdad que

$$\hat{Y}^t = \hat{c}_B \, \hat{B}^{-1}$$

La estructura inicial de un programa lineal, al aplicar el método simplex es

con

$$Y_1 \geq 0, \quad Y_2 \geq 0$$

Se tienen que hallar los valores óptimos de X_1 y X_2 que resuelven el problema (P) así como los valores óptimos Y_1 y Y_2 que resuelven (D). Se tiene también que comprobar que en el punto ótimo Z = G.

El tableau inicial correspondiente alproblema (P) es

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	
	1	-4	-3	0	0	0
a_3	0	2	3	1	0	18
a_4	0	$\boxed{4}$	2	0	1	10 ←
	1	0	-1	0	1	10
a_3	0	0	2	1	-1/2	13
a_1	0	1	$\boxed{1/2}$	0	1/4	5/2 ←
	1	2	0	0	3/2	15
a_3	0	-4	0	1	-3/2	3
a_2	0	2	1	0	1/2	5

$$\hat{X} = \left[\begin{array}{c} X_B \\ \hline X_N \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} X_3 \\ X_2 \\ \hline X_1 \\ X_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

$$\hat{Z} = 15$$

La solución óptima del problema dual es $\hat{Y} = (\hat{Y}_1, \hat{Y}_2)$ donde

$$\hat{Y}_1 = z_3 - c_3 = 0$$

$$\hat{Y}_2 = z_4 - c_4 = 3/2$$

A continuación se comprueba que la solución dual es factible y óptima. Comprobando en las restricciones duales se tiene

Paso 2. Se utilizan operaciones matriciales elementales en cada iteración para hacer todos los elementos $z_j - c_j$, j en **B** igual a cero y convertir a la base **B** de m por m en una matriz identidad. El lado derecho del tableau identifica en cada iteración al punto extremo, dado por $X_B = B^{-1}b$ y éste vector debe ser no-negativo. Si al empezar el proceso iterativo no se puede tener una base cuya estructura corresponde a una matriz identidad, se agregan tantos vectores artificiales como sea necesario.

Paso 3. El vector a_k que se selecciona para entrar a la base es aquel cuya $z_j - c_j$, j no en **B**, sea el más nagativo. El vector a_r que sale de la base se selecciona en base a una regla que asegura que se mantiene $X_B = B^{-1}b \geq 0$.

Paso 4. La columna a_k se convierte en el vector unitario e_r con la componente Y_{rk} (llamado pivote), igual a uno. Estos cambios que convierten al vector a_k en el vector e_r, se llevan a cabo mediante operaciones matriciales elementales. Se repite el paso 3, hasta que todos los elementos $z_j - c_j \geq 0$ para todo j en **A**.

Es importante hacer notar que en todas las iteraciones del método simplex,se mantiene la factibilidad primaria, es decir, que $X_B = B^{-1}b \geq 0$, y que al alcanzar optimalidad $z_j - c_j \geq 0$ para toda j en **A**. La solución óptima presenta factibilidad primaria y factibilidad dual.

Para ver que $z_j - c_j \geq 0$ j en **A**, -significa factibilidad dual- se observa lo siguiente:

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j$$

$$= Y^t a_j - c_j$$

si $z_j - c_j \geq 0$, para toda j en **A**, eso significa que

$$Y^t a_j - c_j \geq 0, \quad \forall\, j \in A$$

$$Y^t a_j \geq c_j \quad \forall\, j \in A$$

o en notación condensada

$$Y^t A \geq c \quad \text{o} \quad A^t Y \geq c^t$$

que es precisamente la factibilidad dual.

Así como en el método simplex se requiere que en cada iteración exista factibilidad primaria, es decir $X_B = B^{-1}b \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
-3X_1 - X_2 + X_3 &= -3 \\
-4X_1 - 3X_2 + X_4 &= -6 \\
-X_1 - 2X_2 + X_5 &= -3
\end{aligned}
$$

con

$$X_1 \geq 0,\quad X_2 \geq 0,\quad X_3 \geq 0,\quad X_4 \geq 0,\quad X_5 \geq 0$$

El primer tableau es

	h	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
	1	2	1	0	0	0	0
a_3	0	-3	-1	1	0	0	-3
a_4	0	-4	$\boxed{-3}$	0	1	0	-6 ←
a_5	0	-1	-2	0	0	1	-3

Nótese que existe factibilidad dual, pués todas las $z_j - c_j \geq 0$ $\forall$ j $\in$ A. La solución actual no es óptima pues $X_B \leq 0$. Se selecciona el vector a_4 como el vector que sale, pués $X_{B_4} = -6$ es el más negativo.

Para seleccionar al vector que entra se usa la regla

$$\frac{z_k - c_k}{Y_{B_4k}} = \underset{j=1,\dots,n}{\text{Máx}} \left\{ \frac{z_j - c_j}{Y_{B_4j}} \;\Big/\; Y_{B_4j} < 0 \right\}$$

$$= \text{Máx} \left\{ \frac{2}{-4} \quad \frac{1}{-3} \right\}$$

$$= \text{Máx } (-0.5,\ -0.33) = -0.33,$$

y por lo tanto a_2 entra a la base. El pivote es el elemento Y_{B_42} o sea el Y_{22}. El vector a_2 se convierte en la columna unitaria con un uno en la posición del pivote. Esto se logra con operaciones matriciales elementales que generan el siguiente tableau *método de penalización* y al *método de doble fase*, es que primero no se requiere del uso de variables artificiales y segundo se utilizan mucho menos iteraciones. La desventaja de este método con respecto a los dos anteriores es que se requiere para empezar a iterar, la condición de factibilidad dual, es decir $z_j - c_j \geq 0$, para toda j en A.

ANALISIS DE SENSIBILIDAD Y PROGRAMACION PARAMETRICA

Una vez que se halla resuelto un programa de preogramación lineal, puede darse el caso de que uno o varios parámetros de la formulación original, tales como los precios unitarios o la disponibilidad de ciertos recursos cambien, dando origen a un nuevo problema. ¿Es necesario en ese volver a resolver el problema desde el principio?.

La respuesta es, afortunadamente no. Se dice afortunadamente, porque en términos de iteraciones y por consiguiente en tiempo de computadora existen métodos, llamados de *análisis de sensibilidad*, que permiten ahorrar muchas iteraciones, al resolver el nuevo problema partiendo de la solución óptima del problema original. El ahorrar iteraciones implica un ahorro considerable en los costos de utilización de una computadora.

El nuevo problema puede diferir del original en uno o varios de los siguientes cambios que pueden ocurrir simultáneamente.

a) Cambios en el vector b, o sea cambios en la disponibilidad de recursos.

b) Cambios en el vector c, o sea cambios en los precios o costos unitarios.

c) Cambios en la matriz A, o sea cambios en los coeficientes tecnológicos a_{ij}.

d) Cambios en el vector X, o sea cambios en el número de actividades, cuyo nivel debe decidirse.

e) Cambios en el número de restricciones del sistema lineal a optimizarse.

Los primeros tres cambios pueden pueden ocurrir en forma *discreta o continua*. El cambio discreto tanto en los vectores b, c o en los elementos a_{ij} de A, significa que una o varias componentes originales de dichos vectores o matriz son

El tableau óptimo puede escribirse como

z_1-c_1 $z_2-c_2 \dots z_n-c_n$		$z_{n+1}-c_{n+1} \dots z_{n+m}-c_{n+m}$	
1	$\Pi A - c$	Π	$Z=c_BX_B$
0	$B^{-1}A$	B^{-1}	$X_B=B^{-1}b$

El análisis de sensibilidad se basará en el manejo de esta última estructura. Se analiza a continuación cada uno de los cambios.

a) Cambio del vector b.

Supóngase que el problema original (PO), cuya solución óptima se tiene a la mano, es

$$\text{Máx } Z = c\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$$

con

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

Se cambiará en forma discreta el vector **b**, cuyo nuevo valor será **b** + Δ**b**, donde Δ**b** es un vector con m componentes. El nuevo problema (PN) a resolver es

$$\text{Máx } Z = c\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$$

con

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

El análisis de sensibilidad para este tipo de cambio toma como punto de partida la solución óptima de (PO). Supóngase que B^{-1} es la inversa de la base óptima asociada a (PO). Entonces la solución óptima de (PO) es

$$\mathbf{X}_B = B^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

y

$$Z = c_B\mathbf{X}_B$$

Al cambiar **b** a **b** + Δ**b**, el vector $\mathbf{X}_B$ cambia a uno nuevo $\hat{\mathbf{X}}_B$ dado por

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	
	1	-5	-3	0	0	0
a_3	0	3	5	1	0	15
a_4	0	5	2	0	1	10

y como el lector podrá corroborar, el tableau óptimo resulta ser

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	
	1	0	0	5/19	16/19	235/19
a_2	0	0	1	5/19	-3/19	45/19
a_1	0	1	0	-2/19	5/19	20/19

o sea

$$X = \left(\frac{X_B}{X_N} \right) = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_1 \\ \hline X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45/19 \\ 20/19 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z = 235/19$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 5/19 & -3/19 \\ -2/19 & 5/19 \end{bmatrix}$$

Supóngase que por una depresión económica el número de empleados debe reducirse a 5 y el costo máximo de producción a \$5/hora. El nuevo vector de disponibilidad de recursos es

$$b + \Delta b = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

el nuevo programa lineal a resolver sería

$$\text{Máx } Z = 5X_1 + 3X_2$$

sujeto a

$$3X_1 + 5X_2 \leq 5$$
$$5X_1 + 2X_2 \leq 5$$

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 3X_2$$

sujeto a

$$3X_1 + 5X_2 \leq 10$$
$$5X_1 + 2X_2 \leq 20$$

con

$$X_1 \geq 0, \; X_2 \geq 0$$

Utilizando el análisis de sensibilidad se tiene que

$$\hat{X}_B = B^{-1}(b + \Delta b)$$

$$= \begin{bmatrix} 5/19 & -3/19 \\ -2/19 & 5/19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10/19 \\ 80/19 \end{bmatrix} \ngeq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto se hace necesario utilizar el dual simplex para restaurar la la factibilidad y obtener optimalidad del nuevo programa. Utilizando el tableau óptimo del programa original, con la nueva columna $\hat{X}_B$ se tiene

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	
	1	0	0	5/19	16/19	370/19
a_2	0	0	1	5/19	$\boxed{-3/19}$	-10/19
a_1	0	1	0	-2/19	5/19	80/19
	1	0	16/3	80/57	0	50/3
a_4	0	0	-19/3	-5/3	1	10/3
a_1	0	1	-5/3	1/3	0	10/3

La nueva solución es producir

X_1 = 10/3 litros del producto químico A por hora

X_2 = 0 litros del producto químico B por hora

generando una utilidad óptima de

$$z_j - (c_j + \Delta c_j) = c_B B^{-1} a_j - (c_j + \Delta c_j)$$
$$= \Pi\, a_j - (c_j + \Delta c_j)$$

donde a_j es la columna j de la matriz A.

Se sabe que en condiciones de optimalidad $z_j - (c_j + \Delta c_j)$ deben ser no-negativa para cualquier $j \in A$ y $j \notin B$, y debe ser cero para cualquier $j \in B$. Si esas dos condiciones se cumplen, la X_B asociada al tableau óptimo de (PO) permanece óptimo y el nuevo valor de la función objetivo será

$$Z = (c_B + \Delta c_B) X_B.$$

En caso contrario se deberá primero hacer la $z_j - (c_j + \Delta c_j)$ igual a cero, para $j \in B$, mediante operaciones elementales y después obtener las condiciones de optimalidad, $z_j - c_j \geq 0$, $j \in A$ y $j \notin B$, mediante el método simplex.

Ejemplo.- Tómese como problema original el siguiente

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 3X_2$$

sujeto a

$$3X_1 + 5X_2 \leq 15$$
$$5X_1 + 2X_2 \leq 10$$

con

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$$

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	
	1	0	0	5/19	16/19	235/19
a_2	0	0	1	5/19	-3/19	45/19
a_1	0	1	0	-2/19	5/19	20/19

Supóngase que el precio unitario del producto químico B, se reduce de \$3 a \$1. El nuevo problema lineal es

$$\text{Max } Z = 5X_1 + X_2$$

sujeto a

$$3X_1 + 5X_2 \leq 15$$
$$5X_1 + 2X_2 \leq 10$$

con

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$$

Nótese que

$$X = \begin{bmatrix} X_B \\ \hline X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_1 \\ \hline X_2 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z = 10$$

El lector podrá comprobar en efecto que la solución satisface las restricciones del problema.

Ejemplo.- Supóngase que el precio de ambos productos químicos es de $1. El nuevo programa a resolver sería

$$\text{Max } Z = X_1 + X_2$$

sujeto a

$$3X_1 + 5X_2 \leq 15$$
$$5X_1 + 2X_2 \leq 10$$

con

$$X_1 \geq 0, \; X_2 \geq 0$$

El nuevo vector $c + \Delta c$ es

$$c + \Delta c = (5,3,0,0,) + (-4,-2,0,0)$$
$$= (1,1,0,0)$$

o sea que sólo $z_1 - c_1$ y $z_2 - c_2$ han cambiado a

$$z_1 - (c_1 + \Delta c_1) = \Pi\, a_1 - (c_1 + \Delta c_1)$$
$$= (5/19, 16/19) \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - 1 = 4$$

$$z_2 - (c_2 + \Delta c_2) = \Pi\, a_2 - (c_2 + \Delta c_2)$$
$$= (5/19, 16/19) \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 = 2$$

Como tanto el vector a_1 y a_2 están en la base óptima correspondiente a (PO), la $z_1 - (c_1 + \Delta c_1)$ y $z_2 - (c_2 + \Delta c_2)$ deben ser cero. Los vectores unitarios a_1 y a_2 se restablecen del tableau

Supónga que el precio de la primera actividad es \$6. El nuevo problema a resolver es

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 5X_2$$

sujeto a

$$X_1 \leq 4$$
$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

con

$$X_1 \geq 0, \; X_2 \geq 0$$

El nuevo vector $c + \Delta c$ es

$$c + \Delta c = (3,5,0,0) + (3,0,0,0)$$
$$= (6,5,0,0),$$

y la única $z_j - c_j$ que cambia es

$$z_1 - (c_1 + \Delta c_1) = \Pi\, a_1 - (c_1 - \Delta c_1)$$

$$= (0,5/2)\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 6 = 3/2$$

el nuevo tableau quedaría

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	
	1	3/2	0	0	5/2	45
a_3	0	1	0	1	0	4
a_2	0	3/2	1	0	1/2	9

y por lo tanto es óptimo. Como se ve en este ejemplo, al cambiar el precio unitario de X_1 (que no es básico) de \$3 a \$6, no ha cambiado la solución óptima que es

$$X = \begin{bmatrix} X_B \\ \hline X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_2 \\ \hline X_1 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z = 45$$

La razón es muy sencilla. Como X_1 no es básico, su nivel de utilización es de cero. El cambio hecho en su precio unitario no es lo suficientemente atractivo para que el nivel de utilización de X_1 se incremente de su valor cero.

$$X = \begin{bmatrix} X_B \\ \hline X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \hline X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z = 55$$

Nótese que un cambio en el precio unitario en X_1 de \$3 a \$10, hace primero, que sea conveniente producir X_1 a un nivel de 4 unidades y segundo, que se reduzca el nivel de producción de X_2 de 9 unidades a 3, con un incremento en la utilidad de 45 a 55 unidades.

c) Cambio de un coeficiente tecnológico a_{ij} cuando j no es basico.

Unicamente se va a tratar en esta sección el cambio discreto de uno o varios coeficientes tecnólogicos asociados a variables no básicas. En el caso de que se trate de una variable básica, se recomienda que se resuelva el nuevo problema desde el principio.

Un cambio en las componentes del vector a_j, $j \in N$ ocasiona un cambio en el término $z_j - c_j$, $j \in N$ puesto que

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j$$
$$= \Pi\, a_j - c_j$$

Si el vector a_j se cambia por uno nuevo $\hat{a}_j$, el nuevo término $\hat{z}_j - \hat{c}_j$ sería

$$\hat{z}_j - \hat{c}_j = \Pi\, \hat{a}_j - c_j.$$

Mientras este término sea no-negativo, la solución óptima asociada con (PO) sigue siendo óptima. En caso contrario, es decir, que $\hat{z}_j - \hat{c}_j < 0$, $j \in N$, hay que aplicar el método simplex, para obtener la nueva solución óptima de (PN) teniendo cuidado que el vector Y_j del tableau óptimo de (PO) sea actualizado por otro $\hat{Y}_j$, donde $\hat{Y}_j = B^{-1}\hat{a}_j$.

Ejemplo.- Sea el problema original el siguiente

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 5X_2$$

sujeto a

es óptimo, y la solución óptima (PO) continúa siendo la solución óptima de (PN), o sea

$$X = \begin{pmatrix} X_B \\ \hline X_N \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_2 \\ \hline X_1 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z = 45$$

Ejemplo. – Supóngase que en el problema original (PO) anterior, el vector $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, se cambia a $a_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$. El problema a resolver es

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 5X_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 10X_1 \qquad\quad &\le 4 \\ X_1 + 2X_2 &\le 18 \end{aligned}$$

con

$$X_1 \ge 0, \; X_2 \ge 0$$

El nuevo elemento $z_1 - c_1$ sería

$$\hat{z}_1 - \hat{c}_1 = \Pi \, \hat{a}_1 - c_1$$

$$= (0, 5/2) \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 = -1/2$$

como $\hat{z}_1 - \hat{c}_1 = -1/2 < 0$ hay que aplicar el método simplex teniendo cuidado de actualizar el vector $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$ del tableau óptimo de (PO) por otro nuevo $\hat{Y}_1$, dado por

$$\hat{Y}_1 = B^{-1}\hat{a}_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

El método simplex se aplica al siguiente tableau, que difiere del tableau óptimo de (PO) en el término $z_1 - c_1$ y en la columna Y_1.

$$X_1 \geq 0, \; X_2 \geq 0$$

¿Conviene producir una nueva actividad X_5 *cuyo precio unitario es \$7 y su vector de coeficientes* $a_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

El nuevo problema a resolver es

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 5X_2 + 7X_5$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 \qquad\quad + X_5 &\leq 4 \\ 3X_1 + 2X_2 + 2X_5 &\leq 18 \end{aligned}$$

con

$$X_1 \geq 0, \; X_2 \geq 0, \; X_5 \geq 0$$

El nuevo elemento $z_5 - c_5$ es

$$\begin{aligned} z_5 - c_5 &= \Pi \, a_5 - c_5 \\ &= (0, 5/2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 7 = -2 \end{aligned}$$

y como resulta negativo hay que calcular la columna Y_5 del nuevo tableau dado por

$$\begin{aligned} Y_5 &= B^{-1} a_5 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

aplicando el método simplex resulta el siguiente tableau

	Z	X_1	X_2	X_5	X_3	X_4	
	1	9/2	0	-2	0	5/2	45
a_3	0	1	0	1	1	0	4
a_2	0	3/2	1	1	0	1/2	9
	1	13/2	0	0	2	5/2	53
a_5	0	1	0	1	1	0	4
a_2	0	1/2	1	0	-1	1/2	5

La nueva solución óptima es que la actividad X_5 debe el caso de maximización (minimización), para que X_j, $j \in N$ se convierta de una actividad no básica a básica.

Ejemplo. - Supónga el problema

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 3X_2$$

sujeto a

$$3X_1 + 5X_2 \leq 10$$
$$5X_1 + 2X_2 \leq 20$$

con

$$X_1 \geq 0, \ X_2 \geq 0$$

cuyo tableau óptimo es

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	
	1	0	16/3	5/3	0	50/3
a_1	0	1	5/3	1/3	0	10/3
a_4	0	0	-19/3	-5/3	1	10/3

o sea

$$X_1 = 10/3, \quad X_2 = 0 \quad y \quad Z = 50/3$$

Si $X_2 = 1$ el nuevo valor de la función objetivo es

$$\hat{Z} = Z - (z_2 - c_2)$$
$$= 50/3 - 16/3 = 34/3$$

Por otra parte, si se quiere que en la solución óptima X_2 sea básico, el precio unitario de X_2 debe aumentarse de \$5 a

$$\hat{c}_2 = c_2 + (z_2 - c_2)$$
$$= 3 + 16/3$$
$$= 25/3$$

e) Adición de nuevas restricciones

Si al añadir k (k≥0) nuevas restricciones del tipo

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \ \substack{\leq \\ >} \ b_i \qquad i = m+1, \ldots, m+k$$

al problema original (PO), la solución óptima X_B asociada a (PO) las satisface, entonces X_B es también solución óptima del nuevo problema. Por el contrario, si X_B viola alguna de las k nuevas restricciones, habrá que restablecer la factibilidad del

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 3X_2$$

sujeto a

$$3X_1 + 5X_2 \le 15$$
$$5X_1 + 2X_2 \le 10$$
$$X_2 \le 1$$

con

$$X_1 \ge 0, \; X_2 \ge 0$$

añadiendo las variables de holgura se tiene

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 3X_2$$

sujeto a

$$3X_1 + 5X_2 + X_3 = 15$$
$$5X_1 + 2X_2 + X_4 = 10$$
$$X_2 + X_5 = 1$$

con

$$X_1 \ge 0, \; X_2 \ge 0, \; X_3 \ge 0, \; X_4 \ge 0, \; X_5 \ge 0$$

en términos del tableau óptimo de (PO) se tiene que

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
	1	0	0	5/19	16/19	0	235/19
a_2	0	0	1	5/19	-3/19	0	45/19
a_1	0	1	0	-2/19	5/19	0	20/19
a_5	0	0	1	0	0	1	1

Reestructurando el vector unitario e_2, por medio de operaciones matriciales elementales da el siguiente tableau.

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
	1	0	0	5/19	16/19	0	235/19
a_2	0	0	1	5/19	-3/19	0	45/19
a_1	0	1	0	-2/19	5/19	0	20/19
a_5	0	0	0	-5/19	3/19	1	-26/19

Aplicando el método dual simplex se obtiene el tableau óptimo

cambios continuos de los precios unitarios, h es un vector con n
* componentes. Se restringe el estudio de al caso en que $\alpha \geq 0$, puesto que para el caso $\alpha < 0$, todos los resultados que se obtengan serán análogos.

Cuando el vector paramétrico $c + \alpha h$ varía, el elmento $z_j - c_j$ para toda $j \in A$, también varía. Para analizar esta variación, se establece la siguiente notación. Sea B_o la base óptima asociada al problema arriba mencionado, para $\alpha = 0$, es decir

$$\text{Max } Z = cX$$

sujeto a

$$AX \leq b$$

con

$$X \geq 0$$

entonces el nuevo valor de $z_j - c_j$, denotado por $\hat{z}_j - \hat{c}_j$ es

$$\begin{aligned}\hat{z}_j - \hat{c}_j &= (c_{B_o} + \alpha h_{B_o}) B_o^{-1} a_j - (c_j + \alpha h_j) \text{ para } j \in A \\ &= c_{B_o} B_o^{-1} a_j - c_j + \alpha (h_{B_o} B_o^{-1} a_j - h_j) \\ &= (z_j - c_j) + \alpha (h_{B_o} B_o^{-1} a_j - h_j)\end{aligned}$$

donde c_{B_o}, h_{B_o} son las componentes de c y h asociadas a la base B_o.

¿Existe algún valor crítico de α, digamos α^*, tal que para valores mayores que α^*, la base B_o dejaría de ser óptima?.

Para contestar esta pregunta se analiza el término $\hat{z}_j - \hat{c}_j$. Como la optimalidad para cualquier valor de α se obtiene cuando $\hat{z}_j - \hat{c}_j \geq 0$, para toda $j \in A$, y sabiendo que $z_j - c_j \geq 0 \ \forall j \in A$, porque B_o es ótimo para $\alpha = 0$, queda únicamente pendiente analizar el segundo término de $\hat{z}_j - \hat{c}_j$, es decir

$$h_{B_o} B_o^{-1} a_j - h_j$$

se concluye

a) Si $(h_{B_o} B_o^{-1} a_j - h_j) \geq 0$, para todo $j \in A$ entonces la base B_o, correspondiente al tableau óptimo del programa lioneal con $\alpha = o$, sigue siendo óptimo para cualquier valor de $\alpha \geq 0$.

b) De lo contrario, si existe alguna $j \in A$ para la cuál su

Ejemplo. - Considere el siguiente problema paramétrico

$$\text{Max } Z = (3 - 6\alpha)X_1 + (2 - 2\alpha)X_2 + (5 + 5\alpha)X_3$$

sujeto a

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \le 430$$
$$3X_1 + 2X_3 \le 460$$
$$X_1 + 4X_2 \le 420$$

con

$$X_1 \ge 0, \; X_2 \ge 0, \; X_3 \ge 0$$

nótese que $c = (c_1, c_2, c_3) = (3,2,5)$ y $h = (h_1, h_2, h_3) = (-6,-2,5)$ para $\alpha = 0$, el problema se convierte en

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

sujeto a

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \le 430$$
$$3X_1 + 2X_3 \le 460$$
$$X_1 + 4X_2 \le 420$$

con

$$X_1 \ge 0, \; X_2 \ge 0, \; X_3 \ge 0$$

cuyo tableau inicial y óptimo, como podrá corroborar el lector, es respectivamente

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
	1	-3	-2	-5	0	0	0	0
a_4	1	1	2	1	1	0	0	430
a_5	0	3	0	2	0	1	0	460
a_6	0	1	4	0	0	0	1	420

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
	1	4	0	0	1	2	0	1350
a_4	0	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
a_5	0	3/2	0	1	0	1/2	0	230
a_6	0	2	0	0	-2	1	1	20

Los resultados óptimos para $\alpha = 0$ son

$$\alpha^* = -\frac{z_4 - c_4}{h_{B_o} B_o^{-1} a_4 - h_4}$$

$$= -\frac{1}{-1}$$

$$= 1$$

Entonces, para valores de α comprendidos en el rango $0 \leq \alpha < 1$, se tienen los siguientes resultados óptimos

$$X^* = \left[\frac{X_{B_o}}{X_{N_o}}\right] = \left[\begin{array}{c} X_2 \\ X_3 \\ X_6 \\ \hline X_1 \\ X_4 \\ X_5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 100 \\ 230 \\ 20 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

y

$$Z^* = (c_{B_o} + \alpha h_{B_o}) X_{B_o}$$

$$= (c_2 + \alpha h_2, c_3 + \alpha h_3, c_6 + \alpha h_6) \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_6 \end{bmatrix}$$

$$= (2-2\alpha,\ 5+5\alpha,\ 0+0\alpha) \begin{bmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$= 1350 - 950\alpha$$

Por ejemplo para $\alpha = 1/2$, el valor de la función objetivo será

$$Z = 1350 - 950(1/2) = 875$$

Se analiza si existe algún otro rango de α dado por $\alpha^* \leq \alpha < \alpha^* + \alpha^{**}$. Para eso en el tableau óptimo correspondiente a $\alpha = 0$, se actualizan los $z_j - c_j$, para todo j en $\mathbb{N}$, y se introduce inmediatamenete el vector a_4 aplicando el método simplex, tal como se muestra a continuación:

$$\hat{z}_1 - \hat{c}_1 = z_1 - c_1 + \alpha^*(h_{B_o} B_o^{-1} a_1 - h_1) = 4 + 1(14) = 18$$

$$\hat{z}_4 - \hat{c}_4 = z_4 - c_4 + \alpha^*(h_{B_o} B_o^{-1} a_4 - h_4) = 1 + 1(-1) = 0$$

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para ver si existe una α^{**} se calcula

$$h_{B_1} B^{-1} N_1 - h_{N_1} = (h_4, h_3, h_6) B^{-1} (a_1, a_2, a_5) - (h_1, h_2, h_5)$$

$$= (0,5,0) \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} - (-6,-2,0)$$

$$= (27/2, 2, 5/2)$$

o sea

$$h_{B_1} B_1^{-1} a_1 - h_1 = 27/2$$

$$h_{B_1} B_1^{-1} a_2 - h_2 = 2$$

$$h_{B_1} B_1^{-1} a_5 - h_5 = 5/2$$

y como no hay $h_{B_1} B_1^{-1} a_j - h_j$, para $j \in \mathbb{N}$, menor que cero, entonces α^{**} es igual a infinito.

En resumen para valores de α, comprendidos en el rango $0 \leq \alpha < 1$, la solución óptima es

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 100, \quad X_3 = 230, \quad X_4 = 0, \quad X_5 = 0, \quad X_6 = 20$$

y

$$Z = 1350 - 950\alpha \qquad 0 \leq \alpha < 1,$$

y para valores de α, en el rango $1 \leq \alpha < \infty$ se tiene como solución óptima

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 230, \quad X_4 = 200, \quad X_5 = 0, \quad X_6 = 420$$

y

$$Z = 1150 - 1150\alpha \qquad 0 \leq \alpha < \infty$$

Cambios continuos en el vector b.

El problema a resolver es el siguiente

$$\text{Max } Z = c\mathbf{X}$$

sujeto a

Para el valor $\beta = \beta^*$, se puede obtener una nueva solución factible básica usando el método dual simplex uan vez actualizado X_{B_0} y Z^*, para $\beta = \beta^*$, en el tableau óptimo asociado a B_0. Al obtener una nueva solución óptima X_{B_1}, correspondiente a una nueva base B_1, el análisis para determinar un segundo valor crítico de β, por ejemplo β^{**}, es similar. El rango de análisis en este caso sería $\beta^* \le \beta \le \beta^* + \beta^{**}$.

Ejemplo.- Considérese el siguiente problema paramétrico

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + X_3 &\le 430 + 100\beta \\ 3X_1 + \qquad 2X_3 &\le 460 - 200\beta \\ X_1 + 4X_2 \qquad &\le 420 + 400\beta \end{aligned}$$

con

$$X_1 \ge 0, \quad X_2 \ge 0, \; X_3 \ge 0$$

donde

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{bmatrix}, \qquad \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ -200 \\ 400 \end{bmatrix}$$

Para $\beta = 0$ el problema se convierte en

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + X_3 &\le 430 \\ 3X_1 + \qquad 2X_3 &\le 460 \\ X_1 + 4X_2 \qquad &\le 420 \end{aligned}$$

con

$$X_1 \ge 0, \quad X_2 \ge 0, \; X_3 \ge 0$$

cuyo tableau óptimo es

$$\beta^* = \left[\frac{-X_{B_o2}}{B_o^{-1}\delta_2} \right]$$

$$= \left[\frac{-230}{-100} \right] = 2.3$$

Esto quiere decir que para el rango $0 \le \beta \le 2.3$ La solución óptima está dada por

$$X_{B_o} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_6 \end{bmatrix} = B_o^{-1}(b + \beta\delta)$$

$$= B_o^{-1}b + \beta B_o^{-1}\delta$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 430 \\ 460 \\ 420 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 100 \\ -100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 100 + 100\beta \\ 230 - 100\beta \\ 20 \end{bmatrix}$$

y el valor de la función objetivo queda expresado por

$$Z^* = c_{B_o} X_{B_o}, \quad 0 \le \beta \le 2.3$$

$$= (c_2, c_3, c_6) \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_6 \end{bmatrix}$$

$$= (2,5,0) \begin{bmatrix} 100 + 100\beta \\ 230 - 100\beta \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$= 1350 - 300\beta$$

con

$$X \geq 0$$

donde $\hat{A}$ difiere de la matriz original A únicamente en una columna no-básica, la j, donde

$$\hat{a}_j = a_j + \theta\gamma_j \qquad j \in N$$

$a_j \in A$, $-\infty < \theta < \infty$, y γ_j es un vector columna con m componentes. De nuevo se restringe el análisis al caso en que $\theta \geq 0$ puesto que en el caso contrario, $\theta < 0$, los resultados que se obtienen son análogos.

A diferencia del análisis de parametrización de los vectores c y b, en este caso, una vez que se calcule un valor crítico de θ, por ejemplo θ^*, el análisis no puede continuarse para valores de $\theta > \theta^*$, puesto que $\hat{a}_j$ se convierte de vector no-básico (para $0 \leq \theta \leq \theta^*$) a un vector básico (para $\theta > \theta^*$).

Con esta advertencia se continúa el análisis paramétrico de un vector tecnológico no-básico. Sea de nuevo B_o la base óptima asociada al problema anterior con $\theta = 0$, es decir

$$\text{Max } Z = cX$$

sujeto a

$$AX \leq b$$

con

$$X \geq 0$$

Un cambio paramétrico en el vector $\hat{a}_j$, $j \in N$ ocasiona que $\hat{z}_j - \hat{c}_j$ se modifique de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
z_j - c_j &= c_{B_o} B_o^{-1}\hat{a}_j - c_j \\
&= c_{B_o} B_o^{-1}(a_j + \theta\gamma_j) - c_j \\
&= c_{B_o} B_o^{-1} a_j - c_j + \theta c_{B_o} \bar{B}_o^{-1}\gamma_j \\
&= z_j - c_j + \theta c_{B_o} \bar{B}_o^{-1}\gamma_j \qquad\qquad j \in N
\end{aligned}$$

Si $\hat{z}_j - \hat{c}_j \geq 0$ para toda $j \in N$ y para cualquier valor de $\theta > 0$, entonces B_o sigue siendo óptimo. En caso contrario, es decir si existe alguna $j \in N$,para el cual $\hat{z}_j - \hat{c}_j < 0$, entonces

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
	1	4	0	0	1	2	0	1350
a_2	0	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	100
a_3	0	3/2	0	1	0	1/2	0	230
a_6	0	2	0	0	-2	1	1	20

los resultados óptimos para $\theta = 0$ son

$$X^* = \left(\frac{X_{B_o}}{X_{N_o}}\right) = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_6 \\ \hline X_1 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z^* = 1350$$

Para determinar si existe un valor crítico θ^*, se calcula $c_{B_o}B_o^{-1}\gamma_j$, para toda $j \in N$, que sufra un cambio paramétrico, en este caso $j = 1$,

$$c_{B_o}B_o^{-1}\gamma_1 = (c_2,c_3,c_6)B_o^{-1}\gamma_1$$

$$= (2,5,0)\begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= -1$$

por lo que

$$\theta^* = \left(\frac{-(z_1 - c_1)}{c_{B_o}B_o^{-1}\gamma_1}\right) = 4$$

Se puede entonces resumir que para valores de θ, comprendidos en el rango $0 \le \theta \le 4$, la solución óptima es $X_2 = 100$, $X_3 = 230$, $X_6 = 20$, $X_1 = X_4 = X_5 = 0$ y $Z^* = 1350$.