CONTENIDOS

Capítulo 1

Sistemas de Ecuaciones Lineales y Algunas Aplicaciones Matriciales

Resumen. Se presenta en la sección 1 un sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas, que modela dos movimientos rectilineos. El ánimo permanente es presentar los sistemas de ecuaciones asociados a modelos. En la segunda sección se analiza un sistema lineal simple de dos ecuaciones y dos incógnitas, de forma tal de hacer una primera introducción de determinante asociada a la idea adyacente geométrica que existe entre dos rectas (o son paralelas o se cruzan en un punto), y de esta manera se establece la relación entre el valor del determinante respecto del cero para saber si el sistema tiene solución o no. En la sección 3 se analiza la solubilidad de un sistema lineal más amplio, en base al desarrollo del método de Gauss (Gauss-Jordan o Gauss-Seidel), y aquí se aprovecha el espacio para introducir la matriz ampliada, presentando su notación y evitando innecesarias complicaciones de las transformaciones elementales por filas. Se entrega el concepto de equivalencia de matrices aferrada a la idea intuitiva que las matrices ampliadas son equivalentes por filas porque ambas tienen la misma solución. En la sección 4 se formaliza la notación compacta matricial de un sistema de ecuaciones lineales, y de esta forma se presenta el primer producto "natural" entre una matriz y un vector.

Finalmente en la sección 5 se presentan modelos de aplicación para las matrices donde es necesario tener presente el producto entre una matriz y un vector, y una buena dosis de intuición. Estos modelos están orientados al crecimiento de poblaciones simples o de laboratorios, a la Economía y a la Teoría de Grafos, este último como puente de contacto a las aplicaciones en otras ciencias (en particular la Teoría de Probabilidades). Cada sección finaliza con una lista de ejercicios que apuntan a fortalecer las nociones entregadas en cada una de ellas y es absolutamente conveniente hacerlos, puesto que a menudo algunos de estos ejercicios entregan información relevante.

1. Movimientos rectilíneos con velocidades constantes

Supongamos que la trayectoria de un móvil, que se mueve con velocidad constante de $2\frac{m}{seg}$, está dada por la función:

$$\mathbf{S}_1(t_1) = 2t_1 + 3 \tag{1.1}$$

donde $\mathbf{S}_1(t_1)$ denota el desplazamiento o la distancia recorrida por el móvil en el instante de tiempo t_1; la distancia está medida en metros y el tiempo en segundos. Por otro lado, tenemos un móvil que se desplaza a una velocidad constante de $3\frac{m}{seg}$, y cuya trayectoria está modelada por la función:

$$\mathbf{S}_2(t_2) = 3t_2 + 1 \tag{1.2}$$

es claro que ambas funciones tienen sentido para $t_i \geq 0$. Donde para cada valor de t_i la distancia recorrida por cada móvil está univocamente definida. Por ejemplo para $t_1 = t_2 = 3$ la distancia recorrida por el primer móvil es de $\mathbf{S}_1(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$ [metros], y para el segundo móvil es de $\mathbf{S}_2(3) = 3 \cdot 3 + 1 = 10$ [metros].

Podemos realizar un gráfico tiempo versus distancia para ambas situaciones (ver el gráfico 1). Vamos a plantear la siguiente pregunta: ¿Para qué tiempo ambos móviles han recorrido la misma distancia? Esta pregunta se puede formular del siguiente modo: ¿Para qué valor de t se tiene que $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2$? Esto es, se trata de resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 2t + 3 \\ \mathbf{S} &= 3t + 1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

$y = x - 7$, por lo tanto cualquier par de números (x,y) que satisfaga la igualdad $y = x - 7$ es solución del sistema (2.2), como por ejemplo $(1,-6),(0,-7),(3,-4),\ldots$ En definitiva se puede concluir que el sistema tiene infinitas soluciones.

Estudiemos el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ 2x - 2y &= 13 \end{aligned} \tag{2.3}$$

si multiplicamos la primera ecuación por 2 entonces se tiene que $2x - 2y = 14$, y esto contradice la segunda ecuación. Luego no habrá ningún par de valores (x,y) que satisfaga simultaneamente ambas ecuaciones del sistema (2.3). Se concluye entonces que este sistema no tiene solución.

Desde un punto de vista geométrico es fácil explicar los resultados de los sistemas anteriores. Hagamos notar que las ecuaciones de estos sistemas representan rectas. La solución del sistema (2.1) es un punto que está en ambas rectas. Si estas rectas no son paralelas entonces se deben cortar en un punto (de intersección). Si son paralelas entonces o nunca se cruzan (no tienen puntos en común), o bien ambas representan la misma recta. El primer caso está representado en el sistema (2.3) y el segundo caso por el sistema(2.2). Todo este razonamiento se ilustra en la figura 2.1.

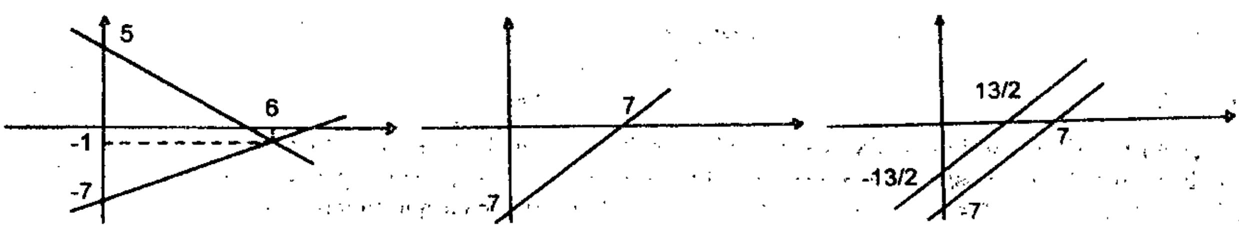


gráfico 2.1

Ahora vamos a estudiar un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas más general. Sea

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por el momento vamos a suponer que los coeficientes que acompañan a las variables son distintos de cero, esto significa que vamos a dejar de lado sistemas de la forma:

$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 4 \\ 2x &= 8 \end{aligned}$$

puesto que en este caso se obtiene inmediatamente el valor de x y se reemplaza en la primera acuación para obtener el valor de y.

Supongamos entonces que los valores de a_{ij} son distintos de cero. Efectuemos las siguientes operaciones: Multipliquemos la primera ecuación por a_{22}, y la segunda por a_{12}, entonces nos queda el sistema equivalente†:

† *Dos sistemas son equivalentes si cualquier solución de uno es solución del otro, y viceversa.*

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Finalicemos esta sección con el siguiente ejemplo

$$det \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = -24 - (-3) = -21$$

EJERCICIOS 2

1. ¿Para qué valor, o para qué valores, de la constante α el siguiente sistema de cuaciones lineales no tiene soluciones? ¿tiene infinitas soluciones?

$$\begin{array}{rcrcl} \mathbf{x} & - & \mathbf{y} & = & 3 \\ 2\mathbf{x} & - & 2\mathbf{y} & = & \alpha \end{array}$$

2. En los problemas del 1 al 12 encuentre todas las soluciones (en caso de que existan) de los sistemas. En cada caso calcule el determinante del sistema

(1) $\begin{array}{rcrcr} \mathbf{x} & - & 3\mathbf{y} & = & 4 \\ -4\mathbf{x} & + & 2\mathbf{y} & = & 6 \end{array}$ (2) $\begin{array}{rcrcr} 2\mathbf{x} & - & \mathbf{y} & = & -3 \\ 5\mathbf{x} & + & 7\mathbf{y} & = & 4 \end{array}$ (3) $\begin{array}{rcrcr} 2\mathbf{x} & - & 8\mathbf{y} & = & 5 \\ -3\mathbf{x} & + & 12\mathbf{y} & = & 8 \end{array}$

(4) $\begin{array}{rcrcr} 2\mathbf{x} & - & 8\mathbf{y} & = & 6 \\ -3\mathbf{x} & + & 12\mathbf{y} & = & -9 \end{array}$ (5) $\begin{array}{rcrcr} 6\mathbf{x} & + & \mathbf{y} & = & 3 \\ -4\mathbf{x} & - & \mathbf{y} & = & 8 \end{array}$ (6) $\begin{array}{rcrcr} 3\mathbf{x} & + & \mathbf{y} & = & 0 \\ 2\mathbf{x} & - & 3\mathbf{y} & = & 0 \end{array}$

(7) $\begin{array}{rcrcr} 4\mathbf{x} & - & 6\mathbf{y} & = & 0 \\ -2\mathbf{x} & + & 3\mathbf{y} & = & 0 \end{array}$ (8) $\begin{array}{rcrcr} 5\mathbf{x} & + & 2\mathbf{y} & = & 3 \\ 2\mathbf{x} & + & 5\mathbf{y} & = & 3 \end{array}$ (9) $\begin{array}{rcrcr} 2\mathbf{x} & + & 3\mathbf{y} & = & 4 \\ 3\mathbf{x} & + & 4\mathbf{y} & = & 5 \end{array}$

(10) $\begin{array}{rcrcl} a\mathbf{x} & - & b\mathbf{y} & = & c \\ a\mathbf{x} & - & b\mathbf{y} & = & c \end{array}$ (11) $\begin{array}{rcrcl} a\mathbf{x} & + & b\mathbf{y} & = & c \\ b\mathbf{x} & + & a\mathbf{y} & = & c \end{array}$ (12) $\begin{array}{rcrcl} a\mathbf{x} & - & b\mathbf{y} & = & c \\ b\mathbf{x} & + & a\mathbf{y} & = & d \end{array}$

3. Halle condiciones para **a** y **b** tales que el sistema del problema 10, del ejercicio anterior, tenga una solución única.

4. Halle condiciones para **a**, **b** y **c** de tal manera que el sistema del problema 11, del ejercicio 2, tenga un número infinito de soluciones.

5. Halle condiciones para **a**, **b** y **c** tales que el sistema del problema 12, del ejercicio 2, no tenga solución.

6. Hallar el punto de intersección (si existe) para cada par de rectas dadas

(a) $\mathbf{x} - \mathbf{y} = 7$; $2\mathbf{x} + 3\mathbf{y} = 1$

(b) $\mathbf{y} - 2\mathbf{x} = 4$; $4\mathbf{x} - 2\mathbf{y} = 6$

(c) $4\mathbf{x} - 6\mathbf{y} = 7$; $6\mathbf{x} - 9\mathbf{y} = 12$

(d) $4\mathbf{x} - 6\mathbf{y} = 10$; $6\mathbf{x} - 9\mathbf{y} = 15$

(e) $3\mathbf{x} + \mathbf{y} = 4$; $\mathbf{y} - 5\mathbf{x} = 2$

(f) $3\mathbf{x} + 4\mathbf{y} = 5$; $6\mathbf{x} - 7\mathbf{y} = 8$

7. En un zoológico hay aves (dos pies) y bestias (cuatro pies). Si en el zoológico hay 60 cabezas y 200 pies, ¿cuántas aves y cuántas bestias hay?

8. Calcule el determinante de cada una de las siguientes matrices que se indican

$$\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{x} & + & 2\mathbf{y} & + & 3\mathbf{z} & = & 9 \\ & & \mathbf{y} & + & 2\mathbf{z} & = & 4 \\ & & & - & \mathbf{z} & = & -3 \end{array} \tag{3.6}$$

en este nuevo sistema equivalente a (3.1) multiplicamos la tercera ecuación por -1 y se tiene

$$\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{x} & + & 2\mathbf{y} & + & 3\mathbf{z} & = & 9 \\ & & \mathbf{y} & + & 2\mathbf{z} & = & 4 \\ & & & & \mathbf{z} & = & 3 \end{array} \tag{3.7}$$

Observemos que hemos llegado a un punto en que resulta fácil obtener la solución para este sistema, puesto que en (3.7) se tiene una solución para **z**, y de este modo reemplazamos este valor en la segunda ecuación y asíobtener el valor para **y**, y con estos dos valores se logra el valor para **x** mediante la primera ecuación. Sin embargo vamos a continuar haciendo operaciones entre las ecuaciones para llegar a un sistema equivalente más simple. En (3.7) multiplicamos la tercera ecuación por -2 y la sumamos a la segunda y nos queda

$$\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{x} & + & 2\mathbf{y} & + & 3\mathbf{z} & = & 9 \\ & & \mathbf{y} & + & & = & -2 \\ & & & & \mathbf{z} & = & 3 \end{array} \tag{3.8}$$

ahora multiplicamos por -3 la tercera ecuación y la sumamos a la primera

$$\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{x} & + & 2\mathbf{y} & + & & = & 0 \\ & & \mathbf{y} & + & & = & -2 \\ & & & & \mathbf{z} & = & 3 \end{array} \tag{3.9}$$

finalmente multiplicamos la segunda ecuación por -2 y la sumamos a la primera, obteniendo el sistema

$$\begin{array}{rrrcr} \mathbf{x} & & & = & 4 \\ & \mathbf{y} & & = & -2 \\ & & \mathbf{z} & = & 3 \end{array} \tag{3.10}$$

En definitiva hemos llegado del sistema (3.1) al sistema equivalente (3.10), donde en este último la solución es evidente, a saber $\mathbf{x} = 4$, $\mathbf{y} = -2$, $\mathbf{z} = 3$. Notemos que si reemplazamos estos valores en el sistema (3.1) se tiene la igualdad, en efecto

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2 \cdot 4 & + & 4 \cdot (-2) & + & 6 \cdot 3 & = & 18 \\ 4 \cdot 4 & + & 5 \cdot (-2) & + & 6 \cdot 3 & = & 24 \\ 3 \cdot 4 & + & 1 \cdot (-2) & - & 2 \cdot 3 & = & 4 \end{array}$$

Con este ejemplo queremos entregar la mecánica de la eliminación de Gauss-Jordan. Nótese que el sistema (3.10) es equivalente a escribir

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1 \cdot \mathbf{x} & + & 0 \cdot \mathbf{y} & + & 0 \cdot \mathbf{z} & = & 4 \\ 0 \cdot \mathbf{x} & + & 1 \cdot \mathbf{y} & + & 0 \cdot \mathbf{z} & = & -2 \\ 0 \cdot \mathbf{x} & + & 0 \cdot \mathbf{y} & + & 1 \cdot \mathbf{z} & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 2z & = & 4 \\ & & & & z & = & 3 \end{array} \tag{3.7'}$$

En este punto iniciaremos un proceso de retroceso, esto es, con el 1 de la tercera fila haremos un barrido hacia arriba a fin de producir ceros sobre este,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & & & = & -2 \\ & & & & z & = & 3 \end{array} \tag{3.8'}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & & & = & 0 \\ & & y & & & = & -2 \\ & & & & z & = & 3 \end{array} \tag{3.9'}$$

finalmente efectuamos el último barrido hacia arriba con el 1 de la segunda fila,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & 4 \\ & & y & & & = & -2 \\ & & & & z & = & 3 \end{array} \tag{3.10'}$$

Lo expresado en el lado izquierdo desde (3.1') hasta (3.10') intenta entregar un modo operacional para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Desarrollaremos otro ejemplo. Sea el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2 \cdot x_2 & + & 3 \cdot x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 3 \cdot x_1 & + & 2 \cdot x_2 & + & x_3 & + & 4 \cdot x_4 & = & 7 \\ & & 2 \cdot x_2 & + & 4 \cdot x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2 \cdot x_3 & + & 2 \cdot x_4 & = & 3 \end{array} \tag{3.11}$$

ahora llevaremos este sistema a la matriz ampliada, que es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & | & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & | & 3 \end{pmatrix}$$

si multiplicamos la primera fila por -3 y la sumamos con la segunda obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 0 & -4 & -8 & 1 & | & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & | & 3 \end{pmatrix}$$

multiplicamos la primera fila por -1 y la sumamos con la cuarta

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

la cuarta fila la multiplicamos por $\frac{1}{4}$ y la sumamos con la segunda;

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

la tercera fila la multiplicamos por -2 y la sumamos a la segunda.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

finalmente multiplicamos la cuarta fila por -1, la tercera por -3, la segunda por -2 y la sumamos simultaneamente con la primera fila, nos queda

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

entonces podemos concluir que la solución del sistema (3.11) es:

$$\mathbf{x}_1 = \frac{5}{2}; \quad \mathbf{x}_2 = -\frac{1}{2}; \quad \mathbf{x}_3 = \frac{1}{2}; \quad \mathbf{x}_4 = 0$$

y estos valores se pueden reemplazar en el sistema (3.11) para su comprobación

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5/2 & + & 2\cdot(-1/2) & + & 3\cdot(1/2) & + & 0 = 3 \\ 3\cdot(5/2) & + & 2\cdot(-1/2) & + & 1/2 & + & 4\cdot 0 = 7 \\ & + & 2\cdot(-1/2) & + & 4\cdot(1/2) & + & 0 = 1 \\ 5/2 & + & (-1/2) & + & 2\cdot(1/2) & + & 2\cdot 0 = 3 \end{array}$$

Con estos dos ejemplos esperamos dejar en claro la mecánica del método de Gauss-Jordan, donde lo esencial es hacer transformaciones adecuadas entre las filas (ecuaciones) de la matriz aumentada (del sistema). Ahora bien, se hace necesaria una notación abreviada para denotar estas transformaciones que de desde ahora las llamaremos **operaciones elementales de filas**. Estas operaciones son:

i) $\mathbf{F}_{ij}$: que significa intercambiar la i-ésima fila por la j-ésima fila.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 3 & 6 & | & 32 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{23}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 20 \end{pmatrix}$$

De esta última matriz se deduce el sistema que es equivalente al presentado en (3.12):

$$\begin{array}{rcrcrcl} \mathbf{x} & + & 2\mathbf{y} & + & 3\mathbf{z} & = & 9 \\ 0\cdot\mathbf{x} & + & \mathbf{y} & + & 2\mathbf{z} & = & 4 \\ 0\cdot\mathbf{x} & + & 0\cdot\mathbf{y} & + & 0\cdot\mathbf{z} & = & 20 \end{array}$$

es claro que de la última ecuación se obtiene la contradicción de que $0 = 20$, por lo tanto no existen números $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ que satisfagan el sistema (3.12).

Ahora veremos un ejemplo en que un sistema de ecuaciones tendrá infinitas soluciones. Estudiemos el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\mathbf{x} & + & 4\mathbf{y} & + & 6\mathbf{z} & = & 18 \\ 4\mathbf{x} & + & 5\mathbf{y} & + & 6\mathbf{z} & = & 24 \\ 2\mathbf{x} & + & 7\mathbf{y} & + & 12\mathbf{z} & = & 30 \end{array} \tag{3.13}$$

procediendo de la manera anterior llevamos este sistema a la forma ampliada, y aplicamos las formas equivalentes sucesivas según el método de Gauss,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 18 \\ 4 & 5 & 6 & | & 24 \\ 2 & 7 & 12 & | & 30 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 4 & 5 & 6 & | & 24 \\ 2 & 7 & 12 & | & 30 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_{12}(-4),F_{13}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & -3 & -6 & | & -12 \\ 0 & 3 & 6 & | & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 3 & 6 & | & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{23}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

y esta última matriz nos conduce a un sistema equivalente al (3.13), a saber

$$\begin{array}{rcrcl} \mathbf{x} & & - \mathbf{z} & = & 1 \\ & \mathbf{y} & + 2\mathbf{z} & = & 4 \end{array}$$

de modo que podemos concluir que:

$$\mathbf{x} = 1 + \mathbf{z} \quad ; \quad \mathbf{y} = 4 - 2\mathbf{z}$$

esto significa que tendremos infinitos valores que satisfacen el sistema (3.13), basta dar un valor arbitrario a $\mathbf{z}$ y obtendremos valores respectivos para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Por ejemplo si $\mathbf{z} = 0$ entonces una de las soluciones es $\mathbf{x} = 1$, $\mathbf{y} = 4$, $\mathbf{z} = 0$. Otra solución es $\mathbf{x} = 2$, $\mathbf{y} = 2$, $\mathbf{z} = 1$. En general si $\mathbf{z} = \mathbf{a}$ entonces la solución general es:

de donde se concluye que

$$\mathbf{x} = -5 - \mathbf{z} \quad \mathbf{y} = -9 \quad \mathbf{w} = 16$$

y como se observa existen infinitas soluciones que dependerán del valor que tenga $\mathbf{z}$. En particular si $\mathbf{z} = 0$ se tiene la solución $\mathbf{x} = -5$, $\mathbf{y} = -9$, $\mathbf{z} = 0$, $\mathbf{w} = 16$, y se puede comprobar que esta solución particular satisface las ecuaciones del sistema (3.13).

EJERCICIOS 3

1. Realice las siguientes operaciones elementales que se indican para cada matriz:

$\mathbf{F_{13}(-1), F_3(2)}$ para la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

y $\mathbf{F_{12}(2), F_{13}(3), F_{14}(4)}$ para la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 5 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

2. Una matriz cuadrada de orden $\mathbf{n \times n}$ se define de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

en esta matriz genérica, el elemento a_{ij} se llama **entrada (i,j)**, siempre que este valor se encuentre en la i-ésima fila y la j-ésima columna. Se llama **diagonal principal** de esta matriz a los elementos $\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$. Ahora bien, se dice que esta matriz es **sobretriangular** si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$ (esto está significando que todos los elementos o entradas bajo la diagonal son ceros). Lo que se pide ahora es que para las siguientes matrices cuadradas que se entregan a continuación se lleven a una matriz sobretriangular, mediante transformaciones elementales por fila

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \\ 7 & 10 & 14 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & a & a & \varepsilon \\ 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Resuelva a través del método de eliminación de Gauss los siguientes sistemas

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 4y & + & 6z & = & 18 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 24 \\ 2x & + & 7y & + & 12z & = & 30 \end{array} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 30 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Ax=b}}$$

La matriz (de diseño) $\mathbf{A}$ tiene tres filas, que representan el número de ecuaciones del sistema, y tiene tres columnas, que representan el número de incógnitas del sistema; el vector $\mathbf{x}$ es, en rigor, una matriz de tres filas y una columna. Ahora bien, el "producto" $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$ está indicando que el resultado es otra matriz, digamos $\mathbf{b}$, de tres filas y una columna. La insinuación de un producto de este tipo es de la siguiente forma: Se toma la primera fila de la matriz de diseño y se multiplica cada componente con cada componente del vector $\mathbf{x}$, y se suman estos productos, y se continua de la misma forma para las filas restantes. En el ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = 2 \cdot \mathbf{x} + 4 \cdot \mathbf{y} + 6 \cdot \mathbf{z}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = 4 \cdot \mathbf{x} + 5 \cdot \mathbf{y} + 6 \cdot \mathbf{z}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = 2 \cdot \mathbf{x} + 7 \cdot \mathbf{y} + 12 \cdot \mathbf{z}$$

luego el resultado es

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \mathbf{x} + 4 \cdot \mathbf{y} + 6 \cdot \mathbf{z} \\ 4 \cdot \mathbf{x} + 5 \cdot \mathbf{y} + 6 \cdot \mathbf{z} \\ 2 \cdot \mathbf{x} + 7 \cdot \mathbf{y} + 12 \cdot \mathbf{z} \end{pmatrix}$$

y este producto $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$ debe ser igual al vector (o matriz) $\mathbf{b}$. Y es bastante intuitivo que dos matrices (o dos vectores) son iguales* si tienen las mismas dimensiones y las entradas respectivas son iguales. Esto significa que si

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot \mathbf{x} + 4 \cdot \mathbf{y} + 6 \cdot \mathbf{z} \\ 4 \cdot \mathbf{x} + 5 \cdot \mathbf{y} + 6 \cdot \mathbf{z} \\ 2 \cdot \mathbf{x} + 7 \cdot \mathbf{y} + 12 \cdot \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 30 \end{pmatrix}$$

* En la terminología matemática de la década del 60 se establece del siguiente modo la igualdad entre matrices: Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ una matriz de $m \times n$ y $\mathbf{B} = (b_{ij})_{p \times q}$ una matriz de $p \times q$, entonces

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \iff m = p, n = q \quad \text{y} \quad a_{ij} = b_{ij} \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots n\}$$

Y es en esta década en que la llamada "matemática moderna" trae consigo la confusión de **rigurosidad** con **formalismo**.

EJERCICIOS 4

1. Encuentre la matriz de diseño, el vector de incógnitas y el vector de constantes para cada uno de los siguientes sistemas:

$$(a)\ \begin{array}{rcrcrcl} -\mathbf{x} & + & \mathbf{y} & & & = & 0 \\ 2\mathbf{x} & - & \mathbf{y} & + & 5\mathbf{z} & = & 2 \\ \mathbf{x} & + & 5\mathbf{y} & - & 5\mathbf{z} & = & 1 \\ \mathbf{x} & + & \mathbf{y} & + & \mathbf{z} & = & 2 \end{array} \qquad (b)\ \begin{array}{rcrcrcl} \mathbf{x} & + & 3\mathbf{y} & + & 9\mathbf{z} & -2 & = 0 \\ \mathbf{x} & + & \mathbf{y} & - & 2\mathbf{z} & & = 50 \end{array}$$

2. Realice cada uno de los siguientes productos que se indican:

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \qquad (b)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (c)\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(d)\begin{pmatrix} 3 & -7 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3. El producto "escalar" o producto "punto" entre dos vectores de constantes o vectores de variables que tengan el mismo número de componentes se define de la siguiente forma:

$$\text{sean } \overrightarrow{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ y } \overrightarrow{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ entonces}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_i & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_i b_i + \cdots + a_n b_n$$

observemos que, en rigor, el vector del lado izquierdo de la segunda igualdad es una matriz de 1 fila por n columnas; también notemos que el resultado es un número real o si se prefiere, una matriz de una fila y una columna. Con esta definición calcule los productos escalares $\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}$, donde

$$(a)\ \overrightarrow{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\ \overrightarrow{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \overrightarrow{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\ \overrightarrow{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (c)\ \overrightarrow{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \overrightarrow{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

generación siguiente, la clase del 0. Ahora bien, cada clase de edad tiene una tasa de nacimiento b_i, esto significa que cada clase contribuirá con nuevos individuos dados por:

$b_0N_0(t)$ Contribución de la población 0

$b_1N_1(t)$ Contribución de la población 1

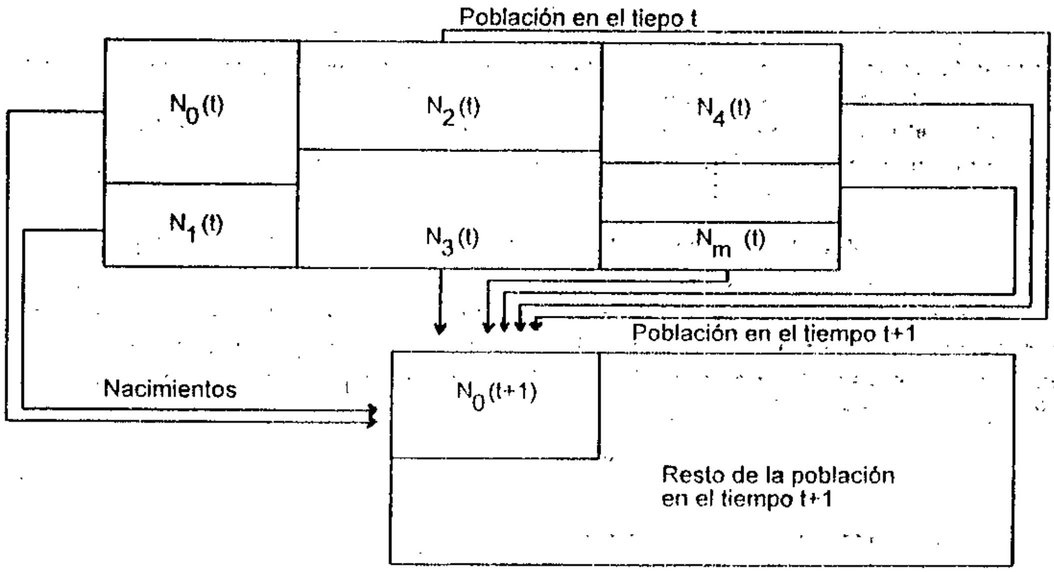
$\vdots$

$b_mN_m(t)$ Contribución de la población m

luego es claro que el número total de individuos de la clase o edad 0, en la generación $t+1$, está dada por la suma de estas contribuciones, esto es:

$$N_0(t+1) = b_0N_0(t) + b_1N_1(t) + \cdots + b_mN_m(t)$$

Este "proceso de nacimiento" se puede visualizar en el siguiente diagrama:



Nota: La tasa de nacimiento para este modelo está usada en el sentido de un promedio del número de nacimientos entre t y $t+1$, y que sobreviven hasta $t+1$.

¿Cuál es la situación en el tiempo $t+1$ para las restantes clasificaciones? La respuesta parece simple. Fijemos el número $N_{i+1}(t+1)$, el número de individuos que tienen $i+1$ años en el tiempo $t+1$, este número se formará exclusivamente por los individuos que en el tiempo t tienen i años y han "cumplido un nuevo año de vida" (en $t+1$), es decir por aquellos que no han muerto. Supongamos que la tasa de mortalidad para cada clasificación i está dada por d_i, donde este valor representa la fracción (comprendido entre 0 y 1) de la población que no sobrevive, por ejemplo $d_1 = 0.10$ significa que el 10% de la población de edad 1, en t, no sobrevive para la generación $t+1$. Se tiene entonces que

$$N_{i+1}(t+1) = \begin{pmatrix} \text{los que había con } i \text{ años} \\ \text{en el tiempo } t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{los que mueren con } i \text{ años} \\ \text{en el tiempo } t \end{pmatrix}$$

Supongamos ahora que para el tiempo $t = 0$ conocemos la población inicial $N(0)$, entonces para $t = 1$ se tiene

$$N(1) = A \cdot N(0)$$

y en forma recursiva,

$$N(2) = A \cdot N(1) = A \cdot (A \cdot N(0))$$

$$N(3) = A \cdot N(2) = A \cdot (A \cdot N(1)) = A \cdot (A \cdot (A \cdot N(0)))$$

$$\vdots$$

$$N(n) = A \cdot N(n-1) = A \cdot (A \cdot (A \cdots (A \cdots (A(N(0)))) \cdots))$$

Consideremos una cierta especie de lagartija† en la cual ninguna de ellas alcanza los tres años y solamente las especies de 1 año reproducen. Esto significa entonces que existen tres clasificaciones por edad. Sea

$$N_0(t) = \text{lagartijas menores de 1 año}$$

$$N_1(t) = \text{lagartijas de 1 año de edad}$$

$$N_2(t) = \text{lagartijas de 2 años de edad}$$

y supongamos que las tasas de nacimiento para cada edad son $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ respectivamente. Y las tasas de muerte son, para la edad 0 $d_0 = \frac{1}{2}$; y para la edad 1 $d_1 = \frac{1}{2}$. Notemos que todas las lagartijas mueren antes de los tres años. Luego conforme a lo establecido se tiene lo siguiente

$$\begin{pmatrix} N_0(t+1) \\ N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ 1-d_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-d_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ N_2(t) \end{pmatrix}$$

esto es

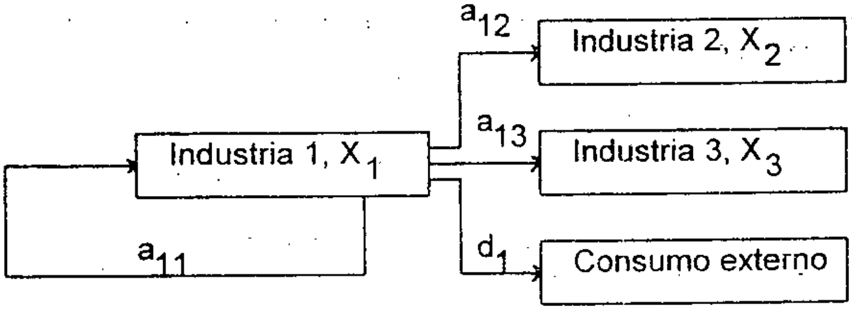
$$\begin{pmatrix} N_0(t+1) \\ N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ N_2(t) \end{pmatrix}$$

Supongamos ahora que esta población se inició en el tiempo $t = 0$ con 50 lagatijas de edad menor que 1, se tendrá para la siguiente generación $t = 1$

---

† Este ejemplo es una mera invención del autor en cuanto al tiempo efectivo de vida, sin embargo vamos a considerar una especie de lagartija del suroeste de los Estados Unidos, *Cnemidophorus uniparens*, que tienen la propiedad de "partenogénesis" (multiplicación sin fecundación), es decir son efectivamente hermafroditas. Luego podemos decir que cada lagartija, por si sola, puede generar a otra. En realidad en esta población de lagartijas son todas "amazonas" hembras. Se puede consultar *Investigación y Ciencia*, Febrero 1987.

unidades del producto 1 para poder elaborar una unidad del producto 2, luego si tenemos que el número de unidades del producto 2 es X_2 entonces las unidades requeridas de X_1 (que servirán para elaborar productos 2) está dado por $a_{12}X_2$. Los demás factores de la forma $a_{ij}X_j$ siguen el mismo razonamiento y su suma constituye la demanda interna (insumo) y el elemento d_1 es la demanda externa o consumo. Entonces en virtud de la condición de equilibrio (lo producido es igual a la demanda externa más el insumo) se tiene la igualdad (5.1).



Esquema 1

Bajo el mismo razonamiento anterior se establecen las siguientes igualdades:

$$X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + d_2 \tag{5.2}$$

$$X_3 = a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + d_3 \tag{5.3}$$

las igualdades de (5.1) hasta (5.3) las podemos reagrupar en términos semejantes como:

$$\begin{array}{rcrcrcl} (1-a_{11})X_1 & - & a_{12}X_2 & - & a_{13}X_3 & = & d_1 \\ -a_{21}X_1 & + & (1-a_{22})X_2 & - & a_{23}X_3 & = & d_2 \\ -a_{31}X_3 & - & a_{32}X_2 & + & (1-a_{33})X_3 & = & d_3 \end{array} \tag{5.4}$$

En este modelo se supone que las tasas de insumo y las demandas son conocidas, luego se trata de calcular las producciones para cada industria. Veremos a continuación un ejemplo numérico. Supongamos que para las industrias minera, pesquera y agrícola las demandas externas (consumo) son 10, 25 y 20 (en unidades adecuadas), respectivamente. Y supongamos además que las tasas de insumo son

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 0.20 & a_{12} = 0.5 & a_{13} = 0.15 \\ a_{21} = 0.40 & a_{22} = 0.1 & a_{23} = 0.30 \\ a_{31} = 0.25 & a_{32} = 0.5 & a_{33} = 0.15 \end{array}$$

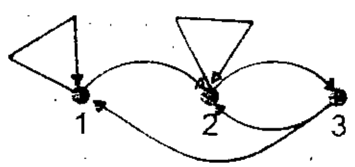
entonces para calcular las producciones totales de cada industria planteamos las ecuaciones como en (5.4) en que cada vértice está rotulado desde el 1 al 4. Ahora cada flecha o arco dirigido indica el camino a seguir desde un punto a otro. De momento no estaremos interesados á que fenómeno corresponde la representación de tal grafo, sino más bien en la representación matricial que describe la incidencia en ese grafo. En general el punto o vértice i de un grafo será incidente con el vértice j si existe un arco dirigido desde i hasta j. En el grafo anterior se ve claramente que, por ejemplo, el vértice (o estado) 1 es incidente a los puntos 1 y 2. Observemos que 1 no es incidente con 3. En particular en este grafo los puntos o estados incidentes son los vecinos más inmediatos (incluido el mismo punto o estado). Ahora bien, para este grafo que llamaremos **G** vamos a definir una matriz **I(G)** que llamaremos matriz de incidencia de **G**.

Observemos que nuestro grafo tiene 4 puntos o estados, luego la matriz **I(G)** será una matriz cuadrada de 4 filas y 4 columnas, donde la entrada (i,j)† tendrá el valor de 1 siempre que exista un arco dirigido desde i hasta j. Ahora si no existe un arco dirigido desde i hasta j la entrada (i,j) tendrá el valor de 0. Con esta definición nuestra matriz **I(G)** luce del siguiente modo:

$$\mathbf{I(G)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

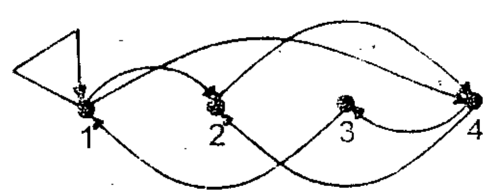
en efecto, por ejemplo la entrada (1,3) es un cero puesto que no existe un arco dirigido desde el vértice o estado 1 hasta el vértice o estado 3. La entrada (4,4) es un 1 puesto que existe un arco dirigido desde el estado 4 consigo mismo.

Este tipo de procedimientos es válido para cualquier grafo dirigido con estados finitos. Como ejercicio encuentre la matriz de incidencia del grafo siguiente:



Resulta natural definir el proceso inverso, esto es que toda matriz cuadrada cuyas entradas tienen valores ceros o unos, tienen una representación de un grafo dirigido. Por ejemplo la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



admite el siguiente grafo

† Recuerde que la entrada (i,j) es el valor de la matriz que se encuentra en la i-ésima fila y en la j-ésima columna.

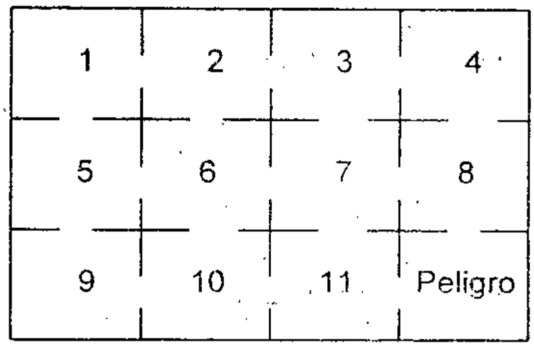
Agricultura	30
Industria	150
Servicios	125

y la matriz tecnológica de la distribución de los insumos está dada por

	Agricultura	*Industria*	*Servicios*
Agricultura	0.268	0.079	0.006
Industria	0.122	0.375	0.216
Servicios	0.488	0.396	0.578

donde la lectura de esta tabla no es ambigua. Se pide encontrar el nivel de producción de cada sector que se necesita para hacer frente a la demanda.

3. La figura representa el esquema de una Planta de Fuerza, donde cada habitación está conectada a otra según las puertas que se indican. Existe una habitación en donde, con absoluta certeza, toda persona que entre allí recibe una descarga eléctrica mortal. Supongase que por descuido en la vigilancia un niño de cuatro años ha entrado en la Planta y no tiene posibilidad de salir por falla en el seguro de la puerta de entrada.



(a) Dibuje un grafo dirigido que interprete la Planta de Fuerza y entregue las alternativas que tiene el niño de pasar, por curiosidad, de una habitación a otra (y esta decisión la toma después de un intervalo de tiempo constante, por ejemplo un minuto).
Nota: El estado o vértice que denotará la habitación de "peligro" se llama **estado absorvente**, puesto que toda persona que entre allí quedará definitivamente en esa habitación producto, en este caso, de la descarga eléctrica.
(b) Determine la matriz de incidencia asociada al grafo anterior.

4. Determine el grafo tal que del estado 1 se puede saltar a los estados consecutivos 2, 3, 4, 5, 6. Del estado 2 se puede saltar a los estados 3, 4, 5, 6. Y así sucesivamente, donde del estado 5 se puede saltar al estado 6. Sin embargo del estado 6 se puede saltar solamente al estado 1. este grafo dirigido, entonces, tiene seis estados. Encuentre la matriz de incidencia asociada a este grafo.

5. Suponga dos estados rotulados con el 0 y el 1, donde por alguna razón al 0 se le asigna el concepto de número par y al 1 con el concepto de número impar. Suponga usted que si tiene un número par, mediante una regla misteriosa, se puede transformar en un número par o un número impar. Ahora si el número es impar, mediante la misma regla misteriosa, el número se transforma en un número par. Ahora bien, en cualquier caso se aplica esta regla misteriosa nuevamente al número resultante, y así en forma sucesiva. Encuentre el grafo dirigido que representa este fenómeno y la matriz de incidencia respectiva.

11. En el problema anterior haremos una modificación. Es sabido en los círculos de apuestas que el Sr. Martínez posee ciertos trucos en el juego, que le permiten llevar una ventaja. Esto se traduce en que su probabilidad de ganar es mayor que la de perder. Suponga que la probabilidad de que gane el Sr. Martínez es de 2/3 para cada jugada. Encuentre, entonces, la matriz de Markov asociada a este juego con ventaja.

Notemos que esta suma tiene sentido para dos matrices que tengan las mismas dimensiones, esto es el mismo número de filas y el mismo número de columnas. En nuestro caso estamos sumando matrices de cuatro filas y tres columnas (la terminología clásica es hablar de matrices de "4×3"). Además notemos que hemos sumado la matriz $\mathbf{M}$ "más" la matriz $\mathbf{B}$, sin embargo un rápido razonamiento permite deducir que esta suma es igual a $\mathbf{B}$ "más" la matriz $\mathbf{M}$. Ahora estamos en condiciones de dar un formulismo notacional a la suma entre dos matrices.

Sea una matriz $\mathbf{M}$ de m filas y n columnas, $m \times n$, y sea $\mathbf{B}$ otra matriz de $m \times n$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

entonces la matriz suma M+B es la matriz:

$$\mathbf{M} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Volvemos a insistir que la suma de las entradas correspondientes es conmutativa, es decir

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \cdots & b_{2n}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1}+a_{m1} & b_{m2}+a_{m2} & \cdots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix}$$

y esto significa que M+B=B+M. Como un ejemplo trivial, realice la siguiente suma de matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS 1

1. Entregue cuatro ejemplos de matrices que representen o describan una situación real, por ejemplo planilla de notas, cuadro estadísticos, etcétera.

2. Sea $M_{n\times p} = \{\mathbf{A}/\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times p}\}$, esto es el conjunto de todas las matrices de n filas y p columnas. Ahora bien, sobre este conjunto considere la operación "+" definida en (1.1), pruebe que el par $(M_{n\times p}, +)$ constituye un Grupo Abeliano †.

3. Para cada n número natural se define la matriz de 2×3

$$\mathbf{A}(n) = \begin{pmatrix} n & 1 & 2n \\ 2n-1 & \frac{1}{n(n+1)} & n-1 \end{pmatrix}$$

† Esta es una pregunta histórica. Invariablemente se ha preguntado y demostrado a partir de la década del 60 hasta nuestros días. Usted está en condiciones de romper ciertos paradigmas: No es necesario que demuestre lo que se ha pedido.

EJERCICIOS 2

1. Por lo general en Ingeniería y Economía se trabaja con matrices "tecnológicas", que son aquellas en que sus entradas están muy próximas al cero. Un ejemplo de este tipo de matriz es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 0.0000006 & -0.00000054 & 0.00000054 \\ 0.0000001 & -0.00000091 & 0.00000021 \\ 0.0000006 & -0.00000071 & 0.00000078 \end{pmatrix}$$

¿Se puede hacer más "presentable" a fin de que no aparezcan tantos ceros?

2. Sea $\mathbf{A}(n) = \begin{pmatrix} (1/2)^n & 3(1/2)^n \\ (1/2)^{n+1} & (1/2)^{n-1} \end{pmatrix}$. Calcular, de manera ingeniosa, las siguientes sumas

$$\sum_{n=1}^{20} \mathbf{A}(n) \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}(n)$$

3. El producto entre un número real y una matriz es de vital importancia en los vectores. En este ejercicio vamos a considerar a los vectores como matrices de $1 \times n$. De forma genérica un vector n−dimensional luce del siguiente modo:

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = (\, x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_i \quad \cdots \quad x_{n-1} \quad x_n \,)$$

ahora si al vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ lo multiplicamos por el real α se forma el nuevo vector

$$\overrightarrow{\mathbf{b}} = \alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} = (\, \alpha \cdot x_1 \quad \cdots \quad \alpha \cdot x_i \quad \cdots \quad \alpha \cdot x_n \,)$$

y se dice que este nuevo vector $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ es un múltiplo o combinación lineal del vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}$. Este concepto se puede generalizar a más vectores, por ejemplo se dice que el vector $\overrightarrow{\mathbf{c}}$ es una combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{\mathbf{a}}$, $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ si existen reales α y β tales que $\overrightarrow{\mathbf{c}} = \alpha \cdot \overrightarrow{\mathbf{a}} + \beta \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}$. Probar que el vector 3−dimensional $(\,2 \quad 3 \quad 6\,)$ es combinación lineal de los vectores $(\,1 \quad -1 \quad 3\,)$, $(\,3 \quad 7 \quad 9\,)$

4. (Continuación del problema 3) En rigor se dice que un vector n-dimensional $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ distinto del vector nulo (aquel en que todas sus entradas son nulas), es combinación lineal del conjunto de vectores n-dimensionales $\{\overrightarrow{\mathbf{b}}_i / i \in \{1, \cdots p\}\}$ si existen números reales $\alpha_1, \cdots, \alpha_i \cdots, \alpha_p$ no todos nulos tales que

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}_i$$

si este es el caso se dice que el vector $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ es "linealmente dependiente" de los vectores $\{\overrightarrow{\mathbf{b}}_i / i \in \{1, \cdots p\}\}$. Considere los vectores $\mathbf{e}_1 = (\,1 \quad 0 \quad 0\,)$, $\mathbf{e}_2 = (\,0 \quad 1 \quad 0\,)$, $\mathbf{e}_3 = (\,0 \quad 0 \quad 1\,)$, y demuestre que todo vector no nulo $(\,a \quad b \quad c\,)$ es linealmente dependiente de estos.

5. (Continuación del problema 4) Se dice que los vectores $\{\overrightarrow{\mathbf{b}}_i / i \in \{1, \cdots p\}\}$ son "linealmente independientes" si

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}_i = 0 \ \ \textit{entonces} \ \ \alpha_i = 0 \ \ \forall\, i \in \{1, \cdots, p\}.$$

Demuestre entonces que $(\,1 \quad 2 \quad 1 \quad 5\,)$, $(\,1 \quad 1 \quad 2 \quad 2\,)$, $(\,3 \quad 2 \quad 9 \quad 3\,)$ y $(\,0 \quad 0 \quad 7 \quad 1\,)$ son linealmente independientes.

a) Calcule la distancia $d(\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{b}})$ donde $\overrightarrow{\mathbf{a}} = (1 \quad 2)$ y $\overrightarrow{\mathbf{b}} = (-2 \quad 1)$.
b) Idem para $\overrightarrow{\mathbf{a}} = (1 \quad -1 \quad 1)$ y $\overrightarrow{\mathbf{b}} = (2 \quad -2 \quad 1)$.
c) Idem para $\overrightarrow{\mathbf{a}} = (1 \quad -1 \quad -3 \quad 8)$ y $\overrightarrow{\mathbf{b}} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$
d) ¿Que vector está más cerca del vector nulo, $(0.1 \quad -.002 \quad 0.001)$ o $(0.002 \quad 0.001 \quad -0.003)$?

4. Producto entre matrices

En el capítulo 1 definimos el producto entre una matriz $\mathbf{A}$ de orden $m \times n$ con un vector $\mathbf{b}$ de orden $n \times 1$ de la manera siguiente:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m \text{ por } n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{n \text{ por } 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1j}b_j + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2j}b_j + \cdots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + \cdots + a_{ij}b_j + \cdots + a_{in}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \cdots + a_{mj}b_j + \cdots + a_{mn}b_n \end{pmatrix}}_{m \text{ por } 1}$$

que con la notación simbólica de $\sum$ se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{m1}b_j \end{pmatrix}$$

En rigor hemos definido el producto entre una matriz de orden $m \times n$ con una matriz de orden $n \times 1$, resultando una matriz de orden $m \times 1$. Nuestro objetivo ahora es definir el producto entre una matriz de orden $m \times n$ con una matriz de orden $n \times p$, de tal forma que el resultado sea una matriz de orden $m \times p$. Y para esto nos apoyaremos en el producto entre una matriz y un vector. Intentaremos definir el producto mediante dos matrices establecidas. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{A}$ es de 3×3 y $\mathbf{B}$ es de 3×4. Ahora bien, se puede considerar que la matriz $\mathbf{B}$ está formada por cuatro vectores (columnas) cada uno de orden 3×1, luego es permisible multiplicar la matriz $\mathbf{A}$ por el primer vector columna, cuyo resultado es un vector de orden 3×1, a saber

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \\ 9 \end{pmatrix}$$

la primera matriz es de 2×3 y la segunda matriz es de 3×2, y el producto resultante es de 2×2, donde por ejemplo la entrada $(2,2)$ resulta de multiplicar la segunda fila de la primera matriz con la segunda columna de la segunda matriz, o si se quiere aplicando directamente (4.1):

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 4\cdot(-4)+0\cdot 5+2\cdot 2 = -12$$

Con las dos matrices del ejemplo anterior podemos hacer notar que el producto entre matrices no es conmutativo, observemos que es factible el producto

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

cuyo resultado es una matriz de 3×3, a saber

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 6 & -5 \\ 21 & 2 & 11 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

En otros casos la conmutatividad del producto no es siquiera factible, por ejemplo si $\mathbf{A}$ es una matriz de 4×5 y $\mathbf{B}$ es una matriz de 5×3, entonces está bien definido el producto $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, sin embargo no tiene sentido el producto $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$. Además la conmutatividad ni siquiera la podemos asegurar en matrices de orden $n\times n$, como lo indica el siguiente ejemplo: Sean

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad y \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

verifique que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$

EJERCICIOS 4

1. Sean las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Computar $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}-\mathbf{C}$
b) Computar $-2\mathbf{A}$, $5\mathbf{C}$
c) Verificar que $\mathbf{A}+(\mathbf{B}-\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})-\mathbf{C}$
d) Encontrar la matriz $\mathbf{D}$ tal que $\mathbf{A}+\mathbf{D}=\mathbf{B}$
e) Computar $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$. ¿Son iguales ambos productos?

2. Dadas

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz identidad de $n \times n$ es aquella en que todos sus elementos son nulos exceptos los de la diagonal principal que son iguales a 1, y la notación es mediante $\mathbf{I}_{n\times n}$, o simplemente $\mathbf{I}$ si está claro el contexto. Por ejemplo la matriz identidad de 3×3 es

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos una matriz genérica de 3×3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ahora vamos a sumar y multiplicar esta matriz con $\mathbf{0}_{3\times 3}$ y con $\mathbf{I}_{3\times 3}$, respectivamente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

y además

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Con estas dos últimas igualdades queremos significar que el producto entre cualquier matriz cuadrada $\mathbf{A}_{n\times n}$ con $\mathbf{I}_{n\times n}$ es conmutativo, esto es $\mathbf{A}_{n\times n} \cdot \mathbf{I}_{n\times n} = \mathbf{I}_{n\times n} \cdot \mathbf{A}_{n\times n}$. No es necesario recalcar que la matriz nula conmuta con cualquier matriz respecto de la suma, puesto que ya sabemos que la suma es conmutativa. Es necesario destacar, al igual que en el álgebra de los números reales, que $\mathbf{0}_{n\times n} \cdot \mathbf{A}_{n\times n} = \mathbf{A}_{n\times n} \cdot \mathbf{0}_{n\times n} = \mathbf{0}_{n\times n}$, y esto se puede comprobar facilmente (hágalo como ejercicio). Sin embargo, contrario a lo que ocurre en los reales, es posible que el producto de dos matrices cuadradas distintas de la matriz nula dé como resultado la matriz nula. Observe el siguiente ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Este es un hecho que siempre debemos tener en cuenta, puesto que si alguna vez nos encontramos con la igualdad $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ entonces no necesariamente $\mathbf{A} = 0$ o $\mathbf{B} = 0$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{x}=(\mathbf{A}+\mathbf{I})\cdot\mathbf{x}$$

EJERCICIOS 5

1. Sea $\mathbf{I}\in M_{n\times n}$, y sea a una matriz de $n\times 1$, pruebe que $\mathbf{I}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$.

2. Sea el polinomio $p(\lambda)=\lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-5$, y sea la matriz $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}$, se pide.

a) Evaluar p(**A**)
b) Calcular las raíces del polinomio $p(\lambda)$ (Nota: Una raíz es -5)
c) Sean $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ las tres raíces del polinomio anterior. Resuelva mediante Gauss los sistemas siguientes:

$$\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad,\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad,\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

3. Sea el polinomio $m(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+3)$. Evaluar este polinomio para cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$$

6. Un modelo matricial: La anchoveta

La anchoveta (*Engraulis ringens Jenyns*) vive a lo sumo cuatro años y tiene posturas concentradas en una temporada del año. Es decir la anchoveta, en su dinámica de vida, pasa por los siguientes estados:

H: postura de huevos
1a.M: primera madurez sexual con postura de huevos
2a.M: segunda madurez sexual con postura de huevos
3a.M: tercera madurez sexual con postura de huevos

En relación al modelo 4.a del Capítulo 1, sobre crecimiento poblacional, vamos a considerar el número de anchovetas según la edad clasificada en **H**, **1a.M**, **2a.M**, **3a.M** y estas serán respectivamente $n_0(t)$, $n_1(t)$, $n_2(t)$ y $n_3(t)$, para cada tiempo t. Es decir

$n_i(t)=$ número de anchovetas de la clase i en el tiempo t

donde $i=0$ significa estado **H**, $i=1$ significa **1a.M**, etcétera. Ahora vamos a considerar los coeficientes de sobrevivencia y fertilidad para cada clase, esto es

$s_i=$ fracción de individuos de la clase i que sobreviven hasta la temporada siguiente, con $i\in(0,1,2)$ (puesto que la anchoveta no vive más allá del cuarto año)
$f_j=$ número de huevos puestos, en promedio, por cada adulto de edad j, con $j\in(1,2,3)$.

Ahora vamos a plantear las ecuaciones de su evolución dinámica. Queremos conocer el valor de $n_0(t+1)$, es decir el número de anchovetas que se encuentran en el estado **H** en la próxima temporada, y no resulta complicado determinar que

Ahora si para el año $t = 0$ se tiene una población inicial de $\mathbf{N(0)}$ entonces la ecuación matricial anterior origina la siguiente dinámica

$$\begin{aligned}
\mathbf{N(1)} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{N(0)} \\
\mathbf{N(2)} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{N(1)} = \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{N(0)} \\
\mathbf{N(3)} &= \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{N(0)} \\
&\vdots \\
\mathbf{N(n)} &= \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{N(0)}
\end{aligned}$$

A modo de ejemplo supongamos que se tiene un cultivo de anchovetas en laboratorio, con los factores $s_i = f_j = 1$, y con una población inicial de

$$\mathbf{N(0)} = \begin{pmatrix} n_0(0) \\ n_1(0) \\ n_2(0) \\ n_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

entonces para la próxima temporada se tiene

$$\begin{pmatrix} n_0(1) \\ n_1(1) \\ n_2(1) \\ n_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

para el cálculo de $\mathbf{N(2)}$ y $\mathbf{N(3)}$ se puede hacer por

$$\begin{aligned}
\mathrm{N(2)} &= \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{N(0)} \\
\mathrm{N(3)} &= \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{N(0)}
\end{aligned}$$

y en general,

$$\mathrm{N(n)} = \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{N(0)}$$

Mediante un paquete computacional matemático (como el DERIVE, MATHEMATICA o STATGRAPHICS) se calcula la matriz $\mathbf{A}^8$, que es la siguiente

$$\mathbf{A}^8 = \begin{pmatrix} 81 & 68 & 44 & 0 \\ 44 & 37 & 24 & 0 \\ 24 & 20 & 13 & 0 \\ 13 & 11 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

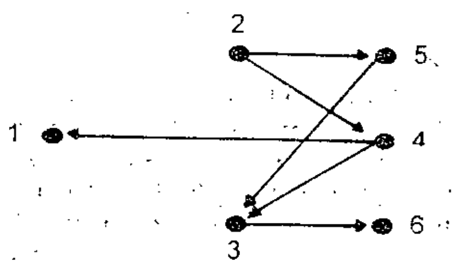
y entonces la generación $\mathbf{N(8)}$ queda establecida como

$$\mathrm{N(8)} = \begin{pmatrix} 81 & 68 & 44 & 0 \\ 44 & 37 & 24 & 0 \\ 24 & 20 & 13 & 0 \\ 13 & 11 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 742 \\ 404 \\ 219 \\ 119 \end{pmatrix}$$

y se puede verificar que desde el estado 3 se puede llegar en tres tiempos al estado 2 de las siguientes formas: $3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2$, $3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2$ y $3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2$; y este número de formas lo indica la entrada $(3,2)$ de la matriz $\mathbf{M}^3$

Sin demasiada formalismo, pero con bastante experimentación, podemos establecer entonces que si $\mathbf{M}$ es una matriz de incidencia de un grafo dirigido, se tiene que la matriz potencia $\mathbf{M}^n$ nos indica en cada una de sus entradas (i,j) el número de todos los posibles caminos en *n tiempos o saltos* que existen desde el estado i al estado j. En un lenguaje más apropiado a los grafos un camino de n saltos o de n tiempos se llama n–cadena.

Existe una aplicación muy clásica en el área de la sicología . En un grupo de p personas de un curso sin jerarquias establecidas (todos son iguales a efectos administrativos), se efectuan pruebas adecuadas para descubrir quien domina a quien, o más rigurosamente quien tiene ascendencia o influencia sobre otro. Una vez efectuadas estas pruebas se resumen los resultados mediante un grafo, de tal forma que si la persona i influye sobre la persona j entonces existe un camino dirigido $i \longrightarrow j$. Ahora bien, este grafo se lleva a la respectiva matriz de incidencia, y se plantea lo siguiente: Mirando solamente el grafo ¿se puede encontrar una fórmula matemática para descubrir a la o las personas con "pasta" de lider?, ¿la o las personas que son bastantes influenciables?. Supongamos que la persona i no tiene ascendencia sobre j, pero la persona k tiene ascendencia sobre j, y además i tiene ascencencia sobre k, entonces con esto estamos seguro que la entrada (i,j) de la matriz de incidencia al cuadrado tendrá un valor a lo menos de 1 (¿Porqué?). Este análisis lo explicaremos mediante un ejemplo. Supongamos que a seis personas se le aplica una batería de pruebas sicológicas y se concluye que el grafo que representa la relación "tener ascendencia sobre" es:



donde la matriz incidencia de este grafo es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este sencillo ejemplo se ve claramente que la persona 2 no es influenciable, puesto que no admite ninguna incidencia, y en concomitancia con esto observemos que en la matriz $\mathbf{A}$ la suma de los elementos de la columna 2 es cero. Por otro lado la mayor suma entre los elementos de cada columna de esta matriz se encuentra en la columna 3, y esto está verificando que la persona 3 es bastante influenciable en "primera instancia" (4 y 5 influyen directamente sobre 3).

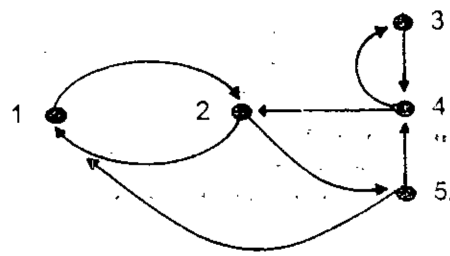
Continuando con nuestro análisis podemos observar, tanto en el grafo como en la matriz de incidencia $\mathbf{A}$, que no existe un camino directo desde 2 (el potencial lider)† hasta, por ejemplo, la persona

† Potencial lider puesto que no solo no es influenciable sino que tiene dos "grados" de ascendencia sobre sendas personas.

observando este producto se ve que la contribución para formar el resultado está a cargo del primer y cuarto 1 respecto de la matriz fila, y el primer y cuarto 1 de la matriz columna . La fila en esta matriz **B**, que representa a la quinta, representa dos movimientos, a saber $5 \longrightarrow 1$ y $5 \longrightarrow 4$, y la matriz columna que coorresponde a la segunda columna de la matriz **B** describe los siguientes dos movimientos $1 \longrightarrow 2$ y $4 \longrightarrow 2$. Luego tenemos los únicos dos movimientos de dos tiempos o dos saltos (o 2−cadena), a saber

$$5 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \quad y \quad 5 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \tag{7.2}$$

Este resultado se puede comprobar al representar el grafo asociado a la matriz **B**,



y se verifica que efectivamente las 2−cadenas de (7.2) representan los dos únicos movimientos en dos tiempos desde el vértice 5 al vértice 2.

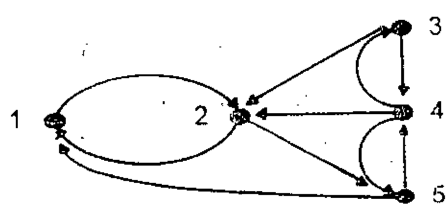
Verifiquemos lo anterior para otra entrada de la matriz $\mathbf{B}^2$ de (7.1), por ejemplo la entrada (2,4). Esta entrada es el resultado entre el producto de la segunda fila por la cuarta columna de la matriz **B**, esto es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

y se observa que el resultado es debido al quinto 1 de la matriz fila y al quinto 1 de la matriz columna. Este quinto 1 de la segunda fila en relación a la matriz **B** describe el movimiento $2 \longrightarrow 5$, y el quinto 1 de la cuarta columna en relación a la matriz **B** describe el movimiento $5 \longrightarrow 4$, luego existe un único movimiento de dos tiempos desde el vértice 2 al 4, y este es $2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4$.

EJERCICIOS 7

1. Para el siguiente grafo determine las potencias 2, 3 y 4 de la matriz de incidencia, y compruebe para cada entrada de cada una de las tres anteriores que su valor coincide con la suma de todos los posibles caminos de un estado a otro. Para esto realice todas las combinaciones posibles de caminos en los tiempos o saltos 2, 3 y 4.



2. Encuentre los grafos asociados a las siguientes matrices

De manera general si

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c = 0$$

entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda$, algún $\lambda \neq 0$. Luego $a = \lambda \cdot c$ y $b = \lambda \cdot d$, y con esto se demuestra que una fila es múltiplo de la otra.

Por una "razón dogmática" vamos a definir el determinante de una matriz de 3×3 de la siguiente forma:

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \cdot det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \cdot det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Veamos como opera esta definición en el siguiente ejemplo: Sea la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

entonces

$$det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - 1 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + 3 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-10) - 1 \cdot (1) + 3 \cdot (7) = 0$$

Recordemos que en el caso de 2×2 si el determinante es cero entonces las filas de la matriz son linealmente independientes, ahora observemos atentamente que en la matriz (8.2) la tercera fila es la misma que la primera, salvo que está multiplicada por -1.

Veamos otro ejemplo. Sea la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

donde podemos comprobar que la tercera fila es la suma, componente a componente, entre la primera fila y la segunda fila. Vamos a calcular el determinante de (8.3)

$$det\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot det\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot det\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-18) - 3 \cdot (-16) - 12 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 0 \\ 3 & 6 & 9 & | & 0 \\ -6 & -13 & -19 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_{12}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 \\ -6 & -13 & -19 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{13}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 5 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -5 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3(-1/3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

y de esta última matriz ampliada se deduce facilmente que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, y de esta forma nos aseguramos que las filas de la matriz **A** de (8.4) son linealmente independientes, esto es ninguna fila es combinación lineal de las restantes o de ella misma.

En definitiva, podemos extender nuestro resultado a todas las matrices de 3×3 sin necesidad de demostración rigurosa que, si el determinante de una matriz (de 3×3) es igual a cero entonces la matriz tiene a lo menos una fila que es combinación lineal de las filas de la matriz, y si el determinante es distinto de cero entonces ninguna fila es combinación lineal de las filas de la matriz.

Demás está decir que existe toda una teoría bastante amplia en lo que se refiere a determinantes de matrices. Sin embargo con nuestra modesta definición dogmática seguiremos avanzando en lo medular del Algebra Lineal y sus aplicaciones. Algunos aspectos relevantes de esta serán entregados en los ejercicios.

¿Como podemos definir el determinante de una matriz de 4×4?, del siguiente modo:

$$det\mathbf{A} = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = a_{11}detA_{11} - a_{12}detA_{12} + a_{13}detA_{13} - a_{14}detA_{14}$$

donde A_{1j} es la matriz de 3×3 que se obtiene de **A** al eliminar la primera fila y la j–ésima columna.

Antes de hacer un ejemplo en una matriz de 4×4, es justo decir que los cálculos son sumamente tediosos y, en lo que respecta a este curso -y estamos seguro que en su vida profesional- se hará en contadas ocasiones, por lo general este cómputo lo efectuará el ordenador personal. El ejemplo prometido, calcular

$$det \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo observemos que la suma de las tres primeras filas nos entrega como resultado un vector fila que es igual que la cuarta fila, excepto que está multiplicado por -1; de otra forma la cuarta fila es combinación lineal de las restantes filas. Luego si extendemos el resultado que obtuvimos para determinantes de 3×3, debería ocurrir que el valor de este determinante es nulo. En efecto

$$det \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = -3detA_{11} - detA_{12} + detA_{13} - detA_{14}.$$

Es interesante, por lo fácil, el cálculo del determinante de una matriz sobretriangular. En efecto

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} det \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot det \begin{pmatrix} a_{33} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \cdots = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

Podemos verificarlo para la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, en que su determinante es

$$det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 7 = 56$$

Antes de finalizar esta sección queremos insistir en la propiedad esencial del determinante de una matriz, si este es cero está significando que existe a lo menos una fila que es combinación lineal de alguna, o todas, las filas de la matriz. Y si el determinante no es cero entónces ninguna fila es combinación lineal del conjunto de filas de la matriz, y esto significa, en términos de un sistema de ecuaciones lineales, que existe una única solución. A continuación se entrega algunas de las propiedades más usuales sobre determinantes.

EJERCICIOS 8

1. Daremos una forma alternativa para el cálculo del determinante de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$

$$det\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot det A_{ij}$$

donde A_{ij} es la submatriz de $\mathbf{A}$ formada al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de $\mathbf{A}$, y a_{ij} es la entrada (i, j) de $\mathbf{A}$.

Verifique esta fórmula para las siguientes matrices (esto es, aplique las dos definiciones de determinante):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 8 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Nota: El valor de esta nueva definición es que permite expandir el determinante eligiendo una fila que tenga "más ceros".

Capítulo 3

Matriz Inversa y Transformaciones Lineales

Resumen. Lo esencial en este capítulo es la fundamentación, sin demasiado formalismo, del isomorfismo entre una matriz y su transformación lineal adyacente. De hecho al tratar una matriz cuadrada como una función se entrega el concepto de matriz inversa. Esto es lo que trata la sección 1. La sección 2 obedece más bien a cierta inercia histórica para la presentación de dos métodos de cálculo de inversa. Sin embargo el método de las transformaciones elementales por fila, nos sirve de excusa para reforzar el concepto de Independencia (y dependencia) lineal. En la sección 3 se estudia la definición de transformaciones lineales y sus propiedades ms relevantes, y en la seccin se presenta la metodología de como encontrar la matriz (asociada a la base canónica) de una transformación lineal. Se termina el capitulo con un breve análisis del rango de una matriz entregada an la sección 5 y con una aplicación de este concepto, en la sección 6, a la inversa generalizada.

1. La matriz cuadrada como una función.

Sabemos que una función de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ admite una inversa si y solamente si dicha función es 1 a 1 o inyectiva. Por ejemplo, la función $f(x) = x+3$ es inyectiva. Esto quiere decir que no existen dos valores x_1 y x_2 distintos tales que $f(x_1) = f(x_2)$, puesto que si así lo fuera, entonces $x_1+3 = x_2+3$ y se concluye, que $x_1 = x_2$. Con esto aseguramos que cada imagen y, según la función f, tiene una única pre-imagen x. Luego es posible definir una función de tal forma que al valor y le asignemos el valor único de x. En el caso de nuestro ejemplo el cálculo de la función inversa se realiza del siguiente modo: $f(x) = y = x+3$ entonces $x = y-3$, y se hace $f^{-1}(y) = y-3$. Notemos que $f(f^{-1}(y)) = f(y-3) = (y-3)+3 = y$ y además $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x+3) = (x+3)-3 = x$, es decir la composición entre ambas funciones por la derecha o por la izquierda produce la función identidad. La función identidad es $I(z) = z$ para todo z número real.

Ahora bien, esta misma idea de función inversa la utilizaremos para cierto tipo de funciones más complejas, definidas en el espacio $\mathbf{R}^n$ y con valores en $\mathbf{R}^n$. De momento vamos a definir el espacio $\mathbf{R}^n$ como el conjunto de las matrices "flacas", esto es de las matrices de n filas y una columna. Un elemento genérico de este espacio es

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \textit{con } a_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, ..., n$$

A modo de fijar ideas vamos a trabajar en el espacio $\mathbf{R}^2$, y consideraremos el vector $(1 \quad 4)^t$ y la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, ahora si efectuamos el producto entre esta matriz y el vector, el resultado será un elemento de $\mathbf{R}^2$. Esto es,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \end{pmatrix}$$

De manera más general

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

y recordemos que este sistema tiene una única solución si el determinante de la matriz $\mathbf{A}$ es distinto de cero. En efecto

$$det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

luego el sistema (1.2) admite una única solución, y es claro que la solución de este sistema homogeneo† es

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y esto significa que

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1 - z_1 &= 0 \\ w_2 &= x_2 - z_2 &= 0 \end{aligned}$$

y se deduce que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

por lo tanto la función $\mathbf{A}$ es inyectiva y admite una única inversa.

Con este ejemplo hemos comprobado que la existencia de una función inversa para la "función" $\mathbf{A}$ (F) depende si el determinante es cero o no. Este resultado se puede generalizar.

Sea $\mathbf{A}$ una matriz de $n \times n$, de tal forma que un vector $\mathbf{x}$ de $n \times 1$ se transforma en un vector $\mathbf{y}$ de $n \times 1$ mediante $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$. Luego, en rigor, $\mathbf{A}$ es una función de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^n$. Ahora si esta función no es inyectiva entonces existen $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ tal que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{y} \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{y}$$

y entonces no podría existir una inversa ya que para el vector $\mathbf{y}$ ¿qué valores de entre $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ deberíamos asignarle?. Luego para que $\mathbf{A}$ tenga inversa necesariamente debe ser una función inyectiva, esto es si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_2$ entonces $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Ahora si $\mathbf{A}$ es inyectiva, entonces $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_2 = 0$, que es equivalente a $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 0$, y sabemos que este sistema homogeneo tiene una única solución si y solo si $det\mathbf{A} \neq 0$. Ahora si en efecto el determinante es distinto de cero, se tiene que la solución única del sistema es $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = 0$; y esto significa que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. Por lo tanto $\mathbf{A}$ es inyectiva.

Ahora que hemos precisado la condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{A}$ admita una inversa (como función), el problema que surge es ¿Cómo calcular la inversa?. Estudiemos el problema mediante el mismo ejemplo inicial. Habíamos dicho que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

† Se dice que el sistema es homogeneo cuando $\mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ siendo $\mathbf{M}$ una matriz en general de orden $p \times m$, y es claro que una solución es $\mathbf{x} = 0$. Ahora si $\mathbf{M}$ es de $n \times n$ y además $det\mathbf{M} \neq 0$ entonces "la" solución es $\mathbf{x} = 0$.

$$\begin{aligned} F^{-1}(F(x,y)) &= F^{-1}(x+3y, 2x+4y) \\ &= (-2(x+3y) + \frac{3}{2}(2x+4y), x+3y - \frac{1}{2}(2x+4y)) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

y en ambos casos obtenemos la función identidad. El problema ahora es determinar cuál es la matriz correspondiente a la función F^{-1}. La respuesta no es tan sencilla. Vamos a actuar de la siguiente manera: Si la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ equivale a la función $F(x,y) = (x+3y, 2x+4y)$, entonces la matriz inversa de $\mathbf{A}$, digamos $\mathbf{A}^{-1}$, debe ser tal que represente el efecto $F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = I$, donde $I(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$. Y podemos notar que $I_{2\times 2} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ entonces $\mathbf{A}^{-1}$ debe satisfacer la propiedad

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = I_{2\times 2}$$

Sea entonces $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, y debería ocurrir que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y esto significa que

$$\begin{pmatrix} a+2b & 3a+4b \\ c+2d & 3c+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a+2b &= 1 \\ 3a+4b &= 0 \\ c+2d &= 0 \\ 3c+4d &= 1 \end{aligned} \tag{1.6}$$

ponemos este sistema en forma matricial a fin de aplicar el método de Gauss,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

y no es difícil llegar a la solución

$$d = -\frac{1}{2}, \quad c = 1, \quad b = \frac{3}{2}, \quad a = -2$$

Entonces la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ buscada es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

a modo de comprobación efectuemos el producto entre las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^{-1}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces la solución es

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con este sencillo ejemplo le damos la importancia que significa el cálculo de la inversa de una matriz, aun cuando veremos en próximos capítulos que la inversa de una matriz no solo nos servirá para la resolución de un sistema.

Antes de entregar dos métodos de cálculo para la inversa, queremos hacer notar que ambos procedimientos son complicados "manualmente" para operar para matrices de orden grande, por ejemplo a partir de 6×6, y del tipo tecnológica como:

$$\begin{pmatrix} 0.2345 & 0.0021 & -0.2345 & 0.00912 & 0.0003 & 0.3487 \\ 0.1999 & -.6666 & -0.8779 & 0.55555 & 0.7464 & 0.2111 \\ 0.3337 & 0.5671 & -0.0098 & 0.71212 & 0.3693 & 0.6327 \\ 0.8999 & -.6890 & -0.0029 & 0.34555 & 0.8234 & 0.4521 \\ 0.2311 & 0.0345 & -0.8213 & 0.78912 & 0.3303 & 0.2287 \\ 0.9899 & -.5655 & -0.3829 & 0.15755 & 0.4378 & 0.6770 \end{pmatrix}$$

y cuando decimos complicados nos referimos a los cálculos tediosos que se deben hacer, y que con toda seguridad cometeremos algún error. Para esto es conveniente desarrollarlos con un paquete computacional matemático. La inversa efectuada con el software DERIVE, de la matriz anterior, nos condujo al siguiente resultado:

$$\begin{pmatrix} 104.636 & -22.8872 & -27.0887 & 59.196 & 27.4525 & -70.2468 \\ 204.022 & -41.4571 & -50.5077 & 113.047 & 50.3486 & -137.457 \\ -108.802 & 21.4837 & 27.4212 & -59.4592 & -27.0637 & 72.5637 \\ -203.834 & 40.2131 & 50.7045 & -112.137 & -48.5635 & 136.352 \\ 216.607 & -42.4403 & -53.4320 & 120.597 & 52.0359 & -146.511 \\ -126.753 & 29.0738 & 35.6818 & -77.6471 & -35.7398 & 93.4274 \end{pmatrix}$$

Primer Método: Transformaciones elementales por fila.

Supongamos que la matriz $\mathbf{A}_{n\times n}$ admite una inversa, esto es $det\mathbf{A} \neq 0$ y esto significa que las filas de la matriz $\mathbf{A}$ son linealmente independientes. Si $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_n\}$ son las filas no nulas† de la matriz $\mathbf{A}$ entonces, de acuerdo a la definición de vectores linealmente independientes (Cap.2, sección 2, ejercicio 5) se tiene que si existen $\alpha_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mathbf{f}_i = 0$ entonces $\alpha_i = 0 \, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Analizaremos a fondo esta definición. Supongamos que lo anterior no ocurre, es decir existe (a lo menos) un $\alpha_1 \neq 0$ (si es preciso se hace un nuevo ordenamiento de los α_i) tal que

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{f}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \mathbf{f}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

entonces podemos despejar el vector $\mathbf{f}_1$ como

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \mathbf{f}_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \cdot \mathbf{f}_3 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \cdot \mathbf{f}_n \tag{1.9}$$

y esto significa que el vector $\mathbf{f}_1$ es combinación lineal de (algunos de) los restantes $\{\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \ldots, \mathbf{f}_n\}$. En efecto, si ocurre que $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$ implicaría $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ en contradicción con el hecho de que ninguna fila es la fila nula.

† En efecto si (a lo menos) para una fila de la matriz $\mathbf{A}$, digamos $\mathbf{f}_j$, ocurre que $\mathbf{f}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, entonces es claro que el determinante de la matriz vale cero.

A la matriz del lado izquierdo la denotaremos momentaneamente por $\mathbf{B}$. Efectuemos ahora los productos $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&3&1\\5&-1&4\\6&7&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-31/6&-1/3&13/6\\3/2&0&-1/2\\41/6&2/3&-17/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-31/6&-1/3&13/6\\3/2&0&-1/2\\41/6&2/3&-17/6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&1\\5&-1&4\\6&7&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Y es claro que la matriz $\mathbf{B}$ es la matriz inversa de $\mathbf{A}$.

Explicaremos este método: Al aplicar la transformación elemental por fila $F_1(1/2)$ a la matriz $\mathbf{A}$ y a la matriz $\mathbf{I}_{3\times 3}$ hemos obtenido sendas matrices. Ahora bien, la matriz obtenida de $\mathbf{I}_{3\times 3}$ al aplicar $F_1(1/2)$ resulta ser

$$\begin{pmatrix}1/2&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

y que con cierto abuso de notación la llamaremos $\mathbf{F}_1$, ahora multipliquemos esta matriz por la matriz $\mathbf{A}$ y obtenemos:

$$\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1/2&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&1\\5&-1&4\\6&7&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3/2&1/2\\5&-1&4\\6&7&3\end{pmatrix}$$

y como podemos observar la resultante es la matriz obtenida al aplicar sobre $\mathbf{A}$ la misma transformación $F_1(1/2)$. Ahora si a la matriz $\mathbf{I}_{3\times 3}$ le aplicamos la transformación $F_{12}(-5)$ obtenemos la matriz, que llamaremos $\mathbf{F}_2$, indicada a continuación:

$$\mathbf{F}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\-5/2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

y si multiplicamos esta matriz (por el lado izquierdo) a la matriz resultante $\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{A}$ nos queda la matriz del lado derecho de la expresión (2.3),

$$\mathbf{F}_2\cdot(\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{A})=\begin{pmatrix}1&0&0\\-5/2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&1\\5&-1&4\\6&7&3\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-5/2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3/2&1/2\\5&-1&4\\6&7&3\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_2\cdot(\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{A})=\begin{pmatrix}1&3/2&1/2\\0&17/2&3/2\\6&7&3\end{pmatrix}$$

En resumen, si seguimos con este procedimiento, tenemos que por cada transformación por filas asociamos las matrices $\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2,\ldots,\mathbf{F}_p$, que son las transformaciones necesarias para llevar la matriz $\mathbf{A}$ a la matriz $\mathbf{I}_{3\times 3}$, en ese orden, se tiene que la equivalencia como producto de matrices es:

$$\mathbf{F}_p\cdot\mathbf{F}_{p-1}\cdots\mathbf{F}_2\cdot\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{A}=\mathbf{I}_{3\times 3}$$

vamos a calcular en primer lugar la matriz de los cofactores de **A**. Supongamos que $Cof(\mathbf{A}) = (\alpha_{ij})_{3\times 3}$, computando cada una de estas entradas,

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} det \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = -31 \quad \alpha_{12} = (-1)^{1+2} det \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = 9 \quad \alpha_{13} = (-1)^{1+3} det \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = 41$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = -2 \quad \alpha_{22} = (-1)^{2+2} det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \alpha_{23} = (-1)^{2+3} det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = 4$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1} det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 13 \quad \alpha_{32} = (-1)^{3+2} det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = -3 \quad \alpha_{33} = (-1)^{3+3} det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = -17$$

entonces la matriz $Cof(\mathbf{A})$ es

$$Cof(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -31 & 9 & 41 \\ -2 & 0 & 4 \\ 13 & -3 & -17 \end{pmatrix}$$

luego

$$Adj(\mathbf{A}) = (Cof(\mathbf{A})^t = \begin{pmatrix} 31 & -2 & 13 \\ 9 & 0 & -3 \\ 41 & 4 & -17 \end{pmatrix}$$

ahora calculamos el determinante de **A**,

$$det(\mathbf{A}) = 2 \cdot det \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot det \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = 6$$

y en definitiva

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -31/6 & -1/3 & 13/6 \\ 3/2 & 0 & -1/2 \\ 41/6 & 2/3 & -17/6 \end{pmatrix}$$

que coincide con el resultado de la primera técnica.

3. Transformaciones Lineales.

En la sección 1 de este capítulo asociamos una matriz de $n \times n$ a una función de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^n$. Vamos a ver que las propiedades de linealidad de la matriz **A** las hereda la función asociada según (1.7) de la sección 1.

Sea **A** una matriz de $n \times n$, luego si **x** e **y** son dos matrices "flacas" de $n \times 1$ y α y β son dos números reales entonces la matriz "flaca" de $n \times 1$, $\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}$, está bien definida y puede ser multiplicada por la matriz **A**, esto es

$$\mathbf{A} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{A}\mathbf{y}$$

en razón de las propiedades de multiplicación entre matrices y la multiplicación de un escalar por una matriz. Y puesto que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{w}$ produce lo mismo que $\mathbf{F}(\mathbf{w})$, donde **F** se define según **A** como

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}) = \mathbf{z} \Longleftrightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{z}$$

Sin embargo debemos hacer una demostración rigurosa que la función definida en (3.2) satisface la propiedad (3.1). En efecto, sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2), \alpha$ y $\beta \in \mathbf{R}$, entonces

$$\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} = (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta y_1, \beta y_2) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2)$$

aplicando la función $\mathbf{F}$ definida en (3.2), se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2) &= (3 \cdot (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2), 2 \cdot (\alpha x_1 + \beta y_1) + 4 \cdot (\alpha x_2 + \beta y_2)) \\
&= (\alpha \cdot (3x_1 + x_2) + \beta \cdot (3y_1 + y_2), \alpha \cdot (2x_1 + 4x_2) + \beta \cdot (2y_1 + 4y_2)) \\
&= (\alpha \cdot (3x_1 + x_2), \alpha \cdot (2x_1 + 4x_2)) + (\beta \cdot (3y_1 + y_2), \beta \cdot (2y_1 + 4y_2)) \\
&= \alpha \cdot (3x_1 + x_2, 2x_1 + 4x_2) + \beta(3y_1 + y_2, 2y_1 + 4y_2) \\
&= \alpha \cdot \mathbf{F}(x_1, x_2) + \beta \cdot \mathbf{F}(y_1, y_2)
\end{aligned}$$

La definición (3.1) caracteriza a todas las funciones que nacen de una representación matricial como la dada en el ejemplo anterior. Lo interesante es saber que toda función que sastisface la propiedad (3.1) tiene una matriz adyacente asociada. A estas alturas, entonces, es necesario dar la siguiente definición: Si $\mathbf{F}$ es un función de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^n$ tal que

$$\mathbf{F}(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \beta \cdot \mathbf{F}(\mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

se dice que $\mathbf{F}$ es una Transformación Lineal de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^n$.

En general se puede definir una transformación lineal de forma más general, esto es que sea de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$. En efecto, si $\mathbf{F} : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ tal que $\mathbf{F}(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{F}(\mathbf{y})$, para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, donde en este caso $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es un vector de $\mathbf{R}^m$

Veamos un ejemplo de transformación lineal. Consideremos el espacio físico, que lo describe muy bien $\mathbf{R}^3$ en cuanto a entregar la posición exacta de un punto en el espacio. Supongamos que queremos proyectar todos los puntos de éste espacio en el plano $\mathbf{X}$-$\mathbf{Y}$. Entonces nada más sencillo que definir naturalmente la función:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0)$$

y esta función es una transformación lineal. En efecto, sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, con $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, entonces

$$\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y} = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$$

luego

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}) &= \mathbf{F}(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) \\
&= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, 0)
\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, 0) &= \alpha \cdot (x_1, x_2, 0) + \beta \cdot (y_1, y_2, 0) \\
&= \alpha \cdot \mathbf{F}(x_1, x_2, z) + \beta \cdot \mathbf{F}(y_1, y_2, w)
\end{aligned}$$

y en particular esta igualdad es cierta para $z = x_3$ y $w = y_3$.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(1,0,0) &= (1,0) \\ \mathbf{F}(0,1,0) &= (0,1) \\ \mathbf{F}(0,0,1) &= (0,0) \end{aligned} \tag{3.3}$$

y esto significa que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obteniendose

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x + 0 \cdot y + 0 \cdot z \\ 0 \cdot x + y + 0 \cdot z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

luego la matriz asociada a la transformación lineal anterior es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Notemos que las columnas de esta matriz corresponden a las imagenes de los vectores $(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (0,0,1)^t$ via la función $\mathbf{F}$ según (3.3).

Vamos a resumir el proceso de encontrar la matriz asociada a una transformación lineal. Supongamos que $\mathbf{F}$ es una transformación lineal de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$ (para esto debemos comprobar si satisface la definición), luego la matriz buscada es de $n \times m$ de modo que la columna i–ésima es la imagen, vía $\mathbf{F}$, de

$$\mathbf{e}_i = (0, 0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ésima posición}}, 0, \cdots, 0)$$

Consideremos el siguiente ejemplo, sea la función $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, z, y)$, demuestre que es transformación lineal y encuentre la matriz adyacente. En primer lugar vamos a probar su linealidad, para esto consideremos dos vectores arbitrarios (x_1, x_2, x_3) y (y_1, y_2, y_3) y para α y $\beta \in \mathbf{R}$ hagamos el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3)) &= \mathbf{F}((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)) \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_3 + \beta y_3, \alpha x_2 + \beta y_2) \\ &= \alpha(x_1, x_3, x_2) + \beta(y_1, y_3, y_2) \\ &= \alpha\mathbf{F}((x_1, x_2, x_3)) + \beta\mathbf{F}((y_1, y_2, y_3)) \end{aligned}$$

y con esto queda demostrado que la función $\mathbf{F}$ es una transformación lineal. Ahora para determinar la matriz asociada a esta matriz debemos calcular$\mathbf{F}((1,0,0))$, $\mathbf{F}((0,1,0))$ y $\mathbf{F}((0,0,1))$ y que según la definición de $\mathbf{F}$ resulta:

$$\mathbf{F}((1,0,0) = (1,0,0)$$

$$\mathbf{F}((0,1,0) = (0,0,1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

cuál cree usted, entonces, que será la inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

6. Determine cual de las siguientes funciones es transformación lineal. Para cada caso positivo encuentre la matriz asociada a tal transformación lineal.

a) $\mathbf{T}(x, y) = (x + y, 2(x + y))$
b) $\mathbf{T}(x, y, z) = (x + y + z, x + y, x)$
c) $\mathbf{T}(x, y) = x + y$ (Cuidado, de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}$)
d) $\mathbf{T}(x, y, z) = (x + z, y + z)$
e) $\mathbf{T}(x, y, z) = (x^2, sen(x + y), z)$
f) $\mathbf{T}(x, y, z, w) = (1, x + w, z + w, x + y + z + w)$
g) $\mathbf{T}(x) = (x, x/2, x)$
h) $\mathbf{T}(x, y) = (\alpha x, \beta y)$
i) $\mathbf{T}(x, y) = (x, cos(x + y))$

7. Usted sabe representar cualquier vector (x, y, z, w) como combinación lineal de los vectores canónicos de $\mathbf{R}^4$. Ahora usted hará algo más complicado, demuestre que los siguientes vectores son linealmente independientes (no se complique demasiado):

$$(3, 0, 0, 0)$$
$$(0, 2, 0, 0)$$
$$(0, 0, 1, 0)$$
$$(0, 0, 1, 2)$$

entonces trate de escribir cada vector canónico como combinación lineal de estos nuevos. Además escriba $(1, 3, -4, 6)$ como combinación lineal de estos.

8. Resuelva el siguiente sistema mediante el uso de la matriz inversa:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & 5z & = & 7 \\ -x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ 3x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}$$

9. Resuelva el sistema simétrico siguiente mediante el cálculo de la inversa:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 5y & + & 3z & = & 2 \\ 5x & - & 3y & + & 2z & = & 3 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 5 \end{array}$$

luego para resolver este sistema utilizamos Gauss-Jordan y donde es innecesario agregar la columna de ceros puesto que será inmutable respecto de cualquier operación elemental por filas,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{12}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 4 & 3 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{13}(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(1/3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{23}(5)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

con este resultado llegamos al sistema equivalente

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & + & 6\gamma & = & 0 \\ & & \beta & + & 2\gamma & = & 0 \end{array}$$

del cual se deduce que existen infinitas soluciones, a saber

$$\beta = -2\gamma \quad ; \quad \alpha = -2\gamma$$

y una solución particular distinta de la nula es $\alpha = 2$, $\beta = 2$ y $\gamma = -1$ lo que nos asegura que los tres filas no son linealmente independientes, luego por lo menos el rango de la matrix $\mathbf{A}$ no es 3. Si eliminamos arbitrariamente la tercera fila (podemos eliminar cualquiera, puesto que ya sabemos qué una cualquiera depende, a lo menos, de las otras dos). No resulta complicado en verificar que las dos primeras filas son linealmente independientes. En efecto, supongamos que

$$\alpha(1,2,4) + \beta(2,1,3) = (0,0,0)$$

entonces matricialmente el sistema es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y haciendo las transformaciones elementales por filas pertinentes es sencillo deducir que se llega al sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y nos entrega la única solución es $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, de lo cual se deduce que el rango de la matriz $\mathbf{A}$ es efectivamente 2.

Como vemos, si aplicamos la definición que consiste en encontrar el número máximo de filas linealmente independiente de la matriz, se traduce en resolver consecutivos sistemas de ecuaciones y resolverlos mediante Gauss-Jordan. Sin embargo la reducción escalonada por filas adyacente al método de Gauss nos puede hacer el trabajo más fácil. Supongamos que tenemos una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times m$, y existe una fila que es combinación de las restantes, entonces es claro que despues de transformaciones elementales adecuadas esta fila se anulará. En efecto supongamos que la matriz $\mathbf{A}$ en función de sus filas luce del siguiente modo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_i \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

su forma reducida escalonada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 13/7 \\ 0 & 1 & -1 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y se concluye que el rango es 2.

Estudiemos el rango de la traspuesta de esta última matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

y su forma reducida escalonada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con estos dos últimos ejemplo nos atreveremos a dar un teorema sin demostración: Si $\mathbf{A}$ es de $n \times m$, entonces

$$Rango(\mathbf{A}) = Rango(\mathbf{A}^t)$$

No resulta difícil convencerse que para una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ mediante operaciones elementales por fila se puede llevar a una forma escalonada del tipo

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{k\times k} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{I}_{k\times k}$ es la matriz identidad de orden k y $\mathbf{F}$ es una matriz de $k \times (n-k)$. Para el ejemplo de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\mathbf{I}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 13/7 \\ -1 & -2/7 \end{pmatrix}$$

La búsqueda del rango de una matriz es equivalente a la resolución de un sistema de ecuaciones, y es claro que los cálculos de las operaciones por filas son largos y tediosos, por lo que se aconseja realizarlos en un software matemático como el DERIVE. Ahora bien, intentaremos anexar el concepto de rango a los sistemas de ecuaciones lineales y de este modo convencernos de los resultados que iniciaron esta sección.

Supongamos el siguiente sistema

ii) El rango de la matriz de diseño es 2 y el rango de la matriz ampliada también es 2.

En el último sistema haremos la siguiente modificación

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 4z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 6 \\ 3x & + & 2y & - & 3z & = & 7 \end{array}$$

y observe atentamente que los coeficientes de las variables de la última ecuación es la suma de los coeficientes respectivos de las dos primeras ecuaciones, sin embargo el coeficiente constante de la tercera ecuación no es la suma de los dos coeficientes de las restantes ecuaciones. La matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & \vdots & 2 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 6 \\ 3 & 2 & -3 & \vdots & 7 \end{pmatrix}$$

y al aplicar Gauss-Jordan nos queda la forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/5 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -6/5 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

y este resultado nos dice lo siguiente:
i)El sistema no tiene solución puesto que la última fila nos entrega la contradicción de que $0 = 1$
ii) El rango de la matriz de diseño es 2, y el rango de la matriz ampliada es 3.

No es difícil, entonces, deducir que para cualquier sistema se cumplen las aseveraciones del teorema que abrió esta sección.

A continuación presentaremos un teorema que nos será de gran utilidad en diversas aplicaciones, especialmente en la Estadística:
Teorema: Si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ son matrices de $m \times k$ y $k \times n$ y cada una es de rango k, entonces $\mathbf{AB}$ es de rango k. Además si $\mathbf{A}$ es una matriz de orden $m \times k$ con rango igual al $min(m, k)$†, entonces $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$ tiene el mismo rango que $\mathbf{A}$
Demostración: Si $\mathbf{A}$ es de $m \times k$ y tiene rango k entonces necesariamente la reducción escalonada por filas tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{k\times k} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

de igual forma si $\mathbf{B}$ es de $k \times n$ y es de rango k, entonces su forma escalonada por filas debe lucir como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{k\times k} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

luego el producto de estas dos formas escalonadas

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{k\times k} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{k\times k} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{k\times k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

† $min(m, k)$ es el menor valor entre m y k.

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^t\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t$$
$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^t)^{-1}\mathbf{A}^t$$
$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$$

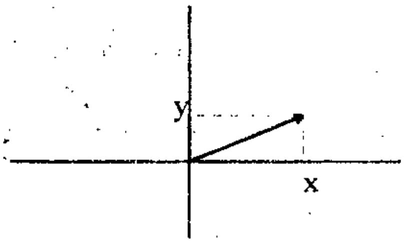
es decir en el caso de que $\mathbf{A}$ sea una matriz cuadrada y admita inversa esta coincide con su inversa generalizada.

EJERCICIOS 2

1. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores de $n \times 1$, pruebe que la matriz $\mathbf{uv}^t$, de $n \times n$ es de rango 1.
2. Pruebe mediantes varios ejemplo que se satisface lo siguiente:

a) El rango de $\mathbf{A}^+$ es igual al rango de $\mathbf{A}$
b) $(c\mathbf{A})^+ = (1/c)\mathbf{A}^+$
c) $(\mathbf{A}^+)^t = (\mathbf{A}^t)^+$
d) $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$
e) Demuestre mediante un contraejemplo que en general $(\mathbf{AB})^+ \neq \mathbf{B}^+\mathbf{A}^+$.

el punto $(0,0)$ *hasta el punto* (x,y), *y su representación en el plano cartesiano es:*

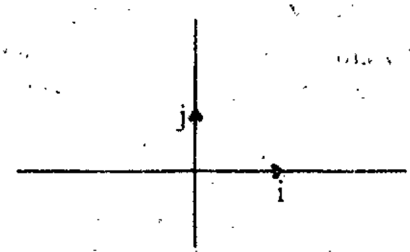


Gráfica1.3

Con este pequeño abuso de notación estamos identificando los puntos del plano cartesiano con flechas, que llamaremos vectores, orientadas desde el origen al punto que los define. Luego para hacer más clara la diferencia entre puntos y vectores utilizaremos la siguiente notación: Al vector genérico (x,y) se denotará por una letra "con flecha", como por ejemplo $\overrightarrow{v} = (x,y)$ (obviamente usted puede utilizar cualquier letra "con flecha"). A objeto de familiarizarse con estos vectores le sugerimos que haga el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1. Graficar los vectores $\overrightarrow{v} = (-4,4)$; $\overrightarrow{u} = (2,1)$; $\overrightarrow{s} = (3,0)$; $\overrightarrow{g} = (1/2,-2/3)$; $\overrightarrow{\imath} = (1,0)$; $\overrightarrow{\jmath} = (0,1)$; $\overrightarrow{m} = (7,3)$.

Los vectores $\overrightarrow{\imath} = (1,0)$ y $\overrightarrow{\jmath} = (0,1)$ están representados graficamente por:



Gráfica 1.4

Observemos que cualquier vector $\overrightarrow{v}$ de la forma $\overrightarrow{v} = (\alpha,0)$, con α número real, se puede expresar como $\overrightarrow{v} = \alpha \cdot \overrightarrow{\imath}$, entendiendo y recordando que la multiplicación de un número real y un vector (x,y) está definido como siempre†.

$$k \cdot (x,y) = (kx, ky)$$

De igual forma un vector $\overrightarrow{u} = (0,k)$, con $k \in \mathbf{R}$, se puede expresar como $\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{\jmath}$. En conclusión, todos los vectores $\overrightarrow{v} = (k,0)$ son múltiplos, k veces, del vector $\overrightarrow{\imath}$. Y todos los vectores $\overrightarrow{u} = (0,k)$ son múltiplos, k veces, del vector $\overrightarrow{\jmath}$.

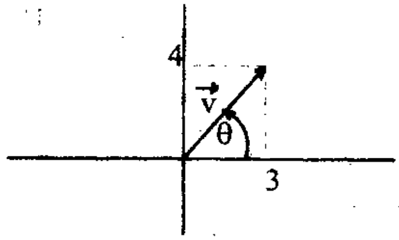
Nota: Del capítulo 3 se puede recordar que los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ forman la base canónica de $\mathbf{R}^2$, es decir si $\overrightarrow{v} = (x,y)$ entonces

$$\overrightarrow{v} = x \cdot \overrightarrow{\imath} + y \cdot \overrightarrow{\jmath}$$

A continuación estudiaremos otras caracterizaciones de los vectores. Consideremos el vector $\overrightarrow{v} =$

† Nos referimos al producto entre un número real y una matriz, en este caso de 1×2.

Continuemos trabajando con el vector $\vec{v} = (3, 4)$ y observemos el ángulo formado por el vector y el eje **X**, según la siguiente figura:



Gráfica 1.6

Aquí resulta claro que

$$cos(\theta) = \frac{3}{5} \qquad sen(\theta) = \frac{4}{5}$$

Podemos afirmar entonces que si $\vec{v} = (x, y)$ es un vector de magnitud v entonces el ángulo formado por el vector y el eje **X** está univocamente determinado por:

$$cos(\theta) = \frac{x}{v} \qquad sen(\theta) = \frac{y}{v}$$

siendo $v = \sqrt{x^2 + y^2}$.

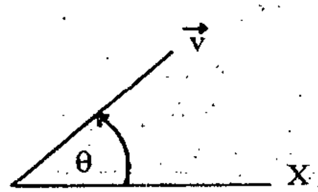
Resumiendo lo anteriormente expuesto, tenemos que para un vector $\vec{v} = (x, y)$ de magnitud o norma v, se tienen las siguientes relaciones:

$$x = v \cdot cos(\theta) \quad ; \quad y = v \cdot sen(\theta)$$

entonces para el vector $\vec{v}$ de magnitud v que forma un ángulo θ respecto del eje **X** se tiene que:

$$\vec{v} = (v \cdot cos(\theta), v \cdot sen(\theta))$$

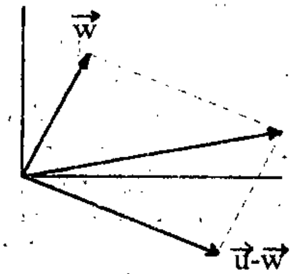
Es necesario recalcar que la orientación del ángulo θ es "del eje **X** hacia el vector $\vec{v}$"(en el sentido contrario a las manecillas de un reloj), esto es graficamente:



Gráfica 1.7

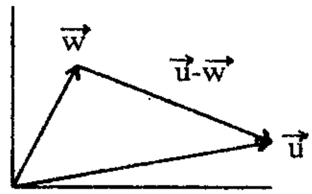
Es de vital importancia la definición de la orientación del ángulo θ puesto que ella define el "sentido" que tiene el vector. Observe la gráfica 1.8, en la cual el vector tiene magnitud 2 y hay un ángulo de 30° entre el eje **X** y el vector (sentido a favor de las manecillas de un reloj), y entonces es un **error** considerar que $\vec{v} = (2cos30°, 2sen30°)$, la expresión correcta es $\vec{v} = (2cos160°, 2sen160°)$, donde es sabido que $cos160° = -cos30°$ y $sen160° = sen30°$ de donde $\vec{v} = (-2cos30°, 2sen30°)$ y esta expresión recalca el hecho de que su primera componente (la proyectada sobre el eje **X**) es negativa en comparación con el vector $\vec{u}$ que tiene la misma magnitud pero forma un ángulo de 30° con el eje **X** (gráfica 1.9).

La diferencia entre vectores es $\vec{u} - \vec{w} = \vec{u} + (-1) \cdot \vec{w}$, es decir si $\vec{u} = (a, b)$ y $\vec{w} = (c, d)$ entonces $\vec{u} - \vec{w} = (a - c, b - d)$. Geometricamente para el caso en que $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{w} = (3, 1)$ se tiene,



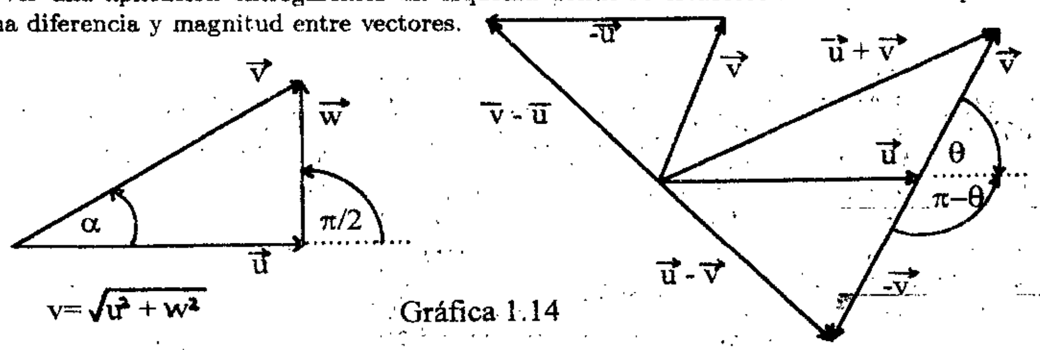
Gráfica 1.12

La gráfica anterior es la interpretación dada por un matemático. Un físico realiza la siguiente interpretación de la diferencia entre vectores:



Gráfica 1.13

Podemos decir que ambas interpretaciones son correctas mediante el siguiente razonamiento: Si trasladamos paralelamente el vector $\vec{u} - \vec{w}$ de la gráfica 1.13 al origen obtenemos el vector diferencia de la gráfica 1.12. La interpretación "física" se ajusta mejor a los modelos que se verán en Cinemática. Antes de ver una aplicación entregaremos un esquema donde se establece las diferentes operaciones, como suma diferencia y magnitud entre vectores.



Gráfica 1.14

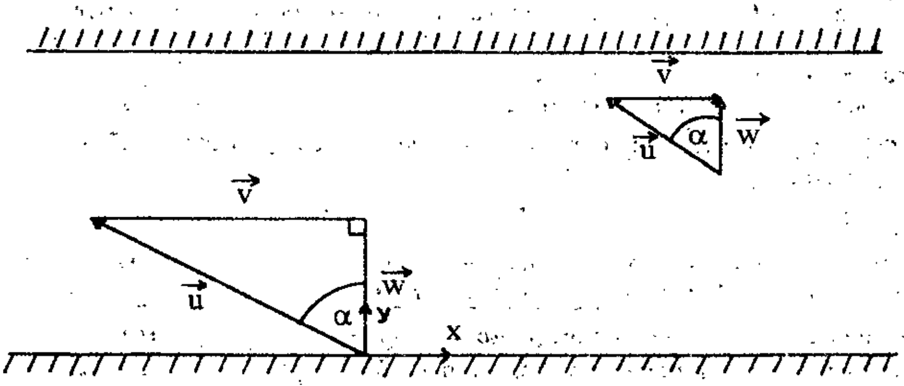
Las distintas representaciones para un vector $\vec{v}$ que se entregan a continuación son equivalentes

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= (x, y) \\
\vec{v} &= (v \cdot cos\theta, v \cdot sen\theta) \\
\vec{v} &= x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} \\
\vec{v} &= v \cdot cos\theta \, \vec{\imath} + v \cdot sen\theta \, \vec{\jmath}
\end{aligned}$$

los valores de x e y se llaman componentes del vector, $\vec{v}$ y son fundamentales para la determinación del vector. Y esto justifica, de manera natural, la igualdad entre vectores: Dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son

Ejercicios 3. Un bote tiene una *rapidez* de **u** m/hr y debe atravesar en línea recta un río que fluye con una rapidez uniforme de v m/hr ¿en que dirección debería el bote enfilar, y cuál es la velocidad resultante?, ¿es siempre posible el viaje?

Supongamos que la dirección del bote se determina mediante un ángulo α respecto de una línea perpendicular a ambas orillas del río, y sean **X** e **Y** los ejes elegidos según se indican en la figura siguiente



La **velocidad** resultante del bote la denotaremos por $\overrightarrow{w}$, y se debe a la suma de la velocidad $\overrightarrow{u}$ y a la velocidad del río $\overrightarrow{v}$, esto es

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \tag{1.1}$$

Sea $\left|\overrightarrow{u}\right| = u$, $\left|\overrightarrow{w}\right| = w$, y sean $\overrightarrow{\imath}$ y $\overrightarrow{\jmath}$ los vectores canónicos usuales. Entonces se concluye que $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$ tienen los siguientes valores

$$\overrightarrow{u} = -u\ sen\alpha\,\overrightarrow{\imath} + u\ cos\alpha\,\overrightarrow{\jmath} \quad ; \overrightarrow{v} = v\,\overrightarrow{\imath} \quad ; \overrightarrow{w} = w\,\overrightarrow{\jmath}$$

utilizando la igualdad (1.1) obtenemos las siguientes relaciones para las incógnitas w y α:

$$w = ucos\alpha \quad ; v = usen\alpha$$

de modo que la dirección requerida está determinada por el ángulo

$$\alpha = sen^{-1}(\frac{v}{u})$$

y la rapidez resultante se obtiene mediante

$$sen\alpha = \frac{v}{u}$$

que implica que

$$cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}}$$

como cada término de esta suma es no negativo, entonces necesariamente debe ocurrir que $(v_1 - w_1)^2 = 0$ y $(v_1 - w_1)^2 = 0$, y esto significa que $v_1 = w_1$ y $v_2 = w_2$, entonces se concluye que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$. A manera de ejercicio demuestre que si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$ entonces $\left|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\right| = 0$.

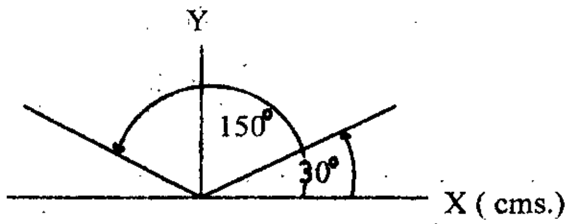
Es sencillo intuir que la norma de una diferencia entre dos vectores nos entrega una medida de la proximidad entre ambos vectores.†

En resumen, si $\left|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\right|$ está próximo al cero significa que $\overrightarrow{v}$ está próximo a $\overrightarrow{w}$. Es necesario decir que existen varias medidas de distancia, la que hemos entregado en esta sección se llama distancia o norma **euclideana**, otra distancia es la que hemos definido en el ejercicio 1 de la página 36.

Ejercicios‡.

1. Un vector $\overrightarrow{a}$ tiene una magnitud de 5 centímetros y forma un ángulo de 30° con una recta de referencia **L**. Otro vector $\overrightarrow{b}$, en el plano determinado por $\overrightarrow{a}$ y **L**, tiene una norma igual a 2.5 centímetros y forma un ángulo de 150° con la recta **l** en el sentido antihorario. Determinar el vector $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, calcular su norma y el ángulo que forma con la recta **L**.

Solución: La recta **L** representará el eje **X**, luego al fijar los vectores en relación a esta recta, donde estos vectores tiene un origen común y por este origen trazamos el eje **Y**, la situación luce del siguiente modo:



y es fácil deducir las componentes de ambos vectores, a saber

$$\overrightarrow{a} = (5cos30°, 5sen30°)$$

$$\overrightarrow{b} = (-2.5cos30°, 2.5sen30°)$$

es sabido que $cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y que $sen30° = \frac{1}{2}$, por lo tanto

$$\overrightarrow{a} = (\frac{5}{2}\sqrt{3}, \frac{5}{2})$$

$$\overrightarrow{b} = (-\frac{5}{4}\sqrt{3}, \frac{5}{4})$$

† Se dice que **d** es una distancia entre vectores si satisface lo siguiente:

i) $\mathbf{d}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \geq 0$ y la igualdad ocurre si y solamente si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.

ii) $\mathbf{d}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \mathbf{d}(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$.

iii) $\mathbf{d}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) \leq \mathbf{d}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + \mathbf{d}(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})$

cualquiera sean los vectores $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{w}$, y donde **d** es una función real con dominio en $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

‡ Agradezco al profesor Reinaldo Muñoz, del Departamento de Ciencias Naturales de U.D.A, por la lectura de sus apuntes de Cinemática, que es de donde provienen estos ejercicios, y posiblemente ha ayudado en la orientación de esta sección.

ahora sea $\vec{c} = (c_1, c_2)$ entonces se trata de encontrar m, n tal que

$$(c_1, c_2) = m \cdot (a_1, a_2) + n \cdot (b_1, b_2)$$

lo que se traduce en resolver el siguiente sistema,

$$\begin{array}{ccccc} m \cdot a_1 & + & n \cdot b_1 & = & c_1 \\ m \cdot a_2 & + & n \cdot b_2 & = & c_2 \end{array}$$

y es claro que este sistema tiene una única solución en virtud de que el determinante de la matriz de diseño es distinto de cero. Los valores de m y n se obtienen de la manera habitual utilizando Gauss-Jordan.

En virtud del ejercicio anterior es necesario recalcar la noción geométrica de no-linealidad con dependencia lineal.

2. Dependencia lineal entre vectores en el plano.

Supongamos que tenemos dos vectores en el plano, digamos $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Diremos que estos vectores son colineales si son linealmente dependientes, esto es si uno es múltiplo (por un escala) del otro. Por ejemplo, sean

$$\vec{v} = (3, -2) \qquad ; \qquad \vec{u} = (9, -6)$$

entonces ambos son linealmente dependientes puesto que

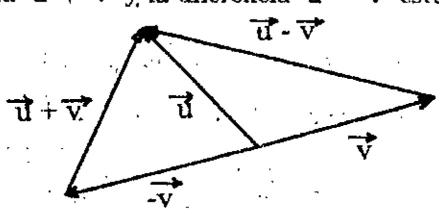
$$\vec{u} = 3 \cdot \vec{v}$$

$$(9, -6) = 3 \cdot (3, -2)$$

La idea geométrica adyacente es que si $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son linealmente dependientes entonces estos vectores son paralelos.

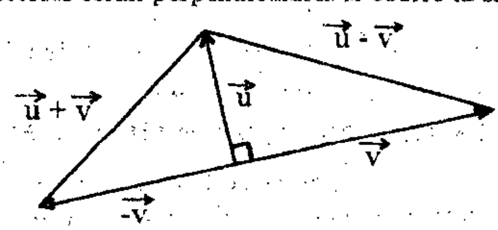
3. Vectores perpendiculares en el plano.

Vamos a estudiar la condición de perpendicularidad entre dos vectores. Sean dos vectores $\vec{v} = (a, b)$ y $\vec{u} = (c, d)$, luego la suma $\vec{u} + \vec{v}$ y la diferencia $\vec{u} - \vec{v}$ está dada graficamente por



Gráfica 3.1

notemos ahora que estos dos vectores serán perpendiculares si ocurre la situación



Gráfica 3.2

4. El ángulo entre dos vectores en el plano.

Supongamos que $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ son dos vectores en el plano y que tiene la ubicación en el plano según la figura 4.1. Supongamos que el ángulo entre estos dos vectores es ψ. Nuestro propósito es calcular el valor de ese ángulo en función de los vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$.

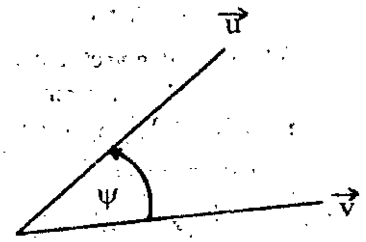


Figura 4.1

Designemos por $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ al vector obtenido al proyectar $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ sobre $\overrightarrow{\mathbf{v}}$. Luego el vector $\overrightarrow{\mathbf{p}}$ es linealmente dependiente de $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, es decir existe un λ tal que

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}$$

la situación se visualiza en la figura 4.2,

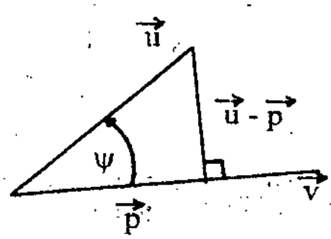


Figura 4.2

observemos que el vector $\overrightarrow{\mathbf{u}} - \overrightarrow{\mathbf{p}}$ es perpendicular al vector $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ (y también al vector $\lambda \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}$), entonces $\overrightarrow{\mathbf{u}} - \lambda \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}$ debe ser perpendicular a $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, esto es

$$(\overrightarrow{\mathbf{u}} - \lambda \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}} = 0$$

entonces $\overrightarrow{\mathbf{u}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{v}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}$, y se concluye que

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{\mathbf{u}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}}{\overrightarrow{\mathbf{v}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}}}$$

y este valor de λ es el factor de proyección del vector $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ sobre $\overrightarrow{\mathbf{v}}$.

Ahora el ángulo ψ entre $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ se calcula mediante los elementos de trigonometría elemental. En efecto, según la figura 4.2 se tiene que

$$cos\psi = \frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{p}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right|} = \frac{\lambda \left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right|}$$

A modo de ejemplo supongamos que el valor del ángulo está dado por la función $\theta(t) = t^2$, entonces el vector posición para el tiempo $t = 0$ está dado por

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(\theta(0)) = r cos(0) \cdot \overrightarrow{\imath} + r sen(0) \cdot \overrightarrow{\jmath} = r \cdot \overrightarrow{\imath}$$

y en general para cualquier tiempo t,

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(\theta(t)) = r cos(t^2) \cdot \overrightarrow{\imath} + r sen(t^2) \cdot \overrightarrow{\jmath}$$

Aun cuando el ángulo θ dependa del tiempo t es costumbre expresar el vector posición simplemente como

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(\theta) = r cos(\theta) \cdot \overrightarrow{\imath} + r sen(\theta) \cdot \overrightarrow{\jmath}$$

Ahora bien, describamos el vector posición para el ángulo $\theta + \triangle\theta$ y realicemos la operación siguiente $\overrightarrow{\mathbf{r}}(\theta + \triangle\theta) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\theta)$, como lo indica el gráfico siguiente,

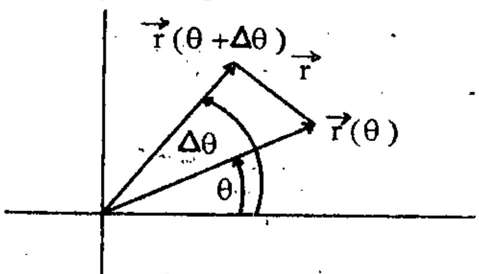


Figura 5.2

El vector $\overrightarrow{\mathbf{r}}(\theta + \triangle\theta) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\theta)$ denota el recorrido neto realizada por la partícula (y no el arco de trayectoria que realiza). Vectorialmente

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(\theta + \triangle\theta) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\theta) = r cos(\theta + \triangle\theta) \cdot \overrightarrow{\imath} + r sen(\theta + \triangle\theta) \cdot \overrightarrow{\jmath} - (r cos(\theta) \cdot \overrightarrow{\imath} + r sen(\theta) \cdot \overrightarrow{\jmath})$$

$$\overrightarrow{\mathbf{r}}(\theta + \triangle\theta) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\theta) = r(cos(\theta + \triangle\theta) - cos(\theta)) \cdot \overrightarrow{\imath} + r(sen(\theta + \triangle\theta) - sen(\theta)) \cdot \overrightarrow{\jmath}$$

si este vector desplazamiento lo dividimos por $\triangle\theta$ obtendremos

$$\frac{\overrightarrow{\mathbf{r}}(\theta + \triangle\theta) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\theta)}{\triangle\theta} = r\left(\frac{cos(\theta + \triangle\theta) - cos(\theta)}{\triangle\theta}\right) \cdot \overrightarrow{\imath} + r\left(\frac{sen(\theta + \triangle\theta) - sen(\theta)}{\triangle\theta}\right) \cdot \overrightarrow{\jmath}$$

y este valor nos indica la velocidad media de la partícula al describir el arco determinado por $\triangle\theta$, o si se quiere es la velocidad media desde la posición $\overrightarrow{\mathbf{r}}(\theta)$ hasta $\overrightarrow{\mathbf{r}}(\theta + \triangle\theta)$. Ahora si hacemos tender $\triangle\theta \longrightarrow 0$ obtenemos la velocidad instantanea de la partícula en la posición $\overrightarrow{\mathbf{r}}(\theta)$. A saber

$$\lim_{\triangle\theta \to 0} \frac{\overrightarrow{\mathbf{r}}(\theta + \triangle\theta) - \overrightarrow{\mathbf{r}}(\theta)}{\triangle\theta} = r\left(lim_{\triangle\theta \to 0} \frac{cos(\theta + \triangle\theta) - cos(\theta)}{\triangle\theta}\right) \cdot \overrightarrow{\imath} + r\left(lim_{\triangle\theta \to 0} \frac{sen(\theta + \triangle\theta) - sen(\theta)}{\triangle\theta}\right) \cdot \overrightarrow{\jmath}$$

y es sabido que

$$lim_{\triangle\theta \to 0} \frac{cos(\theta + \triangle\theta) - cos(\theta)}{\triangle\theta} = -sen(\theta) \quad ; \qquad lim_{\triangle\theta \to 0} \frac{sen(\theta + \triangle\theta) - sen(\theta)}{\triangle\theta} = cos(\theta)$$

Los vectores canónicos en $\mathbf{R}^3$ son

$$\overrightarrow{\imath} = (1,0,0) \quad , \quad \overrightarrow{\jmath} = (0,1,0) \quad , \quad \overrightarrow{k} = (0,0,1)$$

y es claro que cualquier vector en el espacio se puede poner como combinación lineal de estos tres vectores canónicos. Por ejemplo

$$(1,3,5) = \overrightarrow{\imath} + 3\overrightarrow{\jmath} + 5\overrightarrow{k}$$

en general

$$(x,y,z) = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}$$

Un vector en el espacio se puede visualizar mediante la gráfica siguiente:

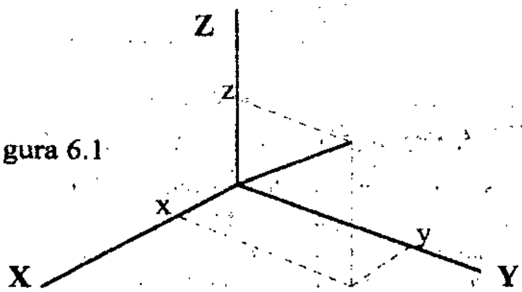
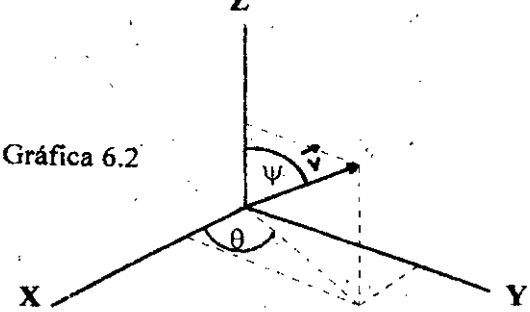


Figura 6.1

En la Física y en el Cálculo Vectorial es muy útil la siguiente representación para el vector $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$



Gráfica 6.2

donde

$r = \left|\overrightarrow{\mathbf{v}}\right| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$, es la norma del vector $\overrightarrow{\mathbf{v}}$

θ: es el ángulo comprendido entre el eje $\mathbf{X}$ y la proyección de $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ sobre el plano $\mathbf{XY}$. θ varía entre 0 y 2π.

ψ: es el ángulo comprendido entre el eje $\mathbf{Z}$ y el vector $\overrightarrow{\mathbf{v}}$. ψ varía entre 0 y π. Este ángulo nos indica en que hemisferio se encuentra la punta de la flecha de $\overrightarrow{\mathbf{v}}$.

Ahora con la ayuda de la trigonometría elemental es fácil concluir que

$$\begin{aligned} v_1 &= rsen(\psi)cos(\theta) \\ v_2 &= rsen(\psi)sen(\theta) \\ v_3 &= rcos(\psi) \end{aligned}$$

luego el vector $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ admite la representación

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} = (rsen(\psi)cos(\theta))\overrightarrow{\imath} + (rsen(\psi)sen(\theta))\overrightarrow{\jmath} + (rcos(\psi))\overrightarrow{k}$$

$$y - b = \lambda u_2$$

$$z - c = \lambda u_3$$

luego

$$\begin{aligned} x &= a + \lambda u_1 \\ y &= b + \lambda u_2 \\ z &= c + \lambda u_3 \end{aligned} \tag{7.1}$$

y esto significa que para que un punto (x, y, z) se precie de estar en la recta que pasa por el punto (a, b, c) y que tiene la dirección indicada por el vector (u_1, u_2, u_3), debe satisfacer las ecuaciones (7.1). Estas ecuaciones son llamadas ecuaciones paramétricas de la recta. Notemos que para cada valor que le damos a λ obtenemos un punto que pertenece a la recta con las condiciones dadas.

Veamos un ejemplo. Debemos encontrar la recta que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y tiene la dirección dada por el vector $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath} + 3\overrightarrow{k}$. Según lo anterior, los puntos que pertenecen a dicha recta están dados por

$$\begin{aligned} x &= 1 + \lambda 1 \\ y &= 1 + \lambda 2 \\ z &= 1 + \lambda 3 \end{aligned}$$

notemos que en particular para $\lambda = 0$ se obtiene el punto $(1, 1, 1)$; para $\lambda = 1$, se obtiene el punto $(2, 3, 4)$. En definitiva la recta está formada por el conjunto de puntos de la forma

$$(1 + \lambda, 1 + 2\lambda, 1 + 3\lambda) \qquad \lambda \in \mathbf{R}$$

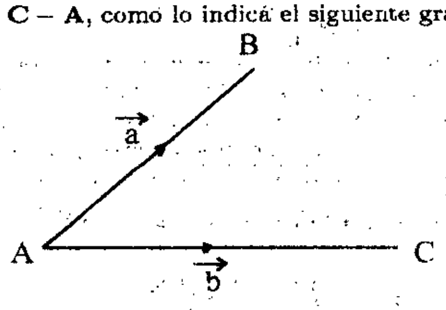
La particularización en el plano cartesiano es claramente obvia, en éste caso no existe tercera componente, luego las ecuaciones paramétricas correspondientes son las dos primeras ecuaciones de (7.1).

Supongamos ahora (observando las ecuaciones (7.1)) que las componentes u_i del vector $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ son todas no nulas, entonces se tiene que

$$\frac{x - a}{u_1} = \frac{y - b}{u_2} = \frac{z - c}{u_3} \tag{7.2}$$

y esta ecuación es llamada la ecuación normal de la recta.

Ahora vamos a desarrollar los elementos para determinar la ecuación de un plano que para por tres puntos no-colineales. Supongamos que tenemos tres puntos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ que no pertenecen a una misma recta, luego con estos puntos podemos formar dos vectores que serán linealmente independientes como por ejemplo $\overrightarrow{\mathbf{a}} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ y $\overrightarrow{\mathbf{b}} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$, como lo indica el siguiente gráfico



Gráfica 7.2

Recordemos que

$$cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|}$$

de lo cual se deduce que

$$sen(\alpha) = \sqrt{1-(cos(\alpha))^2} = \sqrt{1 - \frac{(\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}})^2}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2}}$$

ahora multipliquemos este valor por $\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|$, obteniendo

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| sen\alpha = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| \sqrt{1 - \frac{(\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}})^2}{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2}} = \sqrt{\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 - (\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}})^2}$$

ahora si desarrollamos la última cantidad subradical en términos de las compopnentes de los vectores $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, nos queda

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right|^2 - (\overrightarrow{\mathbf{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{b}})^2 = (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \tag{7.4}$$

Por otro lado vamos a calcular la norma del vector dado en (7.3), que es

$$\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$

y no es difícil deducir (expandiendo) que esta cantidad subradical es igual a la expresión (7.4). Si a la expresión (7.3) la denotamos por

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \times \overrightarrow{\mathbf{b}} = (a_2b_3-a_3b_2)\overrightarrow{\imath} + (a_3b_1-a_1b_3)\overrightarrow{\jmath} + (a_1b_2-a_2b_1)\overrightarrow{k} \tag{7.5}$$

entonces hemos probado que

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}} \times \overrightarrow{\mathbf{b}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right|\left|\overrightarrow{\mathbf{b}}\right| sen\alpha \tag{7.6}$$

En definitiva hemos demostrado que entre todos los vectores perpendiculares al plano generado por los vectores $\overrightarrow{\mathbf{a}} = (a_1,a_2,a_3)$ y $\overrightarrow{\mathbf{b}} = (b_1,b_2,b_3)$ el vector $\overrightarrow{\mathbf{a}} \times \overrightarrow{\mathbf{b}} = (a_2b_3-b_2a_3, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1)$ satisface la atractiva propiedad (7.6).

Antes de ver la importancia de este vector $\overrightarrow{\mathbf{a}} \times \overrightarrow{\mathbf{b}}$ en la determinación de un plano, obsevemos lo siguiente: La expresión (7.5), como simple regla nemotécnica, es nominalmente igual a

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \times \overrightarrow{\mathbf{b}} = det \begin{pmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

de lo cual se deduce que

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} \times \overrightarrow{\mathbf{b}} = -(\overrightarrow{\mathbf{b}} \times \overrightarrow{\mathbf{a}})$$

ahora calculamos el producto cruz

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} \times \overrightarrow{\mathbf{AC}} = det\begin{pmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix} = -6\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath} + 11\overrightarrow{k}$$

con el punto **A** y el punto genérico $\mathbf{X} = (x, y, z)$ que pertenece al plano formamos el vector $\overrightarrow{\mathbf{AX}} = (x-1, y-2, z-3)$ que debe ser perpendicular a $-6\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath} + 11\overrightarrow{k}$. Esto es

$$(x-1, y-2, z-3) \cdot (-6, -1, 11) = -6x - y + 11z - 25 = 0$$

luego la ecuación del plano buscado es

$$-6x - y + 11z = 25$$

8. Vectores n-dimensionales

Encontrar una rápida aplicación para los vectores en el plano (2-dimensional) o los vectores en el espacio (3-dimensional) no resulta complicado puesto que es nuestro mundo físico más inmediato. Hablar del vector $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1, 3, -5, 7, -2)$ de dimensión 5 no puede tener el mismo tratamiento que el que hemos visto para 2 y 3 dimensiones. Una ruta de escape es considerar estos vectores como matrices de $1 \times n$, y es en definitiva así como lo hemos tratado en los capítulos iniciales. Sin embargo podemos encontrar buenas aplicaciones si nos aseguramos que estos vectores de dimension $n > 3$ se comportan como los vectores planares o espaciales.

Un vector $n-$dimensional es una matriz de $1 \times n$ y que denotaremos de la forma

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n)$$

Sin embargo, con cierta frecuencia, la notación usada es como una matriz de $n \times 1$, esto es

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

donde está claro que uno es la traspuesta del otro. Salvo que indiquemos lo contrario vamos a trabajar con la primera expresión. La norma de este vector se define como

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{a}}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

Observe que corresponde a la generalización de la norma euclideana en 2 y 3 dimensiones, y en definitiva nos entrega una medida de proximidad en torno del vector $(0, 0, ..., 0, 0)$.

La suma, diferencia y producto entre un escalar (número real) y un vector se entiende como las operaciones matriciales vistas anteriormente. Esto es, si $\overrightarrow{\mathbf{a}} = (a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$, $\overrightarrow{\mathbf{b}} = (b_1, \cdots, a_i \cdots, b_n)$ y $\alpha \in \mathbf{R}$ entonces

$$\overrightarrow{\mathbf{a}} + \overrightarrow{\mathbf{b}} = (a_1 + b_1, \cdots, a_i + b_i, \cdots, a_n + b_n)$$

y puestos que estos vectores son linealmente independientes entonces esta matriz tiene un determinante distinto de cero, y esto implica que el determinante de la traspuesta también es distinto de cero, es decir,

$$det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1i} & v_{2i} & \cdots & v_{ni} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$$

lo cual nos indica que el rango de esta matriz también es n (rango completo). Tengamos esto en mente puesto que será fundamental para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Sea el vector $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, vamos a demostrar que existen α_i, $i = 1 \cdots n$, escalares tal que

$$\vec{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{\mathbf{v}}_i \tag{8.1}$$

esta ecuación es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 v_{11} + \alpha_2 v_{21} + \cdots + \alpha_n v_{n1} \\ a_2 &= \alpha_1 v_{12} + \alpha_2 v_{22} + \cdots + \alpha_n v_{n2} \\ &\vdots \\ a_n &= \alpha_1 v_{1n} + \alpha_2 v_{2n} + \cdots + \alpha_n v_{nn} \end{aligned}$$

y que en su forma matricial es

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{12} & v_{21} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

y puesto que el determinante de esta matriz de diseño es distinto de cero, se tiene que la solución es única, y existen $\{\alpha_i\}$ tal que se cumple (8.1). Y con esto queda demostrado (ii).
iii) Es inmediato a consecuencia de (ii).

La propiedad (ii) también nos dice que si $\{\vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_n\}$ es una base para $\mathbf{R}^n$ entonces cualquier subcolección (propia) de esta no puede generar a todos los vectores de $\mathbf{R}^n$. En efecto, sin pérdida de generalidad consideremos la subcolección $\{\vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_{n-1}\}$, entonces es claro que no existen $\{\alpha_i; i = 1, \cdots, n-1\}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{v}}_n$$

En resumen, podemos asegurar que cualquier base de $\mathbf{R}^n$ debe tener n--vectores linealmente independientes. A modo de ejemplo vamos a demostrar que los vectores $\vec{\mathbf{v}}_1 = (1, 2, 3, 1)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (2, 1, 0, -1)$, $\vec{\mathbf{v}}_3 = (-1, 2, 0, 1)$ y $\vec{\mathbf{v}}_4 = (0, 0, 1, 1)$ constituyen una base para $\mathbf{R}^4$. En efecto, basta demostrar que estos vectores son linealmente independientes, y una manera de verificarlo es calcular el determinante

A modo de ejemplo consideremos el vector $\vec{\mathbf{a}} = (1,2,1,3)$ de modo que su norma es $\left|\vec{\mathbf{a}}\right| = \sqrt{15}$. Entonces formamos el vector

$$\frac{\vec{\mathbf{a}}}{\left|\vec{\mathbf{a}}\right|} = \frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3,1) = (\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}})$$

cuya norma es claramente 1.

Ahora extenderemos el concepto de perpendicularidad en el espacio para vectores n−dimensionales. Se dice que los vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ de $\mathbf{R}^n$ son ortogonales si

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$$

Como ejemplo estudiemos si los vectores $\vec{\mathbf{a}} = (1,0,1,-3)$ y $\vec{\mathbf{b}} = (2,3,4,2)$ son ortogonales. En efecto

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 2 + 0 + 4 - 6 = 0$$

Aclarados los conceptos de vectores unitarios y vectores ortogonales, podemos definir lo que se entiende por un base **ortonormal.** Sea $\{\vec{\mathbf{a}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{a}}_i, \cdots, \vec{\mathbf{a}}_n\}$ una base para $\mathbf{R}^n$, entonces se dice que esta base es **ortonormal** si cada vector de la base es un vector unitario, y si cada par de vectores de esta base son ortogonales.

Es claro que la base canónica es ortonormal, sin embargo el problema es ¿cómo encontrar una base ortonormal distinta de la canónica?. La respuesta se traduce en encontrar cualquier base distinta de la canónica, luego esta se ortogonaliza y despues se normaliza. ¿Cómo ortogonalizar?

Supongamos que $\{\vec{\mathbf{v}}_1, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_i, \cdots, \vec{\mathbf{v}}_n\}$ es una base arbitraria de $\mathbf{R}^n$, entonces el siguiente procedimiento, conocido como Proceso de Gram-Schmidt, nos entrega una base ortogonal:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}'_1 &= \vec{\mathbf{v}}_1 \\
\vec{\mathbf{v}}'_2 &= \vec{\mathbf{v}}_2 - \frac{\vec{\mathbf{v}}_2 \cdot \vec{\mathbf{v}}'_1}{\vec{\mathbf{v}}'_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}'_1}\vec{\mathbf{v}}'_1 \\
\vec{\mathbf{v}}'_3 &= \vec{\mathbf{v}}_3 - \frac{\vec{\mathbf{v}}_3 \cdot \vec{\mathbf{v}}'_2}{\vec{\mathbf{v}}'_2 \cdot \vec{\mathbf{v}}'_2}\vec{\mathbf{v}}'_2 - \frac{\vec{\mathbf{v}}_3 \cdot \vec{\mathbf{v}}'_1}{\vec{\mathbf{v}}'_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}'_1}\vec{\mathbf{v}}'_1 \\
\vdots &= \vdots \\
\vec{\mathbf{v}}'_n &= \vec{\mathbf{v}}_n - \frac{\vec{\mathbf{v}}_n \cdot \vec{\mathbf{v}}'_{n-1}}{\vec{\mathbf{v}}'_{n-1} \cdot \vec{\mathbf{v}}'_{n-1}}\vec{\mathbf{v}}'_{n-1} - \cdots - \frac{\vec{\mathbf{v}}_n \cdot \vec{\mathbf{v}}'_1}{\vec{\mathbf{v}}'_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}'_1}\vec{\mathbf{v}}'_1
\end{aligned}$$

Resulta bastante tedioso demostrar que efectivamente estos $\{\vec{\mathbf{v}}'_i\}$ constituyen un conjunto de vectores propiedad: Consideremos los vectores claramente ortonormales $\overrightarrow{\mathbf{a}}_1 = (1,0,0)$, $\overrightarrow{\mathbf{a}}_2 = (0, 2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ y $\overrightarrow{\mathbf{a}}_3 = (0, -1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ y formemos la matriz $\mathbf{P}$ cuyas columnas son los vectores dados

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

la traspuesta de esta matriz es

$$\mathbf{P}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Ahora efectuemos el producto $\mathbf{PP}^t$, y se concluye que

$$\mathbf{PP}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y no es complicado asegurar que $\mathbf{P}^t\mathbf{P} = \mathbf{I}_{3\times 3}$.

Luego podemos concluir que si una matriz cuadrada de $n \times n$ está formada por vectores filas $n-$dimensionales de modo que estos vectores son ortonormales, entonces la inversa de esta matriz es la traspuesta. Esta propiedad tiene buenas consecuencias. Supongamos que la tenemos una matriz $\mathbf{P}$ construida con la propiedad anterior (esto es que sus filas sean ortonormales), de $n \times n$ y sea $\mathbf{A}$ otra matriz de de $n \times n$, y definamos el producto $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^t$, entonces se deduce que

$$\mathbf{B}^m = \underbrace{(\mathbf{PAP}^t)\cdots(\mathbf{PAP}^t)\cdots(\mathbf{PAP}^t)}_{m \text{ veces}}$$

asociando convenientemente y recordando que $\mathbf{P}^t\mathbf{P} = \mathbf{I}$ se concluye que

$$\mathbf{B}^m = \mathbf{PA}^m\mathbf{P}^t$$

esto es la operación potencia $m-$ésima sobre el producto $\mathbf{PAP}^t$ afecta solamente a la matriz $\mathbf{A}$.

9. Estimación en Mínimos Cuadrados.

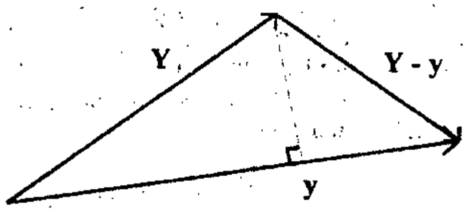
En esta sección daremos una aplicación de los vectores $n-$dimensionales a la Estadística. La clave central del siguiente desarrollo dependerá del concepto de perpendicularidad.En lo que sigue vamos a considerar los vectores $n-$dimensionales "de pie", esto es por ejemplo

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_i \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

Supongamos que en el estudio de cierto fenómeno se han tomado mediciones de dos variables, digamos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, donde el número de mediciones realizadas es n, esto es

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

dimensiones: Supongamos que podemos "graficar" los vectores $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{y}$



donde se especifica el vector $\mathbf{Y}-\mathbf{y}$, y es claro que el valor de $|\mathbf{Y}-\mathbf{y}|$ será mínimo si el vector $\mathbf{Y}-\mathbf{y}$ es perpendicular a $\mathbf{Y}$, es decir

$$(\mathbf{Y}-\mathbf{y})^t \cdot \mathbf{Y} = 0 \tag{9.1}$$

puesto que $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{b}$ donde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_i \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

reemplazando el valor de $\mathbf{Y}$ en la igualdad (9.1) nos queda

$$(\mathbf{Xb}-\mathbf{y})^t \cdot \mathbf{Xb} = 0$$

trabajando con cuidado con la traspuesta y con el producto matricial nos va quedando

$$((\mathbf{Xb})^t - \mathbf{y}^t)\mathbf{Xb} = 0$$

$$(\mathbf{b}^t\mathbf{X}^t - \mathbf{y}^t)\mathbf{Xb} = 0$$

$$\mathbf{b}^t\mathbf{X}^t\mathbf{Xb} - \mathbf{y}^t\mathbf{Xb} = 0$$

factorizando en $\mathbf{b}$, obtenemos

$$(\mathbf{b}^t\mathbf{X}^t\mathbf{X} - \mathbf{y}^t\mathbf{X})\mathbf{b} = 0$$

una condición suficiente (aunque no necesaria) para que este producto sea nulo es que la expresión entre paréntises, esto es $(\mathbf{b}^t\mathbf{X}^t\mathbf{X} - \mathbf{y}^t\mathbf{X})$, que es de dimensión 1×2 sea igual al vector nulo $(0 \;\; 0)$, luego

$$\mathbf{b}^t\mathbf{X}^t\mathbf{X} - \mathbf{y}^t\mathbf{X} = \mathbf{0}_{1\times 2}$$

entonces

$$\mathbf{b}^t\mathbf{X}^t\mathbf{X} = \mathbf{y}^t\mathbf{X}$$

y aplicando a esta igualdad la traspuesta se tiene que

$$(\mathbf{b}^t\mathbf{X}^t\mathbf{X})^t = (\mathbf{y}^t\mathbf{X})^t$$

$$(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^t\mathbf{b} = \mathbf{X}^t\mathbf{y}$$

y la solución de este sistema es $\alpha = 10.4983$, $\beta = 0.488190$. De modo que el modelo que se desea ajustar a los datos es

$$\mathbf{y} = 10.4983 + 0.488190\mathbf{x}$$

Ahora si evaluamos esta función lineal para los valores de x_i, obtendremos los siguientes resultados, que los escribimos en forma vectorial y a la derecha ubicamos los resultados experimentales de los y_i

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_i \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47.1125 \\ 42.2306 \\ 44.1834 \\ 47.6007 \\ 51.0180 \\ 33.4432 \\ 44.6715 \\ 37.8369 \\ 42.2306 \\ 44.6715 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 40 \\ 48 \\ 43 \\ 53 \\ 33 \\ 43 \\ 39 \\ 43 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Si calculamos la norma de $\mathbf{Y} - \mathbf{y}$ obtenemos

$$|\mathbf{Y} - \mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} (Y_i - y_i)^2} = 7.10466 \tag{9.3}$$

La técnica de los mínimos cuadrados nos asegura que para el modelo $\mathbf{y} = \alpha + \beta\mathbf{x}$ cualquier otro valor que demos a los parámetros α y β el valor que se obtendrá para $|\mathbf{Y} - \mathbf{y}|$ será mayor o igual al obtenido en (9.3).

Lo interesante es que las ecuaciones normales (9.2) se obtuvieron independientemente del modelo lineal a estudiar, si bien es cierto que para fijar ideas partimos del modelo $\mathbf{y} = \alpha + \beta\mathbf{x}$, el razonamiento esencial fue de que en el modelo (teórico) $\mathbf{Y} = \mathbf{Xb}$ donde $\mathbf{b}$ es el vector de parámetros la mejor selección de $\mathbf{b}$ se obtiene exigiendo que los vectores $\mathbf{Xb} - \mathbf{y}$ y $\mathbf{Xb}$ sean perpendiculares.

Veamos otro modelo lineal, supongamos que en otro fenómeno se midieron las variables y_i, x_i, z_i, $\forall\ i \in \{1, \cdots, n\}$. El problema es encontrar los valores de α, β y γ que mejor se ajusten al modelo $\mathbf{y} = \alpha + \beta\mathbf{x} + \gamma\mathbf{z}$. La forma matricial de este modelo es

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_i \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_i & z_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

donde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_i & z_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & z_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

por ejemplo los siguientes vectores pertenecen a $\mathbf{V}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observemos que esta colección $\mathbf{V}$ admite la siguiente propiedad "cerrada"

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \forall v_1, v_2 \in \mathbf{V} \quad \alpha v_1 + \beta v_2 \in \mathbf{V} \tag{10.2}$$

En efecto, observemos que

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ w \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta z \\ 0 \\ \alpha y + \beta w \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto nos entrega una definición de subespacio (vectorial) de $\mathbf{R}^n$. Sea $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{R}^n$ entonces diremos que $\mathbf{V}$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$ si $\mathbf{V}$ satisface la propiedad (10.2)

Siguiendo con el mismo ejemplo (10.1) es claro que cualquier elemento de $\mathbf{V}$ admite la representación siguiente

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y también es claro que los dos vectores del lado derecho de la igualdad son linealmente independientes. Esta representación no es única, puesto que en general si a y $b \in \mathbf{R}$ no nulos ambos, entonces cualquier vector de $\mathbf{V}$ admite la representación

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{x}{a} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{y}{b} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

y no es necesario hacer cálculos tediosos para convencerse que los vectores a la derecha de la igualdad anterior son linealmente independientes, más aún ellos representan a todos los vectores linealmente independientes que son capaces de generar a cualquier elemento de $\mathbf{V}$. Se dice entonces que, en este caso, la dimensión de $\mathbf{V}$ es 2 (siempre hay dos vectores linealmente independientes que generan al espacio $\mathbf{V}$, que es un subespacio de $\mathbf{R}^n$).

Este sencillo desarrollo nos entrega las herramientas para determinar la dimensión de cualquier subespacio de $\mathbf{R}^n$, a saber: Es necesario y suficiente encontrar una colección de vectores linealmente independientes de tal forma que cualquier elemento del subespacio se pueda expresar como una combinación de estos vectores linealmente independientes.

Consideremos el siguiente ejemplo. Sea $\mathbf{V}$ el conjunto de vectores de $\mathbf{R}^3$ que sean solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10.3}$$

donde claramente los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes y por lo tanto forman una base para el espacio solución del sistema (10.5)

Lo que hemos hecho hasta ahora, en esta sección, es conocer cuando un determinado subconjunto de $\mathbf{R}^n$ es un subespacio, y cómo encontrar una base para este subespacio. En el próximo párrafo estudiaremos el problema inverso, esto es dado un conjunto de vectores linealmente independiente vamos a encontrar el espacio "generado" por estos vectores y probaremos que es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$.

Sean $v_1, v_2, \cdots, v_k$ k vectores $n-$dimensionales de $\mathbf{R}^n$ (con $k < n$) entonces estos $v_1, v_2, \cdots, v_k$ formarán un subespacio (propio) vectorial, digamos $\mathbf{V}$, de $\mathbf{R}^n$ donde cada elemento $v \in \mathbf{V}$ está caracterizado por

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \quad ; \quad \alpha_i \in \mathbf{R}$$

Es decir los elemento de $\mathbf{V}$ son generados de esta forma, por combinaciones lineales de $\{v_1, \cdots, v_k\}$. Ahora bien, sean v y w dos elementos de $\mathbf{V}$ vamos a demostrar que para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha v + \beta w \in \mathbf{V}$. En efecto, v y w son necesariamente de la forma

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \qquad w = \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i$$

entonces

$$\alpha v + \beta w = \alpha \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \beta \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \beta \beta_i v_i$$

si hacemos $\gamma_i = \alpha\alpha_i$ y $\delta_i = \beta\beta_i$, tenemos que

$$\alpha v + \beta w = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \delta_i v_i = \sum_{i=1}^{k} (\gamma_i + \delta_i) v_i$$

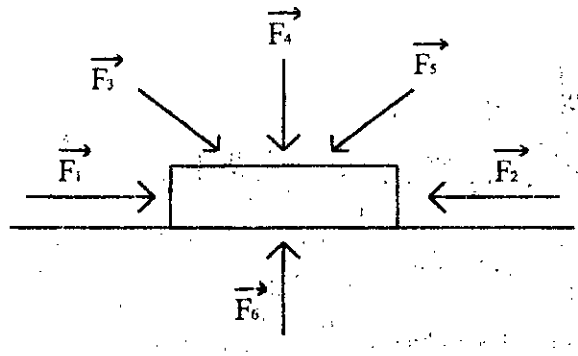
finalmente hacemos $\lambda_i = \gamma_i + \delta_i$ para obtener

$$\alpha v + \beta w = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \quad ; \quad \lambda_i \in \mathbf{R}$$

y es claro que $\alpha v + \beta w \in \mathbf{V}$.

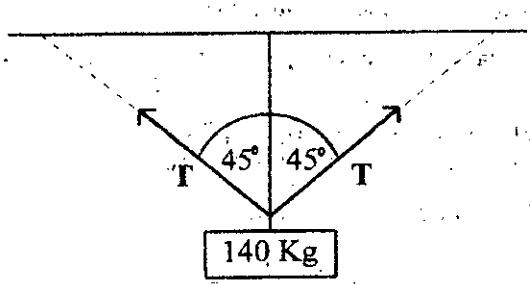
En general cualquier colección de vectores, digamos $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$, sea o no limealmente independiente, generará un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$, pero entonces no necesariamente constituirá una base. Vamos a clarificar esto con un ejemplo. Nos daremos dos colecciones de elementos de $\mathbf{R}^n$ y en cada caso calcularemos el subespacio generado,

i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

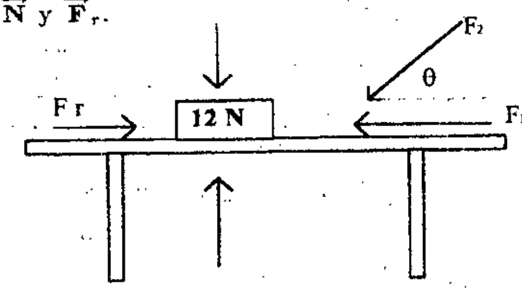


Recordemos que la magnitud de cada fuerza es $\left|\overrightarrow{\mathbf{F}}_i\right| = F_i = \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2}$. Este modelo es una consecuencia de la Segunda Ley de Newton: Si sobre un cuerpo actuan fuerzas y el cuerpo no se mueve entonces la suma de estas fuerzas es cero. De acuerdo a este modelo, con todas sus variaciones, resuelva los siguientes problemas:

a) Un peso de 140 Kg. se suspende como se muestra en la figura. Encontrar la magnitud de la tensión $\overrightarrow{\mathbf{T}}$.



b) De acuerdo a la figura siguiente, la fuerza $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ es la fuerza normal que ejerce la mesa sobre el objeto, $\overrightarrow{\mathbf{F}}_r$ es la fuerza de roce debido a la interacción de el material de la mesa y el objeto que se opone al movimiento (el cuerpo no se mueve y tiene un peso eqivalente a 12 N), $\overrightarrow{\mathbf{F}}_1$ y $\overrightarrow{\mathbf{F}}_2$ son fuerzas externas aplicadas al objeto y ambas son de magnitud $F_1 = 10N$ (Newtons) y $F_2 = 5N$, respectivamente.El ángulo θ vale 30°. Calcular $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{F}}_r$.



2. Si los vectores **AB** y **AD** son los lados adyacentes del paralelógramo **ABCD**, convenzase que las longitudes de las diagonales de este paralelógramo son $|\mathbf{AB} + \mathbf{AD}|$ y $|\mathbf{AB} - \mathbf{AD}|$.

3. Hallar el ángulo formado por el siguiente par de vectores:

a)$(1, 2)$ y $(2, 1)$
b)$(3, 5)$ y $(-5, 3)$

Pruebe que para cualquier par de vectores $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ de $\mathbf{R}^2$ se satisface que:

13. Hallar el valor de k para que los dos planos

$$kx - 2y + 2z - 7 = 0 \qquad 4x + ky - 6z + 9 = 0$$

sean perpendiculares entre si.

14. Hallar el ángulo formado por las rectas:

$$\mathbf{L}_1 : \frac{x-1}{-7} = \frac{y}{3} = \frac{2z+3}{-4}$$

$$\mathbf{L}_2 : \frac{x+5}{3} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z+9}{4}$$

Secciones 8 a 10

1. Encontrar una base para el subespacio de $\mathbf{R}^4$ generado por los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Nota: Un espacio generado por un conjunto de vectores está formado por todos los vectores que son combinación lineal del conjunto de vectores.

2. Demuestre que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es una base para $\mathbf{R}^n$. Además, a partir de esta, construya una base ortonormal para $\mathbf{R}^n$.

3. Sea $\mathbf{A}$ una matriz de $n \times m$, se define el **Kernel** de $\mathbf{A}$ como el conjunto de vectores, $\mathbf{x}$, de $\mathbf{R}^m$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Demostrar que el **Kernel** de $\mathbf{A}$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$. Y además encuentre una base para el **Kernel** de la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

4.† Un electrodo de plata es sumergido en una solución que contiene cloruro de sodio al 30%. Se realiza varias veces el experimento conforme a distintos volumenes de solución de cloruro de sodio ($\mathbf{V}$) medidos en ml. Para cada volumen se mide el Potencial del electrodo de plata ($\mathbf{E\ Ag}$). Se entregan los resultados

† Agradezco al Dr. German Cáceres, Director IDICTEC-UDA la publicación de estos datos experimentales que pertenecen a los diversos proyectos a su cargo.

Capítulo 5

Autovalores y Autovectores

Resumen. La sección 1 trata sobre el Polinomio Característico y para esto se estudia el comportamiento "polinomial" de las matrices diagonales, y entonces se pasa a las matrices que se generan mediante la relación $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal. Además se entrega el concepto de autovalor. En la sección 2 se estudian los espacios de autovectores asociados a los autovalores, se puntualiza en el cálculo de las dimensiones de estos espacios vectoriales. El polinomio minimal es estudiado en la sección 3, y se entrega la relación existente entre las multiplicidades geométricas y algebraicas de los autovalores de una matriz. Se entregan aplicaciones en la sección 4 del comportamiento asintótico de $\mathbf{A}^n$ para dos casos concretos. Finalmente en la sección 5 se estudian las condiciones para que una matriz $\mathbf{A}$ sea diagonalizable, esto es sobre la existencia y cálculo de una matriz $\mathbf{P}$ de modo que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal, con los autovalores de $\mathbf{A}$ en su diagonal.

1. Polinomio Característico

En lo que sigue solamente consideraremos matrices cuadradas. Sea $\mathbf{A}$ una matriz de $n \times n$, para esta matriz podemos definir la nueva matriz $p(\mathbf{A})$ donde $p(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_i\lambda + a_0$, como lo vimos en la sección 5 del capítulo 2,

$$p(\mathbf{A}) = a_n\mathbf{A}^n + \cdots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{I}_{n\times n}$$

Ahora bien, lo interesante sería que también pudiesemos evaluar esta matriz para series de potencia de la forma

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i\lambda^i$$

el problema es que ni siquiera podemos asegurar la convergencia de $\lim_{n\to\infty}\mathbf{A}^n$. Estudiemos un caso sencillo, sea la matriz diagonal

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y no resulta complicado probar que

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 & \\ 0 & (\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y en este caso resulta claro que

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sin embargo para la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Y con esto podemos asegurar que en virtud de la igualdad que hemos fabricado $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$

$$det\mathbf{A} = det\mathbf{D}$$

y es claro que el determinante de una matriz diagonal es el producto de los elementos de la diagonal, en nuestro caso particular

$$det\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 4$$

Entonces parece que los elementos de la matriz diagonal $\mathbf{D}$ tienen mucho que ver con la matriz $\mathbf{A}$. Sigamos insistiendo, es fácil comprobar que si una matriz diagonal tiene un cero en la diagonal entonces su determinante es cero (y no existe la inversa), entonces si ahora observamos atentamente nuestra matriz diagonal

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

nos preguntamos ¿de cuántas formas podemos anular un elemento de la diagonal?, la respuesta es sencilla, de tres formas, a saber si hacemos un cero para el 1, un cero para el 2 y un cero para el 3. De otra forma ¿para que valores de λ se hace un cero en la diagonal de la matriz $\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I}$?, especificamente ¿para qué valores de λ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

la resultante de esta matriz lleva un cero en la diagonal?. Es claro que para los λ exigidos, que en nuestro ejemplo particular son $\lambda = 1, 2, 4$, la matriz resultante en la operación $\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I}$ su determinante será cero. Ahora bien, si realizamos la misma operación sobre la matriz $\mathbf{A}$ ¿obtendremos los mismos resultados?. Si λ es un elemento de la diagonal entonces es claro que

$$det(\mathbf{P}(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{P}^{-1}) = 0$$

por otro lado observemos que

$$\mathbf{P}(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PDP}^{-1} - \lambda\mathbf{PP}^{-1} = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$$

y se concluye entonces que para los mismos λ que hacen un cero en la diagonal de $\mathbf{D}$ (y por lo tanto anulan su determinante) se cumple que

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Recapitulemos algo antes de seguir. En el desarrollo hasta ahora es irrelevante los valores de las matrices $\mathbf{D}$ y $\mathbf{A}$, lo que es esencial es que ambos están ligados por la relación $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, y nos sirvió para encontrar una insospechada importancia al polinomio

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \tag{1.2}$$

porque aún cuando $\mathbf{A}$ no adopte la forma (1.1) estamos casi seguro que nos entregará información relevante, y en beneficio de esta duda es que al polinomio (1.2) le daremos un nombre:**polinomio característico de A.**

tiene infinitas soluciones donde $\mathbf{x}$ es un vector de $n \times 1$.

Supongamos ahora que $\mathbf{x}_0$ es una solución, de las tantas, del sistema (2.1), entonces

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \lambda \mathbf{x}_0$$

a este valor de $\mathbf{x}_0$ se le dice **autovector** de la matriz $\mathbf{A}$ asociado al autovalor λ_0.

Por otro lado, de la sección 8 del capítulo anterior, recordemos que el conjunto de soluciones del sistema (2.1) o del sistema

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{x}$$

constituyen un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^n$, y a este subespacio lo designaremos por $\mathbf{V}_{\lambda_0}$. Y habrán tantos subespacios como autovalores distintos tenga la matriz $\mathbf{A}$. A continuación veremos un ejemplo. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

se pide encontrar los subespacios asociados a cada autovalor de esta matriz, y además encontrar una base para cada subespacio.
En primer lugar calculemos el polinomio característico,

$$det \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-5)^2$$

luego los autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda = 5$. Ahora resolvemos el sistema para $\lambda_1 = 1$, esto es

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

cuyo conjunto de soluciones está dado por

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad a \in \mathbf{R}$$

luego el subespacio $\mathbf{V}_1$ está definido por

$$\mathbf{V}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} ; a \in \mathbf{R} \right\}$$

y una base para este subespacio es el vector

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para el caso $\lambda = 5$, resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y la dimensión de este espacio es 2. Y para este caso la multiplicidad algebraica de $\lambda = 2$, que es 3, no coincide con su multiplicidad geométrica. Sin embargo este ejercicio nos permitirá hacer la introducción a otro polinomio importante. Para la matriz $\mathbf{B}$ anterior formemos el polinomio con los factores $(\lambda - 5)$ y $(\lambda - 2)$ pero ahora elevados a sus respectivas multiplicidades geométricas, esto es

$$(\lambda - 5)(\lambda - 2)^2$$

y evaluemos este polinomio en la matriz $\mathbf{B}$, esto es

$$(\mathbf{B} - 5\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{B} - 2\mathbf{I})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$(\mathbf{B} - 5\mathbf{I})(\mathbf{B} - 2\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces este polinomio tiene las siguientes propiedades
i) se anula en la matriz $\mathbf{B}$,
ii) las multiplicidades algebraicas de cada raíz coincide con las multiplicidades geométricas respectivas. Notemos además que el polinomio $(\lambda - 5)(\lambda - 2)^2$ divide al polinomio característico. Lo interesante del caso es que de todos los que dividen al polinomio característico este es el menor. En efecto, observemos que los polinomios $(\lambda - 5)$, $(\lambda - 2)$, $(\lambda - 2)^2$ y $(\lambda - 5)(\lambda - 2)$, que son de grado menor que $(\lambda - 5)(\lambda - 2)^2$, dividen al característico pero sin embargo no se anulan en la matriz $\mathbf{B}$.

Con este ejemplo estamos en condiciones de definir el polinomio minimal de una matriz cuadrada.

3. El Polinomio Minimal

Sea $\mathbf{A}$ una matriz de $n \times n$, con polinomio característico $p(\lambda)$, entonces se dice que $m(\lambda)$ es el polinimio minimal de $\mathbf{A}$ si:

a) $m(\lambda)$ divide a $p(\lambda)$,
b) $m(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$,
c) $m(\lambda)$ es el de menor grado para el cual (a) y (b) ocurre.

Un ejemplo. Calculemos el polinomio minimal de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

en primer lugar calculamos el polinomio característico

$$det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^3$$

Lo último necesita una demostración. Sea $\lambda_i \neq \lambda_j$, y supongamos que $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_i \cap \mathbf{V}_j$, luego como $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_i \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_i\mathbf{v}$, por otro lado $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_j \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_j\mathbf{v}$. de lo que se desprende que $\lambda_i\mathbf{v} = \lambda_j\mathbf{v}$ y esta igualdad ocurre si y solamente si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

4. Aplicaciones: Comportamiento Asintótico

Supongamos que el el polinomio minimal de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ está dado por $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{m_i} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ de tal manera que

$$m_1 + \cdots + m_i + \cdots + m_k = n \quad *$$

entonces es claro que cada base del espacio $\mathbf{V}_{\lambda_i}$ hará un aporte para formar una base para el espacio $\mathbf{R}^n$†, luego cualquier elemento de $\mathbf{R}^n$ se puede expresar como una combinación lineal de n autovectores linealmente independientes de la matriz $\mathbf{A}$. Veamos un ejemplo. En la sección anterior trabajamos con la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio minimal es $(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2$ y para el subespacio $\mathbf{V}_1$ tenemos la base

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y para el subespacio $\mathbf{V}_5$ la base

$$\left\{ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y es claro que al reunir estos vectores ellos son claramente independientes y por lo tanto conforman una base para $\mathbf{R}^3$. Continuemos con la misma matriz para explicar el interesante resultado que queremos mostrar.

Supongamos que, por alguna razón, estamos interesados en el producto

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{A}^m \mathbf{x}_0 \tag{3.1}$$

donde $\mathbf{x}_0$ es, en este caso, un vector de de $\mathbf{R}^3$, luego cómo denotamos por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ los autovectores que constituyen una base, entonces existiraán a_1, a_2 y a_3 tales que

$$\mathbf{x}_0 = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3$$

entonces reemplazando este valor en (3.1), nos queda

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{A}^m\left(\sum_{i=1}^{3} a_i\mathbf{x}_i\right) = a_1\mathbf{A}^m\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{A}^m\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{A}^m\mathbf{v}_3$$

* Es equivalente a decir que el polinomio minimal coincide con el característico.

† Esto significa que $\cup_{i=1}^{k}\mathbf{V}_i = \mathbf{R}^n$ es decir la colección de los subespacios de los autovectores particionan a $\mathbf{R}^n$, puesto que $\mathbf{V}_i \cap \mathbf{V}_j = \mathbf{0} \quad i \neq j$.

Vamos a calcular los valores característicos de la matriz de diseño. Aplicando un software adecuado se tiene que los autovalores de la matriz son:

$$\lambda_1 = 1 \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9} \quad ; \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{3}$$

y puesto que la matriz es de 3×3, este resultado nos dice que el polinomio característico (que coincide con el minimal) es de la forma $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$. Y ya sabemos entonces que existirán tres autovectores de la matriz que conformarán una base para $\mathbf{R}^3$. Vamos a calcular ahora los espacios vectoriales asociados a los autovalores. Para $\lambda = 1$ se resuelve el sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y el espacio de las soluciones es

$$\mathbf{V}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a5/8 \\ a9/8 \end{pmatrix} \quad ; \quad a \in \mathbf{R} \right\}$$

y un vector particular, que es base, de este espacio es

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{8} \\ \frac{9}{8} \end{pmatrix}$$

Trabajando de manera análoga con los restantes autovalores, se tiene que para $\lambda_2 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9}$ el espacio asociado es

$$\mathbf{V}_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -a(\frac{\sqrt{3}}{3} + 1) \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad a \in \mathbf{R} \right\}$$

y una base particular de este espacio es

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

y para el autovalor $\lambda_3 = \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{3}$ se tiene

$$\mathbf{V}_{\lambda_3} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1) \\ -\frac{\sqrt{3}a}{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad a \in \mathbf{R} \right\}$$

que no han llegado a la madurez sexual; y hembras adultas (a) que tienen capacidad de reproducción. Vamos a suponer que la tasa de sobrevivencia,α, es la fracción de hembras jovenes que sobreviven de un año a otro, y que llegan a la madurez sexual (esto es una hembra recién nacida alcanza la madurez sexual en un año, supongamos que de primavera en primavera); y la tasa de sobrevivencia de una hembra adulta (madura sexualmente),β, es la fracción de adultas que sobreviven a la primavera siguiente. Sea finalmente k el promedio de huevos que pone una hembra adulta al final de cada primavera y que sobreviven hasta el próximo año (nacimiento efectivo). Con estas condiciones vamos a establecer la dinámica de este sistema. Definamos lo siguiente:

$\mathbf{P}_{j,n-1}$: a la población de hembras jovenes en el año $(n-1)-$ésimo, y

$\mathbf{P}_{a,n-1}$: a la población de hembras adultas en el año $(n-1)-$ésimo.

No resulta complicado deducir la primera ecuación

$$\mathbf{P}_{a,n} = \alpha\mathbf{P}_{j,n-1} + \beta\mathbf{P}_{a,n-1} \tag{3.2}$$

que se obtiene razonando de la siguiente manera (entre otras): las maduras del año n se generan por las jovenes del año $n-1$ que logran sobrevivir hasta el año n, esto es $\alpha\mathbf{P}_{j,n-1}$, más las adultas del año $n-1$ que logran sobrevivir hasta el próximo año n, esto es $\beta\mathbf{P}_{a,n-1}$. La segunda ecuación es:

$$\mathbf{P}_{j,n} = k\mathbf{P}_{a,n-1} \tag{3.3}$$

y se obtiene razonando como sigue: el número de pajaros hembras jovenes es producto de los huevos que fueron puestos por las hembras maduras en el año anterior $n-1$.

Las ecuaciones (3.2) y (3.3) se establecen matricialmente como

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{j,n} \\ \mathbf{P}_{a,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{j,n-1} \\ \mathbf{P}_{a,n-1} \end{pmatrix}$$

y como es usual en estas relaciones de recurrencia se tiene que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{j,n} \\ \mathbf{P}_{a,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{j,0} \\ \mathbf{P}_{a,0} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Vamos ahora a calcular el polinomio característico de la matriz de diseño. Tenemos que

$$p(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & k \\ \alpha & \beta-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \beta\lambda - k\alpha$$

y el cálculo de las raices se obtiene mediante

$$\lambda = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha k}}{2}$$

puesto que los factores k, α y β son positivos se tiene entonces que la cantidad subradical es positiva, de lo que se concluye que las raíces, digamos λ_1 y λ_2 son reales y distintas. Además es claro que la cantidad subradical es mayor que β y por lo tanto los autovalores son de distinto signo. Supongamos que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Tengamos en mente estos resultados.

Es claro entonces que para cada autovalor habrán sendos autovectores, digamos $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, que forman una base para $\mathbf{R}^2$. Entonces el vector $\mathbf{P}_0$ (del extremo derecho de (3.4) lo podemos expresar como una combinación lineal de esta base, sea

$$\mathbf{P}_0 = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 \tag{3.5}$$

es n puesto que estamos aceptando (4.3). Supongamos entonces que seleccionamos n autovectores linealmente independientes, lo más fácil es seleccionarlos mediantes sendas bases de cada $\mathbf{V}_i$, $i \in \{1, \cdots, k\}$, y que los denotamos por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$. La situación es la siguiente:

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_l \end{matrix}\right\} \text{ asociados a } \lambda_1 \text{ que es base de } \mathbf{V}_1$$

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{v}_{l+1} \\ \mathbf{v}_{l+2} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_p \end{matrix}\right\} \text{ asociados a } \lambda_2 \text{ que es base de } \mathbf{V}_2$$

$$\vdots \tag{4.4}$$

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{v}_r \\ \mathbf{v}_{r+1} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{matrix}\right\} \text{ asociados a } \lambda_k \text{ que es base de } \mathbf{V}_k$$

Ahora vamos a formar una matriz, que llamaremos $\mathbf{P}$, cuyas columnas serán los vectores $\mathbf{v}_j$, recuerde que estos vectores son de $n \times 1$, esto es

$$\mathbf{P} = (\,\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n\,)_{n\times n}$$

y formaremos la matriz diagonal $\mathbf{D}$, donde los elementos en la diagonal será todos los $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ que aunque se repitan nos debemos asegurar que la $j-$ésima columna de la matriz $\mathbf{P}$, que es el vector $\mathbf{v}_j$, corresponde al autovalor λ_j,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Vamos a probar ahora que

$$\mathbf{PD} = \mathbf{AP} \tag{4.5}$$

Nota: El siguiente desarrollo lo puede ir comprobando con lapiz y papel.

No es difícil convencerse que

$$\mathbf{PD} = (\,\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n\,)_{n\times n} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = (\,\lambda_1\mathbf{v}_1 \quad \lambda_2\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{v}_n\,)_{n\times n}$$

y puesto que $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ se tiene que

$$(\,\lambda_1\mathbf{v}_1 \quad \lambda_2\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{v}_n\,)_{n\times n} = (\,\mathbf{A}\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_n\,)_{n\times n}$$

lo que posiblemente sea difícil es convencerse que el lado derecho de esta última igualdad sea

$$(\,\mathbf{A}\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_n\,)_{n\times n} = \mathbf{A}\,(\,\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n\,)_{n\times n}$$

$$\mathbf{V}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} c \\ -4c/7 \\ 2c/7 \end{pmatrix} \; ; \; c \in \mathbf{R} \right\}$$

de cada subespacio sacamos sendos autovalores, a saber

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -4/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}$$

y entonces formamos la matriz

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -4/7 \\ -1 & 0 & 2/7 \end{pmatrix}$$

la inversa de esta matriz es

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & -2/3 \\ 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -7/6 & 7/6 \end{pmatrix}$$

de manera tal que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Debemos insistir que no todas las matrices son diagonalizables, veamos el siguiente contraejemplo: Sea

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

el polinomio caracrerístico de esta matriz es $p(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 2)^2$, y al calcular el espacio de los autovectores asociados a cada autovalor, tenemos los siguientes resultados

$$\mathbf{V}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \; ; a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

$$\mathbf{V}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \; ; c \in \mathbf{R} \right\}$$

y es claro que para el espacio vectorial $\mathbf{V}_2$ su dimensión es 2 y la dimensión del espacio $\mathbf{V}_5$ es 1, y la suma de estas dimensiones no llegan al valor 4, y por lo tanto no existen cuatro autovalores linealmente independientes. En definitiva la matriz $\mathbf{C}$ no es diagonalizable.

Para el mismo ejercicio anterior observe que si formamos el polinomio

$$m(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 2)^2$$

donde los exponentes de los factores lineales para cada autovalor (o raíz) son asignados los valores de las dimensiones respectivas, de sus espacios asociados, se tiene que este polinomio es el minimal de la matriz $\mathbf{C}$. De momento

$$m(\mathbf{C}) = (\mathbf{C} - 5\mathbf{I})(\mathbf{C} - 2\mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$$

6. La empresa CALBICOM, distribuidora de computadores, controla actualmente el 60% del mercado de la ciudad de Copiapó. Datos del año anterior muestran que 88% de sus clientes continúan fieles a CALBICOM, mientras que 12% de sus clientes cambiaron a otras distribuidoras. Además, 85% de los clientes de la competencia permanecieron leales a estas otras distribuidoras, mientras que el 15% restante cambió a CALBICOM. Considerando que estas tendencias continúan, determínese la parte del mercado que corresponde a CALBICOM: a) en 5 años, y b) a largo plazo.