Investigación de Operaciones II

(Versión Preliminar)

Dr. Manuel Barahona Droguett
Departamento de Matemática y
Ciencias de la Computación
Facultad de Ingeniería
Universidad de Atacama

Capítulo 4

El método simplex

4.1.1	El algoritmo simplex aplicado al problema de la compañía B & M	89
4.1.1.2	El modelo matemático	90
4.1.1.3	La solución básica	91
4.1.1.4	Las soluciones básicas factibles	92
4.1.1.5	Primera tabla simplex	93
4.1.1.6	Segunda tabla simplex	98
4.1.1.7	Interpretación de la primera iteración	100
4.1.1.8	La segunda iteración	101
4.1.1.9	Interpretación de la solución óptima	103
4.2	El análisis de sensibilidad	105
4.2.1	El análisis de sensibilidad del problema de la compañía B & M utilizando el algoritmo simplex.	105
4.2.2	La dualidad	108
4.3	Ejercicios propuestos	115
4.4	El uso de software en la programación lineal	117
4.5	Nuevos poderosos algoritmos	118
4.6	Mejoramiento en la eficiencia del método simplex.	120
4.7	Las computadoras personales	120

Capítulo 5

Las redes

5.1	El modelo de transporte y sus variantes	123
5.1.1	El modelo de transporte estandar	125
5.1.2	Resolución del programa de transporte utilizando el LINDO/PC	128

5.2.1	Resolución del programa de asignación utilizando el LINDO/PC	134
5.2.2	El modelo general para el programa de asignación	135
5.3	El modelo de tranasbordo	136
5.3.1	Solución del modelo de transbordo utilizando el LINDO/PC	139
5.3.2	El modelo general para el modelo de transbordo	140
5.4	Ejercicios propuestos	141
5.5	El problema de la ruta más corta	148
5.6	El algoritmo de la ruta más corta	149
5.7	Resumen del algoritmo	155
5.8	El problema del arbol expandido mínimo	156
5.9	El problema del flujo máximo	159
5.10	El problema del flujo máximo de vehículos en la ruta 5: año 2000	159
5.11	Un algoritmo de flujo máximo	160
5.12	Los pasos del algoritmo en el problema de flujo máximo de veículos en la ruta 5	161
5.14	Ejercicios propuestos	167
5.15	problemas de flujo máximo	171

Capítulo 6

Administración de proyectos

6.1	Introducción	175
6.2	Las redes en Pert/Cpm	176
6.3	La red Pert/Cpm para el proyecto de la compañía Astilleros S.A	178
6.4	Programación del proyecto: Ampliación del Restaurante Pellos S.A. utilizando Pert/Cpm	181
6.5	La ruta crítica	182
6.6	Análisis de la red Pert/Cpm de Pellos S.A.	188
6.7	El algoritmo de la ruta crítica Pert/Cpm	189
6.8	El Sistema Pert/Cost	189
6.9	Planificación y programación de los costos de un proyecto	190
6.10	Ejercicios propuestos	197

Capítulo 7

Los inventarios

7.1	Introducción	203
7.2	El modelo determinístico de la cantidad económica de pedido CEP	205
7.2.1	El modelo CEP aplicado a la compañía distribuidora de VinosTacam	205
7.2.1.1	La decisión de cuánto pedir en la compañía distribuidora de VinosTacam	207
7.2.1.2	Cuándo, y con qué frecuencia realizar los pedidos en la compañía de VinosTacam	211
7.3	El modelo determinístico del tamaño del lote de producción	212
7.3.1.3	La determinación del tamaño económico del lote de producción de la compañía Envasadora de mariscos, Bahía Blanca	212
7.4	El descuento por cantidades en el modelo de la cantidad económica de pedido. El caso de la compañía importadora de mariscos PiurImport	218
7.5	El método "Justo a Tiempo" en la administración de inventarios	222
7.6	Ejercicios propuestos	224

El método simplex

Aunque el **Método Simplex** es un algoritmo de naturaleza algebraica, está basado en algunos procedimientos geométricos bastante sencillos que lo transforman en una poderosa herramienta para resolver problemas de programación lineal; de hecho el LINDO/PC es un software que usa una versión del simplex. Actualmente existe una gran variedad de software basado en el **Simplex**, software que permite resolver programas de hasta 500 000 variables y otros tantos cientos de miles de restricciones. Una breve descripción del algoritmo nos ayudará a comprender cómo, mediante este método, se halla el punto de óptimo.

En el dicho algoritmo, cada iteración contiene la solución de un sistema de ecuaciones que permite, a su vez, obtener una nueva solución a la cual se le aplica la prueba de optimalidad. Tal como lo hicimos con los programas de dos variables, una interpretación gráfica es siempre útil para comprender los conceptos generales, de tal modo que usaremos gráficos con frecuencia para alcanzar nuestros objetivos. Comenzaremos el análisis del método describiendo el procedimiento algebraico que le es propio.

4.1.1 El algoritmo simplex aplicado al problema de la compañía B & M.

La compañía **B & M** importa componentes para ensamblar dos tipos de computadoras personales, los modelos **klone A** y **klone B**, y está interesada en desarrollar un programa semanal de producción para ambos tipos de computadores. El modelo klone A produce utilidades de 50 dólares por unidad, en cambio el modelo klone B genera 40 dólares de utilidad por unidad. Los ingenieros de la compañía estiman que se dispondrá de, a lo más, 150 horas de ensamblaje para la producción semanal, y los klones A y B requieren de 3 y 5 horas de tiempo de ensamblaje respectivamente. B & M tienen actualmente un inventario de sólo 20 monitores para el klone B, por lo que no puede ensamblar más que 20 unidades de este tipo. Por último la compañía dispone sólamente de 300 pies cúbicos de espacio para almacenar la producción y los klones A y B requieren de 8 y 5 pies cúbicos de espacio, respectivamente. Se trata de determinar el número de Klones A y B de tal modo que el programa de producción genere una utilidad sea máxima.

4.1.1.2 El modelo matemático

De acuerdo a las condiciones del problema llamaremos:

x_1 = número de unidades del klone A

x_2 = número de unidades del klone B

En consecuencia el programa matemático es el siguiente:

$$\max\ z = 50x_1 + 40x_2$$

sujeto a las restricciones:

$$\begin{array}{rcrcrl} 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 150 & \text{(tiempo de ensamble)} \\ & & x_2 & \leq & 20 & \text{(monitores para el klone B)} \\ 8x_1 & + & 5x_2 & \leq & 300 & \text{(Espacio en la bodega)} \end{array}$$

Para desarrollar el método simplex debemos escribir el programa lineal en su forma estandar. Puesto que todas las restricciones son del tipo $\leq$, para llevar el programa a su forma estandar debemos añadir una variable de holgura a cada una de las restricciones. En efecto:

$$\max: \quad 50x_1 + 40x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

$$(A)\quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & + & 5x_2 & + & s_1 & + & & + & & = & 150 \quad (1) \\ & & x_2 & & & + & s_2 & & & = & 20 \quad (2) \\ 8x_1 & + & 5x_2 & & & & & + & s_3 & = & 300 \quad (3) \\ & & & & & & & & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) forman un sistema de 3 ecuaciones lineales con 5 variables. ¿Que podemos decir de la solución de un tal sistema? Recordemos que cuando un sistema tiene más incógnitas que ecuaciones, dicho sistema tiene una infinidad de soluciones. Desde el punto de vista algebraico podemos decir que, **el método simplex** es un algoritmo que sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales que tienen más incógnitas que ecuaciones, es decir, que tiene más incognitas que restricciones. Y permite, además, identificar **una solución** que hace óptima a la función objetivo.

El lector debería esperar que un tal sistema tenga soluciones negativas, es decir, que al menos una de las incógnitas, x_1, x_2, etc, tenga valores negativos, cuestión que contradeciría las condiciones de no negatividad de las variables. Esto significa, simplemente, que no todas las soluciones del sistema son soluciones factibles para el programa lineal. Pero, cuando se resuelve el sistema mediante el método simplex, éste permite eliminar las soluciones que no satisfacen dichas restricciones.

4.1.1.3 La solución básica

Si un sistema de ecuaciones lineales tiene m ecuaciones y n incógnitas, donde $m < n$, entonces pueden asignarse valores arbitrarios a las $n - m$ variables libres y obtener una solución del sistema. **Para determinar una solución básica se igualan a cero las $n - m$ de las variables** y se resuelven las m ecuaciones lineales de restricción para encontrar las n variables restantes

Puesto que en nuestro problema $m = 3$ y $n = 5$, resulta que $n - m = 2$, es decir, podemos darle **valores arbitrarios** a 2 variables libres y obtener una solución del sistema. Sin embargo, puesto que nos interesan las soluciones básicas, que resultan de darles valores cero a dichas variables haremos, por ejemplo, $x_2 = 0$ y $s_1 = 0$. En tal caso el sistema (A) de 3 ecuaciones con 5 incógnitas se reduce a un sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas; nuevo sistema que puede resolverse fácilmente. De tal modo que si $x_2 = 0$ y $s_1 = 0$, resulta el sistema:

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} 3x_1 & & & = 150 & (4) \\ & s_2 & & = 20 & (5) \\ 8x_1 & & s_3 & = 300 & (6) \end{array} \right.$$

De la ecuación (4) se desprende de inmediato que $x_1 = 50$. De la ecuación (5), que $s_2 = 20$. Para calcular s_3 reemplazamos el valor de x_1 en la tercera ecuación y resulta que $s_3 = 300 - 8 \cdot 50 = 300 - 400 = -100$. Por lo tanto **una solución básica** del sistema es:

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (50, 0, 0, 20, -100)$$

Pero, obviamente, la solución básica hallada no es factible, ya que una de las variables, ($s_3 = -100$), no satisface la condición de **no negatividad**. De tal modo que, según la definición, una solución básica puede no ser factible.

El lector podría preguntarse por otras soluciones del sistema, en particular por aquellas que resultan de dar valores cualesquiera a las variables libres. Por ejemplo, observe que si $x_1 = 20$ y $x_2 = 10$ el resto de las variables son $s_1 = 40$, $s_2 = 10$ y $s_3 = 90$. Veamos otras: si $x_1 = 30$ y $x_2 = 5$, entonces, $s_1 = 30$, $s_2 = 15$ y $s_3 = 35$.

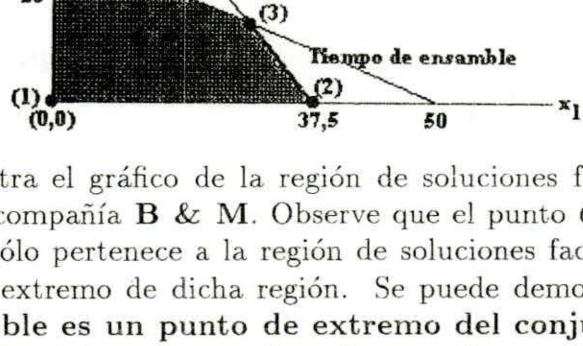
Sin embargo este tipo de soluciones no nos sirve. Estamos interesados sólamente en aquellas soluciones que sean básicas y que además satisfagan la condición de no negatividad, es decir, estamos interesados en las **soluciones básicas factibles.**

4.1.1.4 Soluciones básicas factibles.

Vimos que la solución $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (50, 0, 0, 20, -100)$ no era factible ya que una de sus variables no satisfacía la condición de no negatividad. Sin embargo podemos obtener una solución básica factible eligiendo a $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$. En efecto, hecho esto, resulta que: $s_1 = 150$, $s_2 = 20$ y $s_3 = 300$. Por lo tanto una solución básica factible completa, esto es, incluyendo $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ es la siguiente:

$$P_1(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = P_1(0, 0, 150, 20, 300)$$

Figura 1



La figura (1) muestra el gráfico de la región de soluciones factibles para el programa lineal de la compañía **B & M**. Observe que el punto $O(x_1, x_2)$ de coordenadas $O(0,0)$ no sólo pertenece a la región de soluciones factibles, sino que es, además, un punto extremo de dicha región. Se puede demostrar que **cada solución básica factible es un punto de extremo del conjunto de todas las soluciones factibles del programa lineal en su forma estandar**. Dicho de otra forma, existe una solución básica factible por cada punto de extremo de la región de factibilidad. Y uno de los puntos (1), (2), (3), (4) y (5) de la figura (1) debe ser solución del programa lineal.

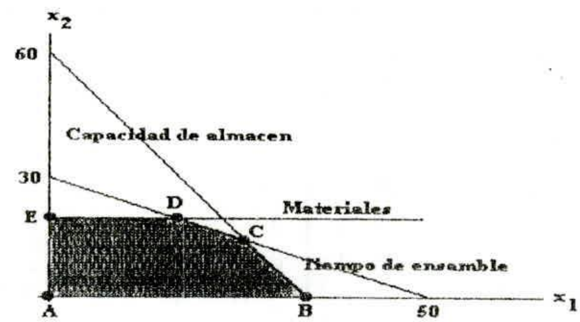
Hemos dicho que la solución óptima de un programa lineal se halla en un punto de extremo. Puesto que existe una solución básica factible para cada punto de extremo, podemos inferir que la solució óptima se halla en uno de estos puntos. En relación con el programa lineal de la compañía **B & M**, existen cinco puntos de extremo, que corresponden a cinco soluciones básicas factibles. **El método Simplex, es un procedimiento iterativo que permite, a partir de una solución básica factible, es decir, a partir de un punto de extremo, llegar al punto de extremo óptimo.** Sabemos que, para hechar a andar cualquier proceso iterativo, es necesario conocer un punto inicial de partida, en el caso del método simplex, se necesita conocer una solución básica factible. A partir de esta solución se van hallando, en forma sucesiva, **mejores** soluciones básicas factibles para el sistema de ecuaciones lineales. Cuando ya no es posible mejorar la función objetivo, significa que hemos llegado a la solución óptima.

Existen dos reglas que rigen la selección del siguiente punto extremo cuando se inicia el proceso de iteración.

1. La primera es que el siguiente punto, adyacente al actual, no se puede desplazar de A a C en forma directa. En cambio debe seguir *los flancos* (o los bordes) del espacio de soluciones, esto es: desde A $\rightarrow$ B y después desde B $\rightarrow$ C. Fig (2)

2. La segunda es que la solución no puede regresar nunca a un punto extremo considerado con anterioridad. Por ejemplo, en la figura (2) la solución no puede regresar desde B a A.

Figura 2



4.1.1.5 Primera tabla simplex

La tabla simplex inicial contiene todos los coeficientes que aparecen, tanto en la función objetivo, como en las restricciones. Por ejemplo si adoptamos la notación siguiente:

$$\max: \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} a_{11} & + & a_{12} & + & \cdots & + & a_{1n} & \leq & b_1 \\ a_{21} & + & a_{22} & + & \cdots & + & a_{2n} & \leq & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & + & a_{m2} & + & \cdots & + & a_{mn} & \leq & b_m \end{cases}$$

tendríamos la tabla siguiente:

c_1	c_2	$\cdots$	c_n	
a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$		$\vdots$		
a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m

[Tabla 1]

Por razones de conveniencia, a la tabla (1), le agregaremos dos columnas. A una de ellas la llamaremos Base o Básica y a la otra la denotaremos con C_B. En la columna base se enlistan las variables básicas del momento y en la columna C_B se enlistan los correspondientes coeficientes de la función objetivo para cada una de esas variables básicas. De tal modo que la tabla simplex inicial correspondiente al problema de la compañía **B & M**, escribiendo además, en una primera linea, todas las variables, es la siguiente:

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solución
Variables básicas (base)	C_B	50	40	0	0	0	
s_1	0	3	5	1	0	0	150
s_2	0	0	1	0	1	0	20
s_3	0	8	5	0	0	1	300

[tabla 2]

Observaciones a la tabla 2. Podemos esquematizar la tabla (2) escribiéndola en notación matricial.

		X^t	Solución
Base	C_B	C^t	
s_i	0	A	B

[Tabla 3]

a) Note que en la matríz A (que tiene 3 filas y 5 columnas) las últimas tres columnas tienen sólamente unos y ceros. A tales columnas las llamaremos columñas unidad.

b) Las tres filas de la matríz A corresponden a las diferentes variables básicas. Así, a la fila 1 le corresponde la variable s_1 cuyo valor es $b_1 = 150$; a la fila 2 le corresponde la variable s_2 cuyo valor es $b_2 = 20$; a la fila 3 le corresponde la variable s_3 cuyo valor es $b_3 = 300$. Dicho de otro modo, en la columna que tiene como encabezado la palabra **base** se anotan a s_1 como la primera variable básica y luego vienen s_2 y s_3, cuyos valores son 150, 20 y 300 respectivamente.

Recordemos que ya tenemos una solución básica inicial y el método simplex busca generar una nueva solución básica factible que corresponde a un punto de extremo. ¿ Puede mejorarse el valor de la función objetivo pasando a una nueva solución básica factible ? En general, la respuesta es sí. **Para esto se requiere cambiar el conjunto de variables básicas, cuestión que se logra eligiendo una de las variables no básicas del momento (x_1 y x_2) para convertirla en básica (s_1, s_2, s_3), y una de las variables básicas del momento para que sea no básica, de tal manera que la nueva solución básica factible arroje un mejor valor para la función objetivo.**

Para efectuar esto añadiremos dos nuevas filas en la parte inferior de la tabla (2). La primera de estas dos nuevas filas la identificaremos como z_j y para calcularla se efectúa el producto del vector C_B con los correspondientes elementos de la j−ésima columna de la matriz A. Observe que se trata del producto de un vector fila de (1x3) con uma matríz de tres filas y 5 columnas (3x5). Por lo que se obtendrá un vector fila de 5 columnas, esto es (1x5). Es decir:

$$z_1=0(3)+0(0)+0(8)=0$$
$$z_2=0(5)+0(1)+0(5)=0$$
$$z_3=0(1)+0(0)+0(0)=0$$
$$z_4=0(0)+0(1)+0(0)=0$$
$$z_5=0(0)+0(0)+0(1)=0$$

Le segunda de las dos nuevas filas la denotaremos por $c_j - z_j$ y la denominaremos **la fila de la evaluación neta**. El cálculo de $c_j - z_j$ es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
c_1 - z_1 &= 50 - 0 = 50 \\
c_2 - z_2 &= 40 - 0 = 40 \\
c_3 - z_3 &= 0 - 0 = \quad 0 \\
c_4 - z_4 &= 0 - 0 = \quad 0 \\
c_5 - z_5 &= 0 - 0 = \quad 0
\end{aligned}
$$

La tabla (4) que resulta al incorporar estas dos nuevas filas es la siguiente:

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solución
Base	C_B	50	40	0	0	0	
s_1	0	3	5	1	0	0	150
s_2	0	0	1	0	1	0	20
s_3	0	8	5	0	0	1	300
	z_j	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$	50	40	0	0	0	

[Tabla 4]

Hemos dicho que en cada iteración el método simplex se mueve de la solución básica factible actual a una solución básica factible adyacente mejor, y que este movimiento consiste en convertir una variable no básica (**variable básica entrante**), en una variable básica (**variable básica que sale**), y en identificar la nueva solución básica factible.

¿ Cuál es el criterio para seleccionar la variable básica entrante ?

Los candidatos para la variable básica entrante son las variables no básicas actuales, en este caso, x_1 y x_2. Aquella que se elija, cambiará su estado de no básica a básica, por lo que su valor aumentará de cero a algún valor positivo, y las otras se mantendrán en el nivel cero. El lector puede observar que $c_1 - z_1 = 50$ es el valor positivo más grande en la fila $c_j - z_j$. Por esta razón elegiremos x_1 para convertirla en la nueva variable básica. En consecuencia la variable x_1 será la variable básica entrante.

¿ Cómo se identifica la variable básica que sale ?

La variable básica que sale se puede determinar directamente de la tabla simplex (5). Observe que en esta tabla se señala la columna de la variable x_1, que es la variable entrante. Identificada la columna de la variable entrante, tache (ponga una marca) en todos los elementos negativos y ceros de dicha columna, pero, sólamente en los términos de la columna de la matríz A. Note que en esta columna hay sólamente un cero que tachar y quedan sin tachar el 3 y el 8.

		Columna de entrada $\boxed{\downarrow}$ x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	segundos miembros de las ecuaciones
Base	C_B	50	40	0	0	0	
s_1	0	3	5	1	0	0	150
s_2	0	$\emptyset$	1	0	1	0	20
s_3	0	8	5	0	0	1	300
	z_j	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$	50	40	0	0	0	

[Tabla 5]

A continuación determínense las razones entre los elementos de los segundos miembros de las ecuaciones correspondientes a las filas de la variables básicas s_1 y s_3 y los números 3 y 8. La tabla (6) muestra que estas razones son $\frac{150}{3} = 50$ y $\frac{300}{8} = 37,5$.

		Columna de entrada $\boxed{\downarrow}$ x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	segundos miembros de las ecuaciones	
Base	C_B	50	40	0	0	0		
s_1	0	3	5	1	0	0	150	$\frac{150}{3} = 50$
s_2	0	$\emptyset$	1	0	1	0	20	
s_3	0	8	5	0	0	1	300	$\frac{300}{8} = 37,5$
	z_j	0	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	50	40	0	0	0		

[Tabla 6]

Revisando los cocientes $\frac{b_i}{a_i 1}$ que son mayores que cero, se observa que $\frac{300}{8} = 37,5$ es el menor de ellos. Por esta razón, la variable básica s_3 de la fila 3, es la que se elige para que abandone la base. Observe que la "intersección" de la primera columna con la tercera fila de la matríz A es el elemento $a_{31} = 8$. A este elemento, es decir, al número 8, lo llamaremos **elemento pivote**. A la columna y a la fila que contienen a este elemento las llamaremos **columna pivote y fila pivote** respectivamente.

Esto significa que para mejorar la solución actual de $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 150$, $s_2 = 20$ y $s_3 = 300$, se debe aumentar x_1 à 37,5. La producción de 37,5 unidades del Klone A da como resultado una utilidad de:

$$50 \cdot 37,5 = 1875$$

Al fabricar 37,5 unidades del klone A se utiliza todo el espacio disponible en la bodega y, por ello, se reduce s_3 a cero. Así, entonces, x_1 se convierte en la nueva variable básica, reemplazando a s_3 en la base anterior. La tabla (7) muestra el elemento pivote encerrado en un cuadrado.

		Columna de entrada $\boxed{\downarrow}$ x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	segundos miembros de las ecuaciones
Base	C_B	50	40	0	0	0	
s_1	0	3	5	1	0	0	150
s_2	0	$\emptyset$	1	0	1	0	20
s_3	0	$\boxed{8}$	5	0	0	1	300
	z_j	0	0	0	0	0	0
	$c_j - z_j$	50	40	0	0	0	

[Tabla 7]

El proceso de cambiar de una solución básica factible a otra solución básica factible es lo que se denomina una iteración. En lo que sigue resumiremos **las reglas de la primera iteración**.

Criterio para elegir la variable básica entrante. Se observa la fila $c_j - z_j$ de la evaluación neta y se elige a la variable que ocasione el mayor mejoramiento por unidad en el valor de la función objetivo. En caso de empate, se selecciona la variable de entrada del extremo izquierdo.

Criterio para elegir la variable que sale. Supóngase que la variable de entrada corresponde a la columna j de la matríz A de la tabla simplex. Para cada fila i, calcular el cociente $\frac{b_i}{a_{ij}}$ para cada a_{ij} que sea mayor que cero. La variable básica que se eliminará de la columna base es aquella que corresponda al menor de estos cocientes. En el caso de empate se elige a la variable que esté en la fila de más arriba.

4.1.1.6 Segunda tabla simplex

Hemos visto que se puede mejorar la solución básica factible inicial que contenía a $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, al introducir x_1 en la base para que reemplace a s_3. Será necesario, entonces, actualizar la tabla simplex para determinar la nueva solución básica factible. Habíamos observado anteriormente que la tabla simplex inicial contiene columnas unidades correspondientes a las variables básicas s_1, s_2 y s_3. Lo que haremos a continuación será transformar la columna de la matríz A, correspondiente a x_1, en una columna unidad. Esto significa que dicha columna debe ser de la forma:

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

en vez de la forma:

$$\begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{matrix}$$

Para efectuar esto realizaremos operaciones elementales sobre las filas de la "matríz aumentada", en la tabla simplex, (donde 8 es considerado como un elemento pivote),

$$\begin{array}{ccccc|c} 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ \boxed{8} & 5 & 0 & 0 & 1 & 300 \end{array}$$

como si estuvieramos trabajando con un sistema de ecuaciones lineales común y corriente. En efecto, dividiendo la tercera fila por 8 resulta la matríz

$$\begin{array}{ccccc|c} 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 1 & \frac{5}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{75}{2} \end{array}$$

Restando la primera fila, de la tercera multiplicando por 3 resulta el arreglo

$$\begin{array}{ccccc|c} 3-3 & 5-\frac{15}{8} & 1-0 & 0 & 0-\frac{3}{8} & 150-\frac{225}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 1 & \frac{5}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{75}{2} \end{array}$$

que es equivalente al arreglo:

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & \frac{25}{8} & 1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{75}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 1 & \frac{5}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{75}{2} \end{array}$$

Por lo tanto la nueva tabla simplex es la siguiente:

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Base	C_B	50	40	0	0	0	
s_1	0	0	$\frac{25}{8}$	1	0	$-\frac{3}{8}$	$\frac{75}{2}$
s_2	0	0	1	0	1	0	20
x_1	50	1	$\frac{5}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{75}{2}$
	z_j						1875
	$c_j - z_j$						

[Tabla 8]

Por lo tanto, eliminando los términos que tienen coeficiente cero, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} & + & \frac{25}{8}x_2 & + & s_1 & + & & & -\frac{3}{8}s_3 & = & \frac{75}{2} \\ & & x_2 & & & + & s_2 & & & = & 20 \\ x_1 & + & \frac{5}{8}x_2 & & & & & + & \frac{1}{8}s_3 & = & \frac{75}{2} \end{array}\right.$$

Puesto que este sistema de 3 ecuaciones con 5 incógnitas tiene dos variables libres, asignando los valores cero a x_2 y s_3, resulta que, incluidas las variables precedentes, la nueva solución factible es es:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{75}{2} \\ x_2 & = & 0 \\ s_1 & = & \frac{75}{2} \\ s_2 & = & 20 \\ s_3 & = & 0 \end{array}$$

En consecuencia el valor de la función objetivo es:

$$z = 50(\frac{75}{2}) + 40(0) + 0(\frac{75}{2}) + 0(20) + 0(0) = 1\,875$$

Observe que este mismo valor se ofrece en la última columna de la tabla simplex y se obtiene multiplicando los valores de la solución para las variables básicas que se dan en la última columna por los correspondientes coeficientes de la función objetivo que aparecen en la columna C_B, es decir:

$$0(\frac{75}{2}) + 0(20) + 50(\frac{75}{2}) = 1\,875$$

4.1.1.7 Interpretación de la primera iteración

Al proceso de determinar una nueva tabla simplex se le denomina iteración del método simplex. En nuestro ejemplo la solución básica factible inicial era

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \\ s_1 & = & 150 \\ s_2 & = & 20 \\ s_3 & = & 300 \end{array}$$

con una utilidad de cero. Una iteración del método simplex permitió desplazarnos a otra solución básica factible con un valor de 1 875 para la función objetivo. Esta nueva solución básica factible es:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{75}{2} \\
x_2 &= 0 \\
s_1 &= \tfrac{75}{2} \\
s_2 &= 20 \\
s_3 &= 0
\end{aligned}
$$

En la figura (3) se puede ver que la solución básica factible inicial corresponde al punto de extremo (1) y la primera iteración permitió "trasladarlo" al punto de extremo (2), sobre el eje x_1, en la dirección del mayor incremento por unidad en las utilidades.

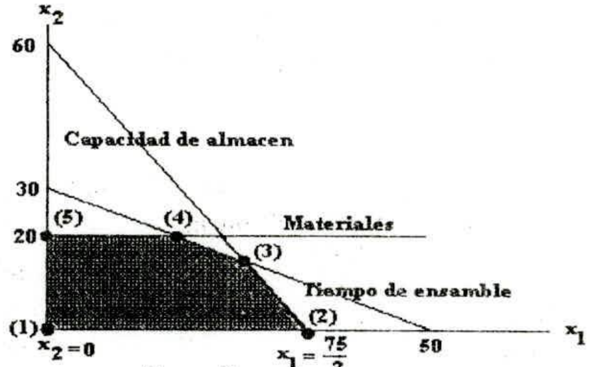


Figura 3

4.1.1.8 La segunda iteración

para ver si puede encontrarse una mejor solución básica factible debemos calcular nuevamente $c_j - z_j$ en la última tabla simplex. Recordemos que los elementos de la fila c_j se obtienen al multiplicar los elementos del vector columna C_B con los correspondientes elementos de la matriz A. Resulta entonces que:

$$
\begin{array}{lclclclcl}
z_1 & = & 0(0) & + & 0(0) & + & 50(1) & = & 50 \\
z_2 & = & 0(\frac{25}{8} & + & 0(1) & + & 50(\frac{5}{8}) & = & \frac{250}{8} \\
z_3 & = & 0(1) & + & 0(0) & + & 50(0) & = & 0 \\
z_4 & = & 0(0) & + & 0(1) & + & 50(0) & = & 0 \\
z_5 & = & 0(-\frac{3}{8}) & + & 0(0) & + & 50(\frac{50}{8}) & = & \frac{50}{8}
\end{array}
$$

Restando z_j de c_j para calcular la fila de la evaluación neta, se obtiene la tabla simplex:

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Base	C_B	50	40	0	0	0	
s_1	0	0	$\frac{25}{8}$	1	0	$-\frac{3}{8}$	$\frac{75}{2}$
s_2	0	0	1	0	0	0	20
x_1	50	1	$\frac{5}{8}$	0	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{75}{2}$
	z_j	50	$\frac{250}{8}$	0	0	$\frac{50}{8}$	1875
	$c_j - z_j$	0	$\frac{70}{8}$	0	0	$-\frac{50}{8}$	

[Tabla 9]

Analizamos, ahora, la fila $c_j - z_j$ para ver si podemos introducir una nueva variable en la base que permita continuar mejorando la función objetivo. Puesto que x_2 tiene el mayor coeficiente (estamos comparando entre 0 y $\frac{70}{8}$), elegimos x_2 como la variable que entra. Y para determinar la variable que sale, debemos efectuar el cociente $\frac{b_i}{a_{i2}}$ para cada reglón i, sólamente en los casos en que $a_{i2} \geq 0$. En nuestro caso todos los elementos $a_{i2} \geq 0$. Después de efectuar estos cálculos resulta la siguiente tabla simplex.

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
Base	C_B	50	40	0	0	0		
s_1	0	0	$\boxed{\frac{25}{8}}$	1	0	$-\frac{3}{8}$	$\frac{75}{2}$	$\frac{\frac{75}{2}}{\frac{25}{8}} = 12$
s_2	0	0	1	0	0	0	20	$\frac{20}{1} = 20$
x_1	50	1	$\frac{5}{8}$	0	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{75}{2}$	$\frac{\frac{75}{2}}{\frac{5}{8}} = 60$
	z_j	50	$\frac{250}{8}$	0	0	$\frac{50}{8}$	1875	
	$c_j - z_j$	0	$\frac{70}{8}$	0	0	$-\frac{50}{8}$		

[Tabla 10]

Como el cociente mínimo es 12, la variable que sale de la base es s_1 y el elemento pivote es $\frac{25}{8}$ que se encuentra encerrado en un cuadrado. Ahora debemos convertir la variable no básica x_2 en una variable básica. Esto significa que debemos efectuar las operaciones elementales sobre las filas de la matríz A aumentada para transformar la columna de x_2 en una columna unidad, es decir, debemos transformar la columna

$$\begin{matrix} \frac{25}{8} \\ 1 \\ \frac{5}{8} \end{matrix}$$

en la columna:

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Si multiplicamos la fila 1 por $\frac{8}{25}$, (con el objeto de dejar el elemento pivote en 1) y la restamos de la fila 2, entonces el elemento $a_{22} = 0$. Si luego multiplicamos la nueva fila (1) por $\frac{5}{8}$ y se la restamos a la fila 3, quedará el elemento $a_{32} = 0$. La nueva simplex es la siguiente:

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Base	C_B	50	0	0	0	0	
x_2	40	0	1	$\frac{8}{25}$	0	$-\frac{3}{25}$	12
s_2	0	0	0	$-\frac{8}{25}$	1	$\frac{3}{25}$	8
x_1	50	1	0	$-\frac{5}{25}$	0	$\frac{5}{25}$	30
	z_j	50	40	$\frac{14}{5}$	0	$\frac{26}{5}$	1980
	$c_j - z_j$	0	-40	$-\frac{14}{5}$	0	$-\frac{26}{5}$	

[Tabla 11]

Observemos que, ahora, x_1, x_2 y s_2 son la variables básicas y s_1 y s_3 son variables no básicas. Note, además que los valores de $x_1 = 30$, $x_2 = 12$ y $s_2 = 8$, por lo tanto el valor de la función objetivo es:

$$z = 50(30) + 40(12) + 0(0) + 0(8) + 0(0) = 1980$$

¿ Cómo sabemos si debemos seguir efectuando iteraciones ?, es decir, ¿ cómo sabemos si hemos llegado al óptimo ?

Observando el reglón $c_j - z_j$ se ve que todos los elementos de esta fila son negativos o cero, por lo tanto, cualquier intento de introducir una variable no básica en la base en este momento, daría como resultado una reducción en el valor actual de la función objetivo. Por esta razón la última tabla representa la solución óptima para el programa lineal.

Criterio para detener las iteraciones. Se detienen las iteraciones en un programa lineal cuando todos los elementos de la fila de evaluación neta $c_j - z_j$ son menores o iguales que cero. En este caso la solución óptima es la solución factible

4.1.1.9 Interpretación de la solución óptima

La solución óptima para la compañía **B & M** ensambladora de Clones, consta de las variables no básicas s_1 y s_3 y la variables básicas x_1, x_2 y s_2

$$\begin{aligned} x_1 &= 30 \\ x_2 &= 12 \\ s_1 &= 0 \\ s_2 &= 8 \\ s_3 &= 0 \end{aligned}$$

Hemos visto, además, que el valor óptimo de la función objetivo es de 1 980 dólares. Por ello si los administradores desean maximizar las utilidades, deberán fabricar 30 unidades del Klone A y 12 unidades del Klone B. Una cuestión importante de observar son las variables de holgura. Como $s_2 = 8$, debe tomarse en cuenta que habrá una holgura de 8 monitores para el Klone B. Además como $s_1 = 0$ y $s_3 = 0$, no existe holgura con la restricción del tiempo de ensamble ni con la restricción del espacio de almacen; en otras palabras estas restricciones son limitantes.

Finalmente se puede observar gráficamente que la solución óptima siguió el siguiente itinerario:

a) La solución básica factible corresponde al origen, esto es, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 150$, $s_2 = 20$ y $s_3 = 300$.

b) La primera iteración significó que x_1 entrara en la base y que saliera s_3. La nueva solución básica factible corresponde al punto de extremo (2) cuyas coordenadas son, $x_1 = \frac{75}{2}$, $x_2 = 0$, $s_1 = 20$, $s_2 = \frac{75}{2}$ y $s_3 = 0$.

c) En la segunda iteración, x_2 entró en la base y salió s_1. La nueva solución básica factible resultó ser el punto extremo (3), cuyas coordenadas son $x_1 = 30$, $x_2 = 12$, $s_1 = 0$, $s_2 = 8$ y $s_3 = 0$.

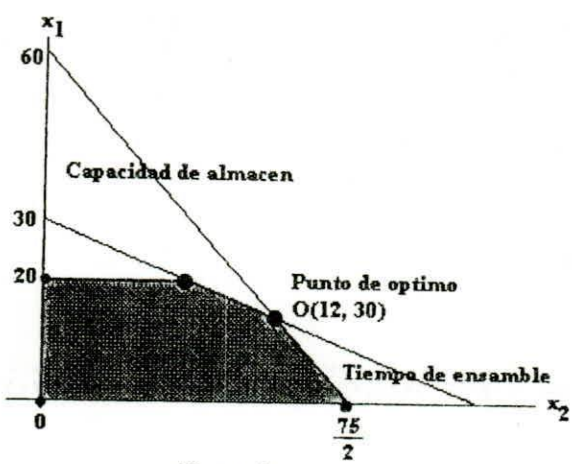


Figura 4

4.2 El análisis de sensibilidad

Recordemos que el análisis de sensibilidad en los programas lineales consiste en estudiar la variación de la solución óptima y el valor de la función objetivo en un programa lineal cuando se efectúan cambios en los coeficientes de dicho programa. Este análisis incluye, también, la determinación de los intervalos en los cuales varían los lados derechos de las restricciones que permiten mantener los precios duales.

Con el objeto de comprender mejor algunos conceptos, hicimos el análisis de sensibilidad en programas de dos variables y posteriormente lo prolongamos a situaciones algo más complicadas. Finalmente, utilizamos el paquete LINDO/PC para resolver programas lineales y analizamos los listados que resultan de usar dicha herramienta. En lo que sigue veremos como se efectúa dicho análisis utilizamos el algoritmo simplex.

4.2.1 Análisis de sensibilidad del problema de la compañía B & M, utilizando el algoritmo simplex.

De los coeficientes. Cuando realizamos el análisis de sensibilidad para programas de dos variables hicimos incapié en que debíamos determinar el intervalo de optimalidad para un coeficiente cada vez. Y concluíamos que mientras el valor de dicho coeficiente se mantuviera dentro de tal intervalo, la solución básica factible seguiría siendo óptima. ¿ Cómo efectuar este análisis utilizando el algoritmo simplex ? Para ejemplificar esto, recurriremos al problema de la compañía **M & B**, interesada en la producción de los modelos de computadores Klones A y B. Recordemos que programa lineal resultante de dicho problema es:

$$\max : \quad 50x_1 + 40x_2$$

sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 150 & \text{Tiempo de ensamblado} \\ x_2 \leq 20 & \text{Monitores Klone B} \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 300 & \text{Espacio de bodega} \end{cases}$$

en que x_1, $x_2 \geq 0$ y donde:

x_1 = número de unidades del Klone A

x_2 = número de unidades del Klone B

La tabla (12) es la tabla simplex final correspondiente al programa lineal propuesto.

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Base	C_B	50	40	0	0	0	
x_2	40	0	1	$\frac{8}{25}$	0	$-\frac{3}{25}$	12
s_2	0	0	0	$-\frac{8}{25}$	1	$\frac{3}{25}$	8
x_1	50	1	0	$-\frac{5}{25}$	0	$\frac{5}{25}$	30
	z_j	50	40	$\frac{14}{5}$	0	$\frac{26}{5}$	1980
	$c_j - z_j$	0	0	$-\frac{14}{5}$	0	$-\frac{26}{5}$	

[Tabla 12]

No olvidará el lector que se reconoce la existencia de la solución óptima en el programa lineal cuando todos los elementos de la fila $c_j - z_j$ son menores o iguales que cero. De tal modo que el intervalo de optimalidad para un coeficiente de la función objetivo se determina mediante la desigualdad:

$$c_j - z_j \leq 0 \quad \text{(para todos los j)}$$

Veremos como calcular el intervalo de optimalidad para c_1. Puesto que $c_1 = 50$ en la función objetivo, reemplazaremos, en la tabla simplex, 50 por c_1 como coeficiente de x_1. La tabla (13) muestra dicho reemplazo.

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Base	C_B	c_1	40	0	0	0	
x_2	40	0	1	$\frac{8}{25}$	0	$-\frac{3}{25}$	12
s_2	0	0	0	$-\frac{8}{25}$	1	$\frac{3}{25}$	8
x_1	c_1	1	0	$-\frac{5}{25}$	0	$\frac{5}{25}$	30
	z_j	c_1	40	$\frac{64-c_1}{5}$	0	$\frac{c_1-24}{5}$	$480 + 30c_1$
	$c_j - z_j$	0	0	$\frac{c_1-64}{5}$	0	$\frac{24-c_1}{5}$	

[Tabla 13]

La solución actual seguirá siendo óptima mientras el valor de

$$c_j - z_j \leq 0$$

para las dos variables básicas s_1 y s_3. Por lo tanto:

$$\frac{c_1 - 64}{5} \leq 0 \qquad y \qquad \frac{24 - c_1}{5} \leq 0$$

El lector puede comprobar que resolviendo ambas desigualdades se obtiene que

$$24 \leq c_1 \leq 64$$

Recordemos que si c_1 varía en este intervalo, el valor de la función objetivo varía, pero la solución sigue siendo óptima. Supongamos, por un instante, que las utilidades que aportan los Klones A, bajan de 50 a 30 dólares, esto es, $c_1 = 30$. Observe que $30 \in [24, 64]$. De acuerdo a lo dicho la solución que aparece en la tabla (12)

$$\begin{aligned} x_1 &= 30 \\ x_2 &= 12 \\ s_1 &= 0 \\ s_2 &= 8 \\ s_3 &= 0 \end{aligned}$$

debería seguir siendo óptima pero el valor de las utilidades totales, es decir, el valor de la función objetivo debería disminuir. Para verificar esta suposición tenemos que calcular nuevamente la tabla simplex para este nuevo valor de c_1. En efecto, efectuando los cálculos se obtiene la tabla (14)

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Base	C_B	30	40	0	0	0	
x_2	40	0	1	$\frac{8}{25}$	0	$-\frac{3}{25}$	12
s_2	0	0	0	$-\frac{8}{25}$	1	$\frac{3}{25}$	8
x_1	c_1	1	0	$-\frac{5}{25}$	0	$\frac{5}{25}$	30
	z_j	30	40	$\frac{34}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	1380
	$c_j - z_j$	0	0	$-\frac{34}{5}$	0	$-\frac{6}{5}$	

[Tabla 14]

La tabla (14) muestra que $c_j - z_j \leq 0$ para todas las variables, en consecuencia la solución

$$\begin{aligned} x_1 &= 30 \\ x_2 &= 12 \\ s_1 &= 0 \\ s_2 &= 8 \\ s_3 &= 0 \end{aligned}$$

sigue siendo óptima, pero, el valor de la función objetivo z, disminuyó a 1380 dólares, como se esperaba. Tal como lo vimos en el estudio de sensibilidad de programas lineales con dos variables y en los análisis realizados con el paquete LINDO, este mismo fenómeno seguirá ocurriendo cada vez que variamos el valor de c_1 en el intervalo $[24, 64]$. Y debemos esperar que esto no ocurra si se considera un valor de c_1 que esté fuera del intervalo mencionado.

Efectuar el análisis de sensibilidad utilizando las tablas del simplex no tiene, en la actualidad, mucho sentido. Realizar este trabajo a mano resulta tan anacrónico como querer calcular, por ejemplo, *log* 3, utilizando las viejas tablas de logaritmo.

De tal modo que valga lo dicho, en este capítulo, para reafirmar los conceptos sobre sensibilidad expresados en los capítulos 2 y 3.

4.2.2 La dualidad

En los inicios del desarrollo de la Investigación de Operaciones se descubrió que para todo programa lineal, existe otro programa lineal asociado a él. Al programa original se la llamó Primal, y al programa asociado se le llamó el Dual. De hecho, si resolvemos el programa dual del dual obtendremos la solución del primal. Puesto que la solución de cada de uno de estos programas lineales conduce al mismo resultado resulta interesante preguntarse cuál de ellos genera una ruta más eficiente.

Hemos dicho que el tiempo requerido para resolver un problema de programación lineal depende más críticamente del número de restricciones que del número de variables. Si el problema original tiene m restricciones y n variables, entonces el problema dual tendrá n restricciones y m variables. De esto resulta que siendo igual todos los demás elementos del programa, excepto en el número de variables y de restricciones, debemos escoger aquel que tenga menos restricciones. Si trabajamos con un software, como el LINDO/PC por ejemplo, la elección del dual o del primal, cuando se trata de programas pequeños, el tiempo de cómputo no tiene importancia: por ejemplo cuando se trata de programas de cientos o de algunas miles de restricciones. La elección del programa adquiere real importancia cuando se trata de muchos miles de variables y restricciones. Para ejemplificar el concepto de dualidad consideraremos el programa de la compañía **B & M.** Decimos entonces que el programa Primal de dicha compañía es el siguiente:

$$\max: \quad 50x_1 + 40x_2$$

sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 5x_2 & \leq 150 & \text{Tiempo de ensamblado} \\ & & x_2 & \leq 20 & \text{Monitores Klone B} \\ 8x_1 & + & 5x_2 & \leq 300 & \text{Espacio de bodega} \end{cases}$$

en que $x_1,\ x_2 \geq 0$. En su forma matricial escibimos lo siguiente:

$$\text{Hallar el max: } z = \begin{pmatrix} 50 & 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

sujeto a la restricción:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 150 \\ 20 \\ 300 \end{pmatrix}$$

más sinteticamente aún, podemos esribir:

$$\text{Hallar el max}: \quad z = C^t \cdot X$$

sujeto a la restricción:

$$AX \leq B, \quad \text{con } X \geq 0$$

Observación. Cuando tengamos un programa lineal con restricciones del tipo "$\leq$", que deseamos maximizar, con requerimientos no negativos para las variables de decisión, diremos que se trata de un programa expresado en **su forma canónica**. El programa del problema de la compañía **B & M** es un problema de maximización en su forma canónica.

En lo que sigue veremos como hallar el programa dual a partir del primal, y como se interpretan los resultados obtenidos. El problema dual del programa primal es, por definición, el programa siguiente:

$$\min: \quad z = 150u_1 + 20u_2 + 300u_3$$

sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} 3u_1 & + & 0u_2 & + & 8u_3 \geq 50 \\ 5u_1 & + & u_2 & + & 5u_3 \geq 40 \end{cases}$$

donde $u_1, u_2, u_3 \geq 0$. Matricialmente escribimos lo siguiente:

$$\text{Hallar el min: } z = \begin{pmatrix} 150 & 20 & 300 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

sujeto a la restricción:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \end{pmatrix}$$

más sinteticamente aún, podemos esribir:

$$\text{Hallar el min}: \quad z = B^t \cdot U$$

sujeto a la restricción:

$$A^t U \geq B, \quad \text{con } U = (u_1, u_2, u_3) \geq 0$$

A las variables u_1, u_2, u_3, se les llama variables duales. El análisis realizado en este ejemplo nos sugiere las siguientes reglas para hallar el dual del programa:

1. El dual es un problema de minimización (maximización)

2. Todas las restricciones del dual son del tipo "$\geq$". (o bien $\leq$)

3. Si el programa primal tiene n variables de decisión, entonces, el dual tiene n inecuaciones de restricción. (En nuestro ejemplo hay 2 variables de decisión, x_1 y x_2, por lo tanto hay 2 inecuaciones de restricción). A las variables u_1, u_2, u_3, de la primera inecuación de restricción del dual, se le asocian los coeficientes de la variable x_1, es decir, se le asocia el vector columna de la matríz A del programa primal. A la segunda inecuación de restricción del dual se le asocian los coeficientes de la variable x_2 del primal y así sucesivamente. (En nuestro ejemplo los coeficientes de x_1 están en la columna

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

y pasan a ser los coeficientes $[3, 0, 8]$ de las variables duales u_1, u_2, u_3, de la primera inecuación de restricción)

4. Cuando el programa primal tiene n restricciones, entonces el dual tiene n variables de decisión. (En nuestro ejemplo el programa primal tiene 3 inecuaciones de restricción, por lo tanto el dual tiene 3 variables de decisión u_1, u_2 y u_3.)

5. Los valores del lado derecho de las restricciones del primal se convierten en los coeficientes de la función objetivo del dual. (En nuestro ejemplo, los lados derechos de las restricciones forman el vector columna

$$\begin{pmatrix} 150 \\ 20 \\ 300 \end{pmatrix}$$

que se convierte en el vector fila $[150, 20, 300]$, de la función objetivo z.)

6. Los coeficientes de la función objetivo del primal se convierten en los lados derechos de las inecuaciones de restricción del dual. (En nuestro ejemplo, el vector fila $[50, 40]$ de la función objetivo z, se convierte en el vector columna

$$\begin{pmatrix} 50 \\ 40 \end{pmatrix}$$

del programa dual.)

7. Los coeficientes de las restricciones para la i-ésima variable del primal, se convierten en los coeficientes de la i-ésima restricción del dual.

8. Tanto el primal como el dual tienen restricciones de no negatividad.

Reafirmaremos estas ideas hallando el dual del programa

$$\max: \quad z = 5x_1 + 2x_2 + x_3$$

Sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 20 \\ 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 \geq 30 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 40 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 50 \end{cases}$$

donde $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

De acuerdo a las reglas para formar el programa dual, se obtiene el siguiente nuevo programa:

$$\text{Hallar min}: \quad z = 20u_1 + 30u_2 + 40u_3 + 50u_4$$

Sujeto a las restricciones:

$$\begin{cases} 2u_1 + 6u_2 + 7u_3 + u_4 \leq 5 \\ 3u_1 + 8u_2 + u_3 + 2u_4 \leq 2 \\ u_1 + 5u_2 + 3u_3 + 4u_4 \leq 1 \end{cases}$$

donde $u_1, u_2, u_3, u_4, \geq 0$.

La tabla (15) muestra la última iteración del algoritmo simplex, para el dual del programa lineal de la compañía **B & M**.

		u_1	u_2	u_3	s_1	s_2	
Base	C_B	-150	-20	-300	0	0	
u_3	-300	0	$-\frac{3}{25}$	1	$-\frac{5}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{26}{5}$
u_1	-150	1	$\frac{8}{25}$	0	$\frac{5}{25}$	$-\frac{8}{25}$	$\frac{14}{5}$
	z_j	-150	-12	-300	30	12	-1980
	$c_j - z_j$	0	-8	0	0	-12	

[Tabla 15]

Observe que la fila de evaluación neta contiene sólamente números negativos o ceros, en consecuencia, se ha alcanzado la solución final:

$$u_1 = \tfrac{14}{5}$$
$$u_2 = 0$$
$$u_3 = \tfrac{26}{5}$$
$$s_1 = 0$$
$$s_2 = 0$$

Como se ha estado minimizando el negativo de la función objetivo del dual, el valor máximo de la función objetivo del primal es:

$$z = -(-1\,980) = 1\,980$$

Por otra parte, recordemos que la tabla final de la solución óptima del programa primal es la siguiente:

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
Base	C_B	50	40	0	0	0	
x_2	40	0	1	$\frac{8}{25}$	0	$-\frac{3}{25}$	12
s_2	0	0	0	$-\frac{8}{25}$	1	$\frac{3}{25}$	8
x_1	50	1	0	$-\frac{5}{25}$	0	$\frac{5}{25}$	30
	z_j	50	40	$\frac{14}{5}$	0	$\frac{26}{5}$	1980
	$c_j - z_j$	0	0	$-\frac{14}{5}$	0	$-\frac{26}{5}$	

[Tabla 16]

en la cual se ve claramente que el valor de la función objetivo es el mismo en ambos programas (1 980) y la solución óptima es el vector:

$$x_1 = 30$$
$$x_2 = 12$$
$$s_1 = 0$$
$$s_2 = 8$$
$$s_3 = 0$$

El resultado que hemos obtenido nos sugiere que si **si existe una solución óptima para el programa primal, también existe para el programa dual y las dos funciones objetivos tienen el mismo valor óptimo**

Observe que los precios sombra del problema de la compañía **B & M**, que obtuvimos de la tabla simplex final, tienen el mismo valor que las variables duales $u_1 = \frac{14}{5} = 2,80$, $u_2 = 0,00$ y $u_3 = \frac{26}{5} = 5,20$.

De estos resultados se llega a la interesante conclusión de que **los valores de las variables duales y los precios sombra son una misma cosa.** Por esta razón los valores óptimos de las variables duales identifican el precio de cada unidad de los recursos adicionales en la solución óptima.

Podemos preguntarnos, ahora, ¿ Cómo identificar los valores óptimos del programa primario a partir de la tabla simplex final del problema dual ? La siguiente propiedad da respuesta a esta pregunta.

Dada la tabla simplex de la solución óptima del problema dual, los valores óptimos para las variables de decisión del programa primario están dados por las variables de excedente de la fila z_j. Y los valores óptimos de las variables de holgura del primario están dados por las variables u_j de la fila $c_j - z_j$

		u_1	u_2	u_3	s_1	s_2	
Base	C_B	-150	-20	-300	0	0	
u_3	-300	0	$-\frac{3}{25}$	1	$-\frac{5}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{26}{5}$
u_1	-150	1	$\frac{8}{25}$	0	$\frac{5}{25}$	$-\frac{8}{25}$	$\frac{14}{5}$
	z_j	-150	-12	-300	30	12	-1980
	$c_j - z_j$	0	-8	0	0	-12	

[Tabla 17]

Podemos ver en la tabla simplex final de nuestro problema que, efectivamente, en la fila z_j la solución del programa primario se halla en las variables de holgura $s_1 = 30$ y $s_2 = 12$, esto es, $x_1 = 30$ y $x_2 = 12$. Y, al mismo tiempo, los valores de las variables de holgura del primario se hallan en la fila $c_j - z_j$. Considerando el cambio de signo se tiene:

$$u_1 = s_1 = 0, \quad u_2 = s_2 = 8, \quad u_3 = s_3 = 0$$

Comentario. El programa de la compañía **B & M**, nos ha permitido ver que al resolver el programa primal, o el programa dual, se consigue de inmediato la solución del otro. El hecho de resolver cualesquiera de los dos programas tiene que ver con la necesidad de obtener los resultados con el menor volumen de cálculo posible. Sin embargo utilizando cualquier paquete, como el LINDO, por ejemplo, el convertir el programa primal al dual con el objeto de ganar tiempo de cálculo no tiene ningún sentido. Más aún, la información sobre sensibilidad aparece en forma de una tabla, en cualquier software de programación lineal. Por esta razón no ahondaremos más en el método simplex.

Finalmente, y para terminar, veremos como presenta LINDO/PC los resultados de ambos programas. La tabla (18) entrega los resultados del programa primal.

OBJECTIV FUNCTION VALUE		
1)	1980.00000	
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
x1	30.000000	0.000000
x2	12.000000	0.000000
ROW	SLACK/SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	2.800000
3)	8.000000	0.000000
4)	0.000000	5.200000

[Tabla 18]

La tabla (19) entrega los resultados del programa dual.

OBJECTIV FUNCTION VALUE		
1)	1980.00000	
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
u1	2.8000000	0.000000
u2	0.0000000	8.000000
u3	5.2000000	0.000000
ROW	SLACK/SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	−30.00000
3)	0.000000	−12.00000

[Tabla 19]

LINDO/PC realizó los cálculos en dos iteraciones (en 0.0 segundos) para cada una de las tablas.

4.3 Ejercicios propuestos

1. Considere el programa lineal

$$max: \quad 7.5x_1 + 15x_2 + 10x_3$$

sujeto a las restricciones

$$\begin{cases} 2x_1 & & + & 2x_3 & \leq 8 \\ \frac{1}{2}x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq 6 \end{cases}$$

en que $x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$. Utilice al algoritmo simplex para:

a) Escriba los programas primal y dual y obtenga la solución óptima utilizando el LINDO/PC

b) Compare los resultados en ambas tablas desde el punto de vista de la sensibilidad

Efectúe el siguiente análisis en el primal y en el dual.

c) ¿ Cuál sería el efecto de un aumento en 2,5 unidades en c_1 sobre la solución óptima en ambos programas ?

2. Considere el problema de la compañía **Cueros S.A**

$$max\ z = 10x_1 + 9x_2$$

sujeto a las restricciones

$$\begin{cases} \frac{7}{10}x_1 & + & x_2 & \leq 630 & \text{Tiempo de corte y teñido} \\ \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{5}{6}x_2 & \leq 600 & \text{Tiempo de costura} \\ x_1 & + & \frac{2}{3}x_2 & \leq 708 & \text{Tiempo de terminado} \\ \frac{1}{10}x_1 & + & \frac{1}{4}x_2 & \leq 135 & \text{Tiempo de inspección y embalaje} \end{cases}$$

en donde

x_1 = número de guantes de primera

x_2 = número de guantes de segunda

a) Escriba el primal y el dual del problema y halle en ambos la solución óptima utilizando el LINDO/PC.

b) Haga el análisis de sensibilidad de ambos programas y compare los resultados.

Efectúe los siguientes análisis en el primal

c) Si se disminuye la contribución a las utilidades para el guante de primera a 7 dólares por unidad, ¿ Cómo se vería afectada la solución óptima ?

d) Si se aumenta la contribución a las utilidades de los guantes de segunda a 15 dólares por unidad, ¿ Cuál sería, ahora, el plan óptimo de producción ?

e) En cuánto aumentarían las utilidades si se tuvieran 30 horas adicionales en el departamento de corte y teñido ?

3. **Dante Carrete S.A** es una empresa pequeña que fabrica diversos productos químicos. En un determinado proceso de producción, se mezclan o combinan tres materias primas para fabricar dos productos: un aditivo para combustible y una base disolvente. Cada tonelada de aditivo para combustible es una mezcla de $\frac{2}{5}$ de toneladas de material I, y $\frac{3}{5}$ de toneladas de material III. Una tonelada de base disolvente es una mezcla de $\frac{1}{2}$ tonelada de material I, $\frac{1}{5}$ de tonelada de material II, y $\frac{3}{10}$ de tonelada de material III. Después de deducir los costos correspondientes la compañía obtiene 40 dólares por cada tonelada de aditivo de combustible que se fabrica y 30 dólares por cada tonelada de base disolvente que se produce. La producción de **Dante Carrete S.A** está limitada por una disponibilidad restringida de las tres materias primas. Para el período de producción actual tiene a disposición las siguientes cantidades.

Materia Prima	Cantidad disponible para producción
Materia I	20 toneladas
Materia II	5 toneladas
Materia III	21 toneladas

[Tabla 1]

En el programa dual: c) Calcule los intervalos de optimalidad para los coeficientes c_1 y c_2.
d) Suponga que debido a un aumento en los costos de producción, se reduce a 30 dólares la utilidad por cada tonelada de aditivo de combustible, ¿ qué efecto tiene esto sobre la solución óptima ?
e) ¿ Cuál es el precio sombra para la restricción del material I ?

....

4.4 El uso de software en la programación lineal.[1]

Existe en el mercado una gran cantidad de software de programación lineal que utilizan los procedimientos que hemos estudiado en las páginas anteriores. Estos paquetes fueron diseñados en base al algoritmo del método simplex, método simplex revisado y otras derivaciones del simplex y se usan actualmente en forma rutinaria para resolver problemas extraordinariamente grandes; problemas que pueden llegar a tener cientos de miles de variables y restricciones. Actualmente se han resuelto problemas de 100.000 restricciones y 500.000 variables; que están lejos de ser los más grandes.

En los paquetes que usan el método simplex el tiempo de cálculo, que utiliza un computador, tiende a ser proporcional al cubo del número de restricciones. De tal modo que al duplicarse el número de restricciones, el tiempo de cálculo se multiplica por 8. En cambio el número de variables es un factor de menor importancia. Esto significa, por ejemplo, que aunque se duplique el número de variables, ni siquiera se duplica el tiempo de cálculo. Otro factor que incide, también, en el tiempo de cálculo es la cantidad de coeficientes distintos de ceros de las restricciones.

Una gran dificultad que existe al resolver problemas de programación lineal es la tremenda cantidad de datos que se utilizan. Así, por ejemplo, un programa de 100.000 restricciones y otras tantas variables, tendrá 1.000.000 de coeficientes que deben especificarse. Y cuando el problema ha sido resuelto, los resultados deben imprimirse de manera que puedan ser claramente entendidos por las personas que deberán tomar las decisiones.

[1] Esta sección fue escrita en base a la sección 4.8, páginas 98 – 104 del libro Introducción a la Investigación de Operaciones de F. Hillier y G. Lieberman, traducido de la quinta edición en inglés. Esto significa que parte de la información de esta sección, relativa a software, ya esté obsoleta. En todo caso, cuando parece conveniente, se hacen observaciones al respecto

4.5 Nuevos poderosos algoritmos

En 1984, **Narendra Karmarkar**, científico de la AT & T Bell Laboratories, publicó un artículo anunciando el desarrollo de un nuevo algoritmo para resolver grandes problemas de programación lineal. Al contrario del enfoque del método simplex que busca las soluciones factibles en los vértices de la frontera de la región factible, Karmarkar inventó un algoritmo de **puntos interiores** que va cortando la región de soluciones factibles hasta alcanzar el punto de óptimo.

En un principio se anunció que este nuevo algoritmo podía resolver problemas enormes de programación lineal hasta 50 veces más rápido que el método simplex. Este dramático anuncio se convirtió en noticia al ser publicado en la primera página del New York Time. Sin embargo, por razones de propiedad intelectual sólo se dieron a conocer muy superficialmente los detalles de como poner en práctica el algoritmo y no fue posible que otros matemáticos comprobaran la efectividad de la invención de Karmarkar. Sin embargo para muchos matemáticos fueron suficientes las ideas expuestas y se dieron a la tarea de replicar el algoritmo. De estos intentos se publicaron confusas ideas comparando el algoritmo simplex y el algoritmo desarrollado por Karmarkar. La comunidad matemática de esos años se encontraba confundida por la emoción de la controversia.[2]

Años más tarde, en 1988, la AT & T Bell Laboratories anunció que daría a conocer una poderosa aplicación para microcomputadoras de una variante del algoritmo de Karmarkar: la instalación de este paquete, llamado **AT & T KORBX Linear Programing System**, costaría aproximadamente 9 millones de dólares. Al mismo tiempo, La AT & T Bell publicó bastante material sobre su sistema haciendo, incluso, comparaciones con el método simplex para demostrar la superioridad del nuevo algoritmo. La AT & Bell Laboratories informó detalladamente que había resuelto con éxito algunos problemas de decenas de miles de restricciones: problemas demasiado grandes para el método simplex. Se dio a conocer, además, que el tiempo de cálculo empleado por el nuevo algoritmo mejoraba en factores que iban desde 10 hasta 50 los tiempos del simplex.

Sin embargo, ¿ cuánto de eficiente resultó ser el algoritmo de puntos interiores de Karmarkar en comparación con el método simplex ? Esta es una pregunta que

[2]En realidad este hecho puede compararse con otros similares que han ocurrido en la historia de la matemática. Recordemos que cuando se inventó la solución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado en el siglo XVI, los grandes matemáticos italianos se trenzaron en una discusión que hizo historia. Tartaglia mantuvo en secreto su invención durante varios años hasta que Cardano, mediante métodos no muy éticos, logró arrancarle el secreto y publicarla en su gran obra ARS MAGNA. En el libro (de pronta aparición, con el sello de la Universidad de Atacama), "Una historia dramática para la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado", del profesor Manuel Barahona, se analiza este extraordinario suceso

aún está sin respuesta ya que responder a esta pregunta requiere comparar muchos problemas de programación lineal, de tamaños y clases diferentes. Es necesario, además, que la comparación sea hecha de la manera más imparcial posible.

Sin embargo, por ahora, se puede decir lo siguiente: ambos algoritmos han llegado para quedarse, y se cree que jugarán papeles complementarios vitales dentro de la programación lineal primando los aspectos positivos de ambos. Así, por ejemplo, el algoritmo simplex, se considera ideal para el análisis post optimal, mientras que el algoritmo de puntos interiores no puede realizar este análisis con eficiencia. Por otro lado, la mayor ventaja del algoritmo de puntos interiores es que su tasa de crecimiento en el tiempo de procesamiento, al aumentar el tamaño del problema, es menor que el del algoritmo simplex. Por otra lado, según la evidencia con que se cuenta, el tiempo de preparación del algoritmo de puntos evita que sea un competidor fuerte para el método simplex cuando se trata de problemas pequeños, esto es, de problemas de centenas o miles de restricciones.

Otra manera significativa de comparar los dos algoritmos es examinar sus propiedades teóricas en cuanto a complejidad computacional. Karmarkar demostró que la versión original de su algoritmo es un algoritmo de tiempo polinomial. Es decir, el tiempo que se requiere para resolver cualquier problema de programación lineal se puede acotar por una función polinomial del tamaño del problema. Se han construido contraejemplos para demostrar que que el método simplex no posee esta propiedad y que es un algoritmo de **tiempo exponencial**, es decir, el tiempo requerido sólo puede ser acotado por arriba por medio de una función exponencial del tamaño del problema. La diferencia en el mejor de los casos es considerable, no obstante, nada se sabe sobre su desempeño en problemas reales.

Toda esta discusión, y experiencia adquirida, permite realizar los siguientes pronósticos para los dos algoritmos conforme nos acerquemos al siglo XXI: el método simplex continuará siendo el algoritmo estandar para el uso rutinario de la programación lineal, sin embargo, el algoritmo de puntos interiores de Karmarkar, ò alguna de sus variantes, se usará más gradualmente en programas relativamente grandes.

Conviene decir que el algoritmo de Karmarkar converge a la solución óptima sin siquiera haber llegado literalmente a ella, de manera que el procedimiento termina con aproximaciones a la solución exacta, tan cercana como uno quiera. Por lo tanto cuando se usa un algoritmo de puntos internos para aproximarse a una solución óptima, la solución obtenida tal vez se convertirá en la solución básica factible inicial, para que el método simplex termine de obtener la solución y se pueda realizar más eficientemente el análisis postoptimal. Estas ideas nos sugieren que es posible que los dos algoritmos se conviertan, en el futuro, en un único paquete que permita manejar más eficientemente algunos problemas grandes. Dejando el método simplex para los problemas de rutina.

Todo esto presagia que el estudiante seguirá usando el método simplex más que el algoritmo de puntos interiores. De hecho si usa el algoritmo de puntos interiores lo que tendrá será una caja negra que genera rápidamente la solución óptima y después tendrá que usar el método simplex para realizar el análisis postoptimal.

4.6 Mejoramiento de la eficiencia del método simplex.

Una de las consecuencias interesantes, producto de la aparición del algoritmo de Karmarkar, ha sido la renovación de esfuerzos por mejorar la eficiencia computacional del método simplex. Este esfuerzo ha sido llevado a cabo por empresas que tienen interés comercial en dicho programa. Por ejemplo, la IBM distribuye el MPSX/370, un sistema basado en el algoritmo simplex que se usa bastante en las computadoras IBM.

En el IBM Thomas J. Watson Research Center en Yorktown Heights, Nueya York, se está desarrollando (hablamos del año 1990) un nuevo programa experimental, el YKTLP, para la aplicación del método simplex en computadoras IBM, en particular con el modelo 390 con instalación vectorial. Una característica de este programa es el uso de harware vectorial para calcular de manera simultanea los nuevo coeficientes de las variables no básicas en la fila correspondiente de la tabla simplex para la iteración actual. Cuando se tienen miles de variables no básicas, el beneficio de un procesamiento vectorial de este tipo puede ser sustancial. También se están investigando la posibilidad de aprovechar el procesamiento vectorial para acelerar cada iteración. El paquete aludido muestra ya grandes mejoras, con factores que van desde 10 a 50, sobre la aplicación del método simplex corriente. Este paquete mejorado fue el que se usó en la comparación que hizo la AT & Bell Laboratories con el algoritmo de Karmarkar.

4.7 Las computadoras personales.

Somos testigos privilegiados de la explosión en la capacidad para hacer programación lineal en las computadoras personales. En éstas, se pueden resolver problemas que hasta hace muy poco requerían por lo menos de una computadora mediana con todos sus inconvenientes y gastos. Actualmente existen muchísimas empresas que comercializan software de programación lineal para computadoras personales basados en el método simplex. Al principio, los objetivos de estos softwares era educativos, pero ahora, muchos de ellos, son adecuados para resolver problemas comerciales de tamaños muy grandes.

Por ejemplo, el popular paque LINDO puede manejar problemas de hasta 2000 restricciones y 4000 variables, siempre y cuando el número de coeficientes diferentes de cero en las restricciones no exceda de 32000.[3] La solución de problemas grandes por lo general requiere memoria adicional y las versiones más completas del LINDO requiere de un coprocesdor matemático. [4]

Por otra parte la forma conveniente de captura de datos y las características de edición de las hojas de cálculo son muy útiles para la construcción de modelos de programación lineal. Muchos de los paquetes actuales tienen hojas de cálculo compatible y varios de ellos, entre los cuales se halla el VINO, lleva a cabo la optimización dentro del programa de la hoja de cálculo.

En definitiva, el método simplex es un método eficiente y confiable para resolver problemas de programación lineal de pequeõ y mediano tamaño. Los paquetes de software para computadoras personales basados en este algoritmo pueden resolver problemas de miles de variables y restricciones. Los programas para resolver problemas más grandes requieren de computadoras de mayor poder y en estos casos es cuando el algoritmo de Karmarkar, de puntos interuiores, resulta ser una excelente herramienta.

[3]En estos momentos circulan en el mercado versiones del LINDO que soportan hasta 100000 variables, de tal modo que es de esperar que en los próximos años las posibilidades del LINDO sean superiores aún

[4]Actualmente, en 1994, ya están a la venta, en el mercado, los computadores 486 que tienen incorporado el coprocesador matemático y la memoria RAM puede extenderse a límites muy grandes. Esto hace posible utilizar paquetes como el lindo de cientos de milies de variables

Las redes

El modelo de transporte y sus variantes

5.1 Definición del modelo de transporte

Este modelo tiene que ver con la determinación de un plan de costo mínimo para transportar, por ejemplo, una mercadería desde varias fuentes (fábricas, bodegas, etc) a varios destinos (almacenes, comercio, etc). El modelo se puede extender a otras situaciones prácticas, en las áreas de control de inventario, programación de empleos, asignación de personal, flujo de efectivo, etc. El modelo de transporte es un programa lineal que se puede resolver, por ejemplo, con el método simplex o cualesquiera de sus variantes, en particular con el software LINDO/PC. Este modelo puede extenderse para cubrir varias otras aplicaciones interesantes, entre ellas **los modelos de asignación y de transbordo**. Conviene precisar que estos problemas son casos especiales de modelos de redes.

El modelo de transporte consiste en hallar un plan que permita transportar una mercadería desde varias fuentes a varios destinos. Los datos que entrega el problema se pueden resumir en dos:

1. El nivel de oferta en cada fuente y la cantidad de demanda en cada destino.

2. El costo de transporte unitario de la mercadería desde cada una de las fuentes a cada destino.

Puesto que hay una sóla mercadería, un destino puede recibir su demanda de una o más fuentes. El objetivo del modelo consiste en determinar la cantidad que se enviará desde cada fuente a cada destino de tal manera que el costo del transporte total sea mínimo. La figura (1) representa el modelo de transporte como una red con m **fuentes y** n **destinos**. Una fuente o un destino está representado por un

nodo. El **arco** que une una fuente con un destino, respresenta la ruta por la cual se transporta la mercadería.

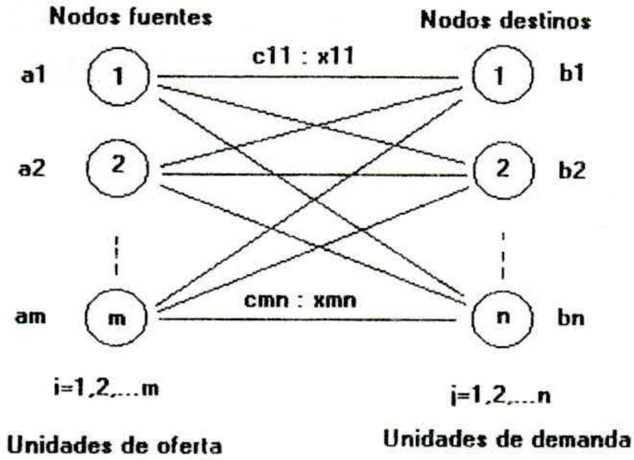


figura (1)

Observe que la cantidad de la oferta en la fuente i es a_i y la demanda en el destino j es b_j. El costo de transporte unitario entre la fuente i y el destino j es c_{ij}. Si x_{ij} representa la cantidad transportada desde la fuente i al destino j, entonces, el modelo general de programación lineal que representa el modelo de transporte se expresa de la siguiente manera.

$$\text{minimizar} \qquad z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \qquad i = 1, 2, ..., m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \qquad j = 1, 2, ..., n$$

donde $x_{ij} \geq 0$ para todas las i, j. El primer conjunto de restricciones señala que la suma de los envíos desde una fuente no puede ser mayor que su oferta. El segundo conjunto requiere que las suma de los envíos a su destino satisfaga su demanda. Este modelo implica que la oferta total debe ser, a lo menos, igual a la demanda total, es decir,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

En la realidad no necesariamente la oferta es igual a la demanda, sin embargo, cuando esto ocurre, el modelo recibe el nombre de **transporte balanceado**.

En lo que sigue ilustraremos estos conceptos con un problema que interpretaremos gráficamente y a continuación escribiremos el programa lineal. La representación en **forma de red** hace que resulte sencillo observar la estrecha relación que existe entre los elementos que intervienen en él.

5.1.1 El modelo de transporte estándar

La compañía **N & N** debe transportar neumáticos desde 3 fábricas hasta 4 centros de distribución. **N & N** tiene operaciones de producción en Santiago, Çopiapó y Arica. Las capacidades de producción de neumáticos, de las tres fábricas, para los siguientes meses está dada en la tabla (1)

Origen	Fábrica	Capacidad de producción en tres meses (unidades)	Total
1	Santiago	5000	
2	Copiapó	6000	
3	Arica	2500	13500

[Tabla 1]

La compañía **N & N** distribuye sus neumáticos a través de cuatro grandes centros de distribución ubicados en cuatro paises: Argentina, Uruguay, Perú y Bolivia. El pronóstico de la demanda en los centros de distribución se muestra en la tabla (2)

Destino	Centro de distribución	Pronóstico de la demanda en tres meses (unidades)	Total
1	Argentina	6000	
2	Uruguay	4000	
3	Perú	2000	
4	Bolivia	1500	13500

[Tabla 2]

La empresa está interesada en saber que tanta producción se debe envíar a cada centro de distribución desde cada una de las fábricas. El la figura (2) se muestra gráficamente la red correspondiente a las 12 rutas posibles que **N & N** puede utilizar. A los círculos que encierran los nombres de las ciudades y los países los llamaremos **nodos** y a las rectas que los unen las llamaremos **arcos**. Insistimos en que, para el problema de transporte, el objetivo es determinar las rutas que deben utilizarse y la cantidad que se debe envíar a través de cada una de ellas, de manera que el costo total del transporte sea mínimo y al mismo tiempo se satisfagan las demandas de distribución. La tabla (3) muestra el costo, en dólares, de transporte por unidad para el problema de la compañía **N & N**.

	Destino			
Origen	Argentina	Uruguay	Perú	Bolivia
Santiago	3	2	7	6
Copiapó	7	5	2	3
Arica	2	5	4	5

[Tabla 3]

De acuerdo a lo dicho en la definición 6.1.0, las variables de decisión en un problema de transporte que tiene m orígenes y n destinos son:

x_{ij} = número de unidades transportadas del origen i al destino j

donde $i = 1, 2, ..., m$ y $j = 1, 2, ..., n$.

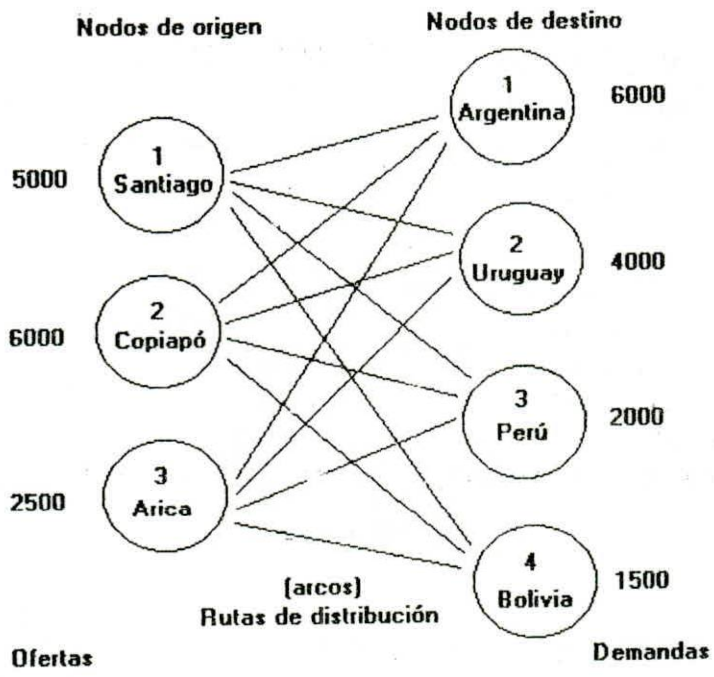


Figura 2

Observe, en la red, figura (2), que existe una variable de decisión para cada uno de los arcos. Por ejemplo, utilizando la notación convenida la expresión $x_{24} = 500$

significaría envíar 500 unidades desde Copiapó a Bolivia; la expresión $x_{23} = 200$ significaría transportar desde Copiapó a Perú 200 unidades de mercadería.

Puesto que el problema consiste en minimizar los costos totales de transporte, utilizamos los datos de la tabla 3, (que son los mismos que aparecen escritos en la red), para escribir las siguientes expresiones de costos para las unidades que se envían desde cada una de las ciudades donde están las fábricas de producción.

$$\text{Costo de transporte}\begin{cases} \text{1) para las unidades que} & \\ \text{se envían desde Santiago} & = 3x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14} \\ \text{2) para las unidades que} & \\ \text{se envían desde Copiapó} & = 7x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} \\ \text{3) para las unidades que} & \\ \text{se envían desde Arica} & = 2x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34} \end{cases}$$

La función objetivo z es igual a la suma de las expresiones del lado derecho de las igualdades anteriores, y las restricciones tienen origen en las ofertas limitadas de las fábricas y en la demanda correspondiente en cada destino. Consideremos, en primer lugar, las restricciones generadas por las ofertas. La capacidad de producción de la fábrica de Santiago es de 5000 unidades. Puesto que el número total de unidades que se envían desde Santiago a los cuatro destinos es:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}$$

resulta que que la restricción de oferta para esta fábrica es:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 5000 \quad \text{(envío desde Santiago)}$$

Teniendo en cuenta que son tres las fábricas y cuatro los destinos, se tendrá en total 3 restricciones de oferta. Las otras dos son:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 6000 \quad \text{(envío desde Copiapó)}$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 2500 \quad \text{(envío desde Arica)}$$

Por otra parte teniendo 4 centros en calidad de destino, se generan las siguientes restricciones de demanda para asegurar que se satisfacen las demandas en los destinos:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 6000 \quad \text{(demanda en Argentina)} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 4000 \quad \text{(demanda en Uruguay)} \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 2000 \quad \text{(demanda en Perú)} \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 1500 \quad \text{(demanda en Bolivia)} \end{aligned}$$

En consecuencia se tiene el sigiuiente programa lineal que contiene 12 variables y 7 restricciones para el problema de **N & N**:

$$\min : z = 3x_{11}+2x_{12}+7x_{13}+6x_{14}+7x_{21}+5x_{22}+2x_{23}+3x_{24}+2x_{31}+5x_{32}+4x_{33}+5x_{34}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 5000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 6000 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 2500 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 6000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2000 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1500 \end{cases}$$

$x_{ij} \geq 0$ para todo $i = 1,2,3$ y $j = 1,2,3,4$

Comentario 1. La mayoría de las personas que practican la toma de decisiones en problemas de transporte sugieren que, en primer lugar, es necesario construir un modelo de red. Hemos visto que se trazan nodos para representar los orígenes y los destinos y arcos que unen tales nodos para representar las rutas factibles de transporte. Después de esto no es difícil traducir el modelo de red a un modelo de programación lineal, desarrollando una restricción para cada nodo e incluyendo una variable para cada arco. En la práctica los problemas de transporte que se resuelven conducen a problemas lineales muy grandes, no es raro encontrar problemas que contienen miles de variables. Sin embargo, actualmente existen paquetes capaces de resolver programas lineales de cientos de miles de variables. Finalmente, hay que decir, que la solución óptima de un modelo de transporte se da con valores enteros, siempre y cuando los valores de la oferta y la demanda sean enteros.

5.1.2 Resolución del programa de transporte utilizando el LINDO/PC

La resolución por computadora del problema de la compañía **N & N**, muestra la tabla siguiente:

Valor de la función objetivo		
1)	39500.00000	
Variable	**Valor**	**Costos reducidos**
x11	3500.00000	0.000000
x12	1500.00000	0.000000
x13	0000.00000	8.000000
x14	0000.00000	6.000000
x21	0000.00000	1.000000
x22	2500.00000	0.000000
x23	2000.00000	0.000000
x24	1500.00000	0.000000
x31	2500.00000	0.000000
x32	0000.00000	4.000000
x33	0000.00000	6.000000
x34	0000.00000	6.000000

[Tabla 4]

Por no ser de interés para el problema, eliminaremos de la tabla la información relativa a los tiempos de holgura/excedente y los precios duales de tal modo que veremos en ella, sólamente, los valores de las variables de decisión.

Se observa que el costo mínimo total del transporte es de 39 500 dólares. Los valores de las variables de decisión muestran las cantidades óptimas que se deben envíar por cada ruta. Por ejemplo, $x_{11} = 3\,500$ indica que se deben envíar 3 500 unidades por la ruta Santiago – Argentina; $x_{12} = 1\,500$, indica que se deben envíar 1 500 unidades por la ruta Santiago – Uruguay; $x_{34} = 0.00000$ indica que por la ruta de Arica a Bolivia no debe envíarse unidad alguna.

La tabla (5) muestra una interpretación más clara de la solución del problema de transporte de la compañía **N & N**.

Ruta		Unidades que	Costo por	Costo	Costo
Desde	Hasta	se envían	unidad $	por ruta	total $
Santiago	Argentina	3 500	3	10 500	
Santiago	Uruguay	1 500	2	03 000	
Copiapó	Uruguay	2 500	5	12 500	
Copiapó	Perú	2 000	2	04 000	
Copiapó	Bolivia	1 500	3	04 500	
Arica	Argentina	2 500	2	05 000	39 500

[Tabla 5]

La figura (3) muestra la red óptima de distribución para el problema de transporte.

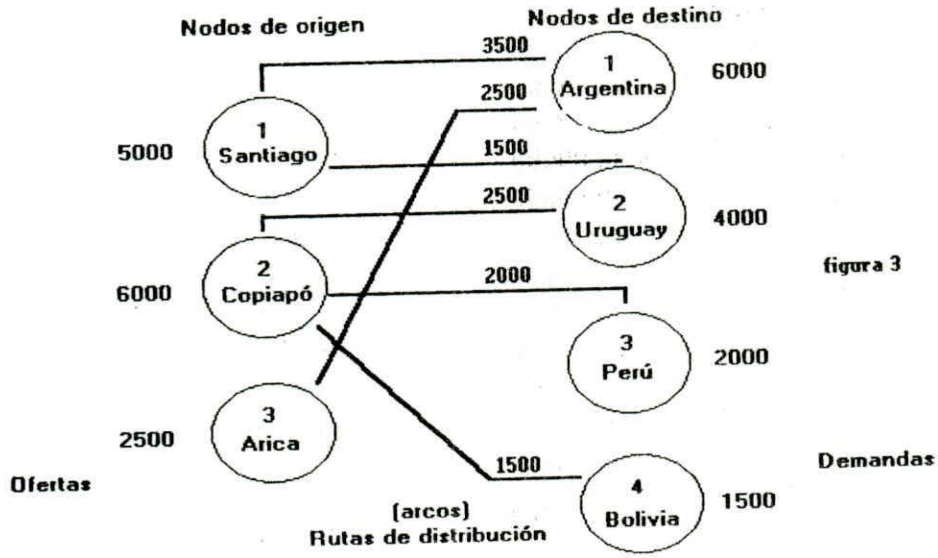


figura 3

Comentario 2. Si la oferta total no fuera igual a la demanda, esto es, si la oferta excede a la demanda total, ésta aparece como holgura en la solución del problema y puede interpretarse como oferta no utilizada o que no se envía desde el origen. El lector puede resolver nuevamente el problema utilizando el LINDO/PC y verificar que en este problema las variables de holgura son iguales a cero para cada restricción.

Si la oferta total es menor que las demanda total, el modelo no tiene una solución factible. En esta situación el administrador prefiere contruir un modelo de transporte de costo mínimo para la oferta disponible que indique que destinos tendrían demanda insatisfecha. Para obtener esta solución se modifica la representación de la red agregando un origen ficticio con una oferta igual a la diferencia entre la demanda total y la oferta total. En este caso el modelo tiene una solución factible. Se asigna un costo de cero por unidad a cada uno de los arcos que salen del origen ficticio, de manera que el valor de la solución óptima para el problema modificado representa los costos de transporte para las unidades que en realidad se envían. Cuando se pone en prctica la solución óptima, los destinos que muestran que reciben envíos desde el origen ficticio serían los destinos en los cuales no se satisface completamente la demanda.

Puede ocurrir también que no sea posible establecer una ruta desde cada uno de los orígenes hasta cada uno de los destinos. Cuando esto ocurre, se elimina el arco y la variable correspondiente en la red.

5.2 El problema de asignación

Este problema se presenta en situaciones tales como la asignación de tareas a máquinas, a trabajadores, a personal de ventas en determinados territorios. Consíderese, por ejemplo, la situación de asignar m trabajos (o trabajadores) a n máquinas. Cuando un trabajo ($i = 1, 2, ..., m$) se asigna a la máquina ($j = 1, 2, ..., n$), se incurre en un costo c_{ij}. El objetivo consiste en asignar trabajos a las máquinas (un trabajador por máquina) al menor costo posible. La formulación de este problema puede considerarse como un caso particular del problema de transporte. El problema general se conoce como **problema de asignación**. En este caso los trabajos son los **nodos de origen** y las máquinas representan los **nodos de destino**. La oferta disponible en cada origen es 1 y la demanda requerida en cada destino, también es 1. El costo de transportar (asignar) el trabajo i (proyecto i) a la máquina j (cliente j) es c_{ij}. Como ilustración del problema de transporte analizaremos un caso de asignación de proyectos que deben ser estudiados en tiempos óptimos.

El Departamento de Industria de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Atacama ha recibido, de la oficina de Planificación de la Municipalidad de Copiapó, la solicitud de estudiar la factibilidad de tres proyectos en las áreas de turismo, medio ambiente y urbanismo para la Tercera Región. El departamento de industria, en adelante **DI**, debe asignar jefes de proyectos a los profesores **NN**, **JV** y **SE**. El director del **DI** estima que el tiempo que cada profesor se demorará en estudiar cada uno de los proyectos dependerá fundamentalmente de su experiencia. Supondremos que cada profesor debe servir a un cliente, por lo tanto tendremos tres clientes. La tabla (6) muestra una estimación de los tiempos, en días, que cada jefe de proyecto se demoraría en el estudio de cada uno de ellos.

	Clientes		
Jefe de Proyecto	Turismo (1)	Medio ambiente (2)	Urbanismo (3)
Profesor **NN**	10	15	9
Profesor **JV**	9	18	5
Profesor **SE**	6	14	3

[Tabla 6]

La tabla anterior significa, por ejemplo, que el profesor **NN** demoraría 10 días en desarrollar el proyecto de turismo y 15 y 9 días en desarrollar los proyectos de medio ambiente y urbanismo respectivamente. Significa, por ejemplo, que mientras el profesor **NN** se demoraría 10 días en desarrollar el proyecto de turismo, los profesores **JV** y **SE**, se demorarían 9 y 6 días respectivamente. De tal modo que teniendo tres jefes de proyectos se tienen nueve alternativas de asignación posibles.

La figura (4) muestra la representación del problema de asignación del **DI** en forma de red. Los nodos corresponden a los jefes de proyectos y a los clientes. Los arcos representan las posibles asignaciones de jefes de proyectos a los clientes. La oferta en cada nodo de origen y la demanda en cada nodo de destino es 1, esto es, un proyecto de oferta y un proyecto de demanda. El costo de la asignación de un jefe de proyecto a un cliente es el tiempo que se demoraría el encargado del proyecto en realizarlo.

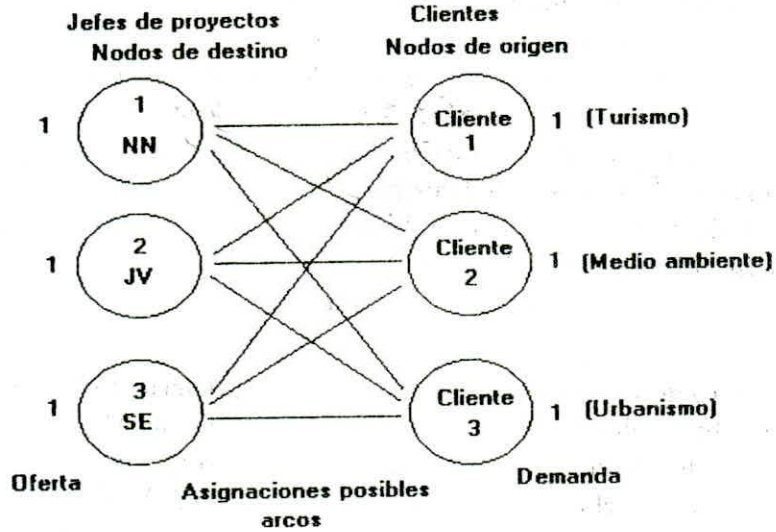


Figura 4

La similutud entre el modelo de redes para el problema de transporte y el modelo de redes para el problema de asignación es evidente. De tal modo que el problema de asignación no es más que un caso particular del problema de transporte en que la cantidad que se envía en cada uno de los arcos es **cero** o **uno**.

Intentaremos construir el programa lineal utilizando el modelo de red y los datos de la tabla (6). Nuevamente se necesita una restricción para cada nodo y una variable para cada arco. Tal como lo hicimos en en el problema de transporte, utilizaremos variables de decisión con doble índice. Así, por ejemplo, x_{11} denota la asignación del proyecto 1 al cliente 1, es decir, la asignación del proyecto de turismo al profesor **NN**; x_{12} significa que le hemos asignado el proyecto 1 al cliente 2, es decir, le hemos asignado el proyecto de medio ambiente al profesor **NN**; x_{32}, significa que le hemos asignado al profesor **SE** el proyecto de Medio Ambiente, etc. Esta forma de asignar los proyectos a los clientes, nos sugiere la siguiente definición de asignación:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se asigna el jefe de proyecto } i \text{ al cliente } j \\ 0 & \text{si no es así} \end{cases}$$

Esta notación es coherente puesto que, por ejemplo, si se asigna el proyecto de turismo al profesor **NN**, esto es, se le asigna el proyecto 1 al cliente 1, escribiríamos

$x_{11} = 1$, y en tal caso a los profesores **JV** y **SE** no se les podría asignar el mismo proyecto, debiéndose escribir $x_{21} = 0$ y $x_{31} = 0$. De acuerdo a la notación que hemos definido podemos expresar, en términos de ecuaciones, los días que se requerirían para que cada profesor terminara dichos proyectos. En efecto:

$$\begin{array}{lcl}
\text{Días que se requieren si se asigna a } \mathbf{NN} & = & 10x_{11} + 15x_{12} + 9x_{13} \\
\text{Días que se requieren si se asigna a } \mathbf{JV} & = & 9x_{21} + 18x_{22} + 5x_{23} \\
\text{Días que se requieren si se asigna a } \mathbf{SE} & = & 6x_{31} + 14x_{32} + 3x_{33}
\end{array}$$

La suma de los tiempos que requieren los tres jefes de proyectos proporciona el número total de días que se requieren para terminar el estudio de las tres asignaciones. Esta suma nos proporciona la función objetivo:

$$z = 10x_{11} + 15x_{12} + 9x_{13} + 9x_{21} + 18x_{22} + 5x_{23} + 6x_{31} + 14x_{32} + 3x_{33}$$

Por otra parte las restricciones deben reflejar el hecho de que a cada uno de los profesores puede asignársele, a lo más, un cliente y que a un cliente se le puede asignar, a lo más, un profesor. En consecuencia tenemos el siguiente conjunto de restricciones.

$$\begin{cases}
x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1 & \text{asignación de } \mathbf{NN} \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1 & \text{asignación de } \mathbf{JV} \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1 & \text{asignación de } \mathbf{SE} \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 & \text{cliente 1} \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 & \text{cliente 2} \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 & \text{cliente 3}
\end{cases}$$

Combinando la función objetivo y las restricciones, obtenemos el siguiente programa lineal con 9 variables y 3 restricciones para el problema de asignación de proyectos.

hallar min $z = 10x_{11} + 15x_{12} + 9x_{13} + 9x_{21} + 18x_{22} + 5x_{23} + 6x_{31} + 14x_{32} + 3x_{33}$

sujeto a las restricciones:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & & \leq & 1 \\
 & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & & & & \leq & 1 \\
 & & x_{31} & + & x_{32} & + & x_{33} & & & \leq & 1 \\
 & x_{11} & + & x_{21} & + & x_{31} & & & & = & 1 \\
 & & x_{12} & + & x_{22} & + & x_{32} & & & = & 1 \\
 & & & x_{13} & + & x_{23} & + & x_{33} & & = & 1
\end{array}\right.$$

$x_{ij} \geq 0$ para todo $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3$

5.2.1 Resolución del programa de asignación utilizando el LINDO/PC

La tabla (7) muestra la solución, utilizando el LINDO/PC, del programa lineal propuesto. Las filas 2, 6 y 7, ($x_{12} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{31} = 1$) muestran claramente que al profesor **NN** se le ha asignado el cliente 2, es decir, el proyecto de medio ambiente. Al profesor **JV** se le asigna el cliente 3, es decir, se le asignó el proyecto de urbanización. Finalmente al profesor **SE**, se le asignó el cliente 1, es decir, se le asignó el proyecto de turismo. Que el valor de la función objetivo sea 26, significa que el total de tiempo que se requiere para terminar los tres proyectos es de 26 días. La tabla (8) resume más claramente estos resultados.

VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO	
1)	26.00000

VARIABLE	VALOR	COSTOS REDUCIDOS
x11	0.00000	1.000000
x12	1.00000	0.000000
x13	0.00000	4.000000
x21	0.00000	0.000000
x22	0.00000	3.000000
x23	1.00000	0.000000
x31	1.00000	0.000000
x32	0.00000	2.000000
x33	0.00000	1.000000

[Tabla 7]

Asignaciones óptimas para el problema de asignación de proyectos

Jefe de Proyecto	Cliente asignado	Días	Total de días
Profesor **NN**	2	15	
Profesor **JV**	3	5	
Profesor **SE**	1	6	26

[Tabla 8]

Comentario 1. Hemos visto que el problema de asignación puede estudiarse como un caso particular del problema de transporte, por lo que debiéramos esperar que las dificultades que puedan surgir sean similares a las que aparecen en este último. ¿Qué ocurriría, por ejemplo, si el número de profesores excediera al número de proyectos?

Si esto ocurriera, es decir, si el número de profesores excediera al número de tareas, no habría problema. De hecho si hubieran 4 profesores uno de ellos se quedaría sin proyecto en la solución óptima.

En cambio, si el número de profesores fuese menor que el número de proyectos, digamos, por ejemplo, 3 profesores y cuatro proyectos, entonces, no habría solución factible. Recordemos que una solución para esta situación, en el caso del problema de transporte, era incluir un agente ficticio. De tal modo que, en nuestro caso, la dificultad se resuelve incluyendo un profesor ficticio. Los coeficientes, en la función objetivo, de los jefes de proyectos ficticios, serán iguales a cero. En este caso la solución óptima indicaría la asignación de encargados de proyectos sólamente a tres profesores y un proyecto se quedaría sin encargado.

5.2.2 El modelo general para el programa de asignación

Hemos dicho que el problema de asignación implica n agentes y m tareas. Si se hace $x_{ij} = 1$ o $x_{ij} = 0$, dependiendo de si se asigna, o no, al agente i a la tarea j, y si c_{ij} denota el costo de asignar el agente i a la tarea j, entonces, el modelo general de asignación puede escribirse en la forma siguiente:

$$\text{minimizar} \qquad z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1, \qquad i = 1, 2, ..., m \text{ agentes}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, 2, ..., n \text{ tareas}$$

donde $x_{ij} \geq 0$ para todas las i, j.

Si el número de agentes m es menor que el número de tareas n, es decir, si la oferta es menor que la demanda, se deben incluir $n - m$ agentes ficticios con el objeto de lograr una solución factible.

5.3 El modelo de transbordo

El problema de transbordo es una extensión del modelo de transporte en el que se agregan nodos intermedios; a estos nodos se les llama **nodos de transbordo**. La invención de los nodos de transbordo tiene utilidad en los casos en que es necesario mantener instalaciones intermedias antes de abastecer los nodos de destino. Esta distribución, de tipo más general, permite los envíos entre cualesquiera de los tres tipos de nodos: a) nodos de origen, b) nodos de transbordo y c) nodos de destino. De esta forma el problema de transbordo permite envíar mercadería desde una ubicación de abasto (nodo de origen) a otra ubicación de abasto (almacenes) y luego a los nodos de destino.

Igual que en el problema de transporte, la oferta disponible en cada origen es limitada, y la demanda en cada destino es conocida. El objetivo del problema de transbordo es determinar cuantas unidades se deben envíar sobre cada arco de la red de manera que se satisfagan las demandas de todos los destinos con el mínimo costo de transporte posible. Consideremos el caso de una empresa nacional que arma, y vende, computadores a algunos países de América Latina.

La empresa **Chile Hardware** es una compañía (que arma y vende computadores) que tiene instalaciones de producción en Concepción y Vallenar. Los computadores que se arman en ambas ciudades pueden envíarse a cualesquiera de los almacenes que se encuentran en los puertos de Valparaiso y Caldera. La compañía abastece desde estos puertos a sus distribuidores en Argentina, Uruguay, Perú y Bolivia. A continuación se muestra la red con las características básicas del problema.

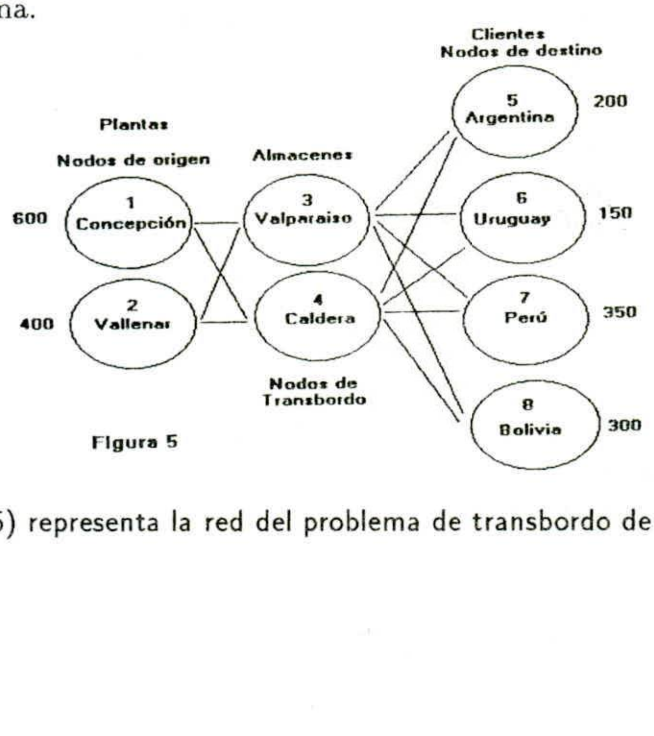


Figura 5

La figura (5) representa la red del problema de transbordo de Chile Hardware.

Observe que en los márgenes izquierdo y derecho se hallan las ofertas y las demandas, respectivamente. Los nodos 1 y 2 son los de origen y los nodos 3 y 4 son los de transbordo. Los nodos 5, 6, 7 y 8 son los de destino. La tabla (9) muestra los costos de transporte, por unidad, para el problema de Chile Hardware, desde las plantas ensambladoras hasta los puertos de Valparaiso y Caldera.

	Almacenes	
Planta	Valparaiso	Caldera
Concepción	2	3
Vallenar	3	1

[Tabla 9]

Los costos, por unidad, leidas en **UF**, deben interpretarse de la manera siguiente. El costo de transporte por unidad desde Concepción a Valparaiso es de 2 **UF**. El costo de transporte por unidad desde Concepción a Caldera es de 3 **UF**. Los costos de transportar una unidad desde Vallenar a Valparaiso y Caldera, son de 3 y 1 **UF**, respectivamente.

La tabla (10) muestra los costos de transporte por unidad desde los puertos (almacenes) hasta los países donde se distribuyen los computadores.

	Distribuidores			
Almacenes	Argentina	Uruguay	Perú	Bolivia
Valparaiso	2	6	3	6
Caldera	4	4	6	5

[Tabla 9]

La tabla debe interpretarse de la manera siguiente; los costos de transportar una unidad desde Valparaiso a Argentina, Uruguay, Perú y Bolivia son de 2, 6, 3 y 6 **UF**, respectivamente; los costos de transportar una unidad desde Caldera a Argentina, Uruguay, Perú y Bolivia, son de 4, 4, 6 y 5 **UF**, respectivamente.

A partir de la representación de red y utilizando las tablas 9 y 10 construiremos el programa lineal del modelo de transbordo. Tal como en el problema de transporte se requiere una restricción para cada nodo y una variable para cada arco. Para representar el número de unidades que se envían del nodo i al nodo j, utilizaremos la notación x_{ij}. Por ejemplo x_{13} = denota el número de unidades que se envían desde la planta de Concepción al almacen de Valparaiso; x_{14} denota el número de unidades que se envían desde la planta de Concepción al almacen de Caldera; x_{35} denota el número de unidades que se envían desde el almacen de Valparaiso a la distribuidora en Argentina, y así sucesivamente.

Puesto que la oferta de la planta de Concepción es de 600 unidades, la cantidad que se puede envíar, desde esta planta, a los almacenes de Valparaiso o de Caldera debe ser menor o igual que 600. La inecuación que expresa esta idea es:

$$x_{13} + x_{14} \leq 600$$

Analogamente, la planta de Vallenar puede mandar, a lo más, 400 computadores, a los almacenes de Valparaiso y Caldera. La inecuación que expresa esta idea es:

$$x_{23} + x_{24} \leq 400$$

Veamos, ahora, como son las restricciones de los nodos de transbordo. Para el nodo 3, esto es, el almacen de Valparaiso, se tiene que garantizar que el número de unidades que se envían debe ser igual al número de unidades que se reciben. Observemos que el número de unidades que salen del nodo 3 es:

$$x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38}$$

y las unidades que entran al nodo 3 son:

$$x_{13} + x_{23}$$

En consecuencia debe satisfacerse la igualdad:

$$x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} = x_{13} + x_{23}$$

o lo que es lo mismo

$$-x_{13} - x_{23} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} = 0$$

Similarmente, el número de unidades que se envían desde el nodo 4 debe ser igual al número de unidades que se recibe. Se envían

$$x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48}$$

y las unidades que entran al nodo 4 son:

$$x_{14} + x_{24}$$

Por lo tanto la ecuación de restricción correspondiente al nodo 4 es:

$$-x_{14} - x_{24} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} = 0$$

Estableceremos, ahora, las restricciones correspondientes a los nodos de destino. Recordemos que, para cada nodo, la cantidad que se envía a ese destino debe ser igual a la demanda. Por ejemplo, para satisfacer la demanda de 200 computadores en el nodo 5, es decir, del distribuidor de Argentina, resulta que:

$$x_{35} + x_{45} = 200$$

De manera similar se deduce que las restricciones para los nodos 6, 7 y 8 son las siguientes:

$$\begin{aligned} x_{36} + x_{46} &= 150 \\ x_{37} + x_{47} &= 350 \\ x_{38} + x_{48} &= 300 \end{aligned}$$

De todo lo dicho resulta que el programa lineal para el problema de transbordo de la compañía Chile Hardware es el siguiente. Hallar:

$$\min \ z = 2x_{13}+3x_{14}+3x_{23}+x_{24}+2x_{35}+6x_{36}+3x_{37}+6x_{38}+4x_{45}+4x_{46}+6x_{47}+5x_{48}$$

sujeto a las restricciones

$$\left.\begin{aligned} x_{13} + x_{14} &\leq 600 \\ x_{23} + x_{24} &\leq 400 \end{aligned}\right\} \text{Restricciones de los nodos de origen}$$

$$\left.\begin{aligned} -x_{13} - x_{23} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} &= 0 \\ -x_{14} - x_{24} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Restricciones de los nodos de transbordo}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{35} + x_{45} &= 200 \\ x_{36} + x_{46} &= 150 \\ x_{37} + x_{47} &= 350 \\ x_{38} + x_{48} &= 300 \end{aligned}\right\} \text{Restricciones de los nodos de destino}$$

donde $x_{ij} \geq 0$ para todo i, j.

5.3.1 Solución del problema de transbordo utilizando el LINDO/PC

[Tabla 11]

VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO		
1)	5 200	
VARIABLE	VALOR	COSTOS REDUCIDOS
x13	600.00000	0.000000
x14	000.00000	0.000000
x23	000.00000	3.000000
x24	400.00000	0.000000
x35	200.00000	0.000000
x36	000.00000	1.000000
x37	350.00000	0.000000
x38	050.00000	0.000000
x45	000.00000	3.000000
x46	150.00000	0.000000
x47	000.00000	4.000000
x48	250.00000	0.000000

En la tabla (12) se resume la solución óptima en una forma más clara aún.

Solución óptima para el problema de la Chile Hardware

Ruta		Unidades que	Costo por	Costo	
Desde	Hasta	envían	unidad	total	
Concepción	Valparaiso	600	2	1200	
Vallenar o	Caldera	400	1	400	
Valparaiso	Argentina	200	2	400	
Valparaiso	Perú	350	3	1050	
Valparaiso	Bolivia	050	6	300	
Caldera	Uruguay	150	4	600	
Caldera	Bolivia	250	5	1250	5200

[Tabla 12]

5.3.2 El modelo general para el problema de transbordo

El problema que hemos resuelto nos sugiere el siguiente modelo general de programación lineal para el problema de transbordo.

$$\min \underbrace{\sum}_{\text{todos los arcos}} c_{ij}x_{ij}$$

sujeto a las restricciones

$$\text{Nodo de origen } i \qquad \underbrace{\sum}_{\text{arcos que salen}} x_{ij} - \underbrace{\sum}_{\text{arcos que entran}} x_{ij} \leq s_i$$

$$\text{Transferencia de nodos} \qquad \underbrace{\sum}_{\text{arcos que salen}} x_{ij} - \underbrace{\sum}_{\text{arcos que entran}} x_{ij} = 0$$

$$\text{Nodos de destino } j \qquad \underbrace{\sum}_{\text{arcos que entran}} x_{ij} - \underbrace{\sum}_{\text{arcos que salen}} x_{ij} = d_j$$

con $x_{ij} \geq 0$ y donde:

c_{ij} = costo por unidad de enviar del nodo i al nodo j.

s_i = oferta en el nodo i.

d_j = demanda en el nodo j.

5.4 Ejercicios propuestos

1. Considere la siguiente representación de red para un problema de transporte.

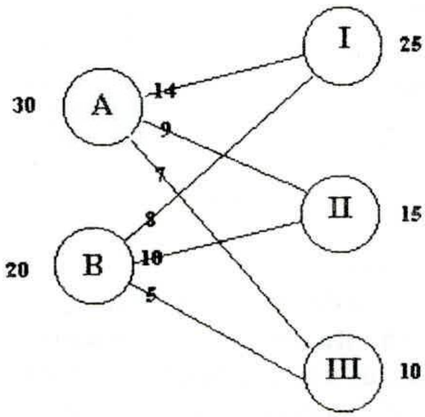


Figura 6

Se muestran en la red las ofertas, las demandas y los costos de transporte por unidad. a) Elabore un modelo de programación lineal para el problema. b) Determine la solución óptima utilizando el LINDO/PC.

2. La compañía **Carrete Inc.** fabrica un producto en tres plantas y los envía a tres almacenes. Los costos de transporte por unidad y la demanda de los almacenes se muestran en la tabla (1).

	Almacenes			
Planta	W_1	W_2	W_3	Capacidad de las plantas
P_1	20	16	24	300
P_2	10	10	8	500
P_3	12	18	10	100
Demanda	200	400	300	

[Tabla1]

a) Elabore una representación de red para el problema. b) Construya un modelo de programación lineal para minimizar los costos de transporte. Resuelva este modelo y halle la solución de costo mínimo. c) Suponiendo que los elementos de la tabla (1) representan las utilidades por unidad al fabricar en la planta i y vender en la planta j, ¿de qué manera se modifica el planteamiento del problema con respecto al de la parte b)?

3. Considere la información que contiene la tabla (2) respecto de un problema de transporte.

	Destino			
Puertos de origen	Panamá	Perú	Brasil	Oferta
Valparaiso	20	16	24	300
Caldera	10	10	8	500
Chañaral	12	18	10	100
Demanda	300	200	200	

[Tabla2]

a) Elabore una representación de red para este problema. b) Elabore un modelo de programación lineal para este modelo de transporte. c) Resuelva el programa lineal. ¿Cuál es la solución de costo mínimo?, ¿cuántas unidades se envían por cada ruta de transporte?. d) Supóngase que existe el requerimiento de envíar 100 unidades en la ruta Valparaiso – Panamá, ¿de qué manera se tendría que modificar el modelo de programación lineal para reflejar este cambio?. e) Suponga que una huelga de trabajadores marítimos deja temporalmente fuera de servicio, en Chile, los puertos de Chañaral y Caldera, y en el exterior, los puertos en Panamá y Perú.(quedando fuera de servicio las rutas chañaral Panamá y Caldera Perú). ¿De qué modo se tendría que modificar el modelo de programación lineal para reflejar estos cambios? f) Resuelva, en primer lugar, el problema de transporte con la modificación del punto (d) y después con la modificación del punto (c). ¿Qué efecto tiene cada uno de estos cambios sobre los costos totales de transporte y sobre el programa específico de transporte? Utilice el LINDO/PC.

4. La empresa **Inca de Oro Chemicals.** fabrica un material especial de base de aceite que escasea en estos momentos. Cuatro de los clientes de la compañía han colocado pedidos que exceden la capacidad combinada de las plantas en Tierra Amarilla y Bahía Inglesa de **Inca de Oro Chemicals**. Los administradores de la empresa enfrentan el problema de decidir cuántas unidades deben envíar a cada cliente. Como los cuatro clientes pertenecen a industrias distintas, la estructura de precios permite cobrar precios diferentes a los distintos clientes. Sin embargo, algunas leves diferencias en los costos de producción en las dos plantas y los distintos costos de transportes entre las plantas y los clientes hacen que la estrategia de **vender a quien ofrezca más** sea inaceptable. Después de considerar el precio, los costos de producción y los costos de transportes, **Inca de oro Chemicals** ha establecido las siguientes utilidades por unidad para cada alternativa de planta y cliente.

	Clientes			
Plantas	C_1	C_2	C_3	C_4
Tierra Amarilla	32	34	32	40
Bahia Inglesa	34	30	28	38

[Tabla3]

Las capacidades de las plantas y los pedidos de los clientes son los siguientes

Capacidad de las plantas en unidades		Pedidos de distribuidores en unidades
Tierra Amarilla	5000	D_1 2000
		D_2 5000
Bahia Inglesa	3000	D_3 3000
		D_4 2000

[Tabla4]

a) ¿ Cuántas unidades debe fabricar cada planta para cada cliente con el objeto de maximizar las utilidades ?
b) ¿ La demanda de cual cliente no será satisfecha ?

5. Una compañía de pelotas de futbol opera en fábricas ubicadas en las ciudades A, B y C. Los costos de transporte por cada unidad para los envíos que se hacen desde las tres plantas a los centros de distribución en las ciudades X, Y, Z son los siguientes:

	Centros de distribución		
Fábricas	Ciudad X	Ciudad Y	Ciudad Z
A	1,45	1,60	1,40
B	1,10	2,25	0,60
C	1,20	1,20	1,80

[Tabla 5]

Después de considerar los precios de transporte, los administradores han decidido que en ninguna circunstancia utilizarían la ruta desde la fábrica en la ciudad B al centro de distribución en la ciudad Y. Las capacidades de las plantas y los pedidos de los distribuidores son los siguientes:

Planta (Ciudad)	Capacidad (unidades)	Distribuidor	Pedidos (unidades)
A	400	Ciudad X	400
B	600	Ciudad Y	400
C	300	Ciudad Z	400

[Tabla 6]

Debido a diferencias en las escalas de salarios en las tres plantas, el costo unitario de producción varía entre ellas. Suponiendo que los costos son de 29,50 dólares por unidad en la fábrica de la ciudad A, de 31,20 dólares por unidad en la fábrica de la ciudad B y de 30,35 dólares por unidad en la fábrica de la ciudad C, obtenga el plan de producción y distribución que minimice los costos de producción y transporte.

6. La compañía **Mena & Asociados** es un despacho contable que tiene tres nuevos proyectos. Se asignarán a los tres nuevos clientes tres contadores jefes de proyectos: los señores Milton Cortés, Salim Elal y Julio Vera. La compañía, en base a la experiencia de cada uno de ellos, estima los tiempos que se demorarían en desarrollarlos.

	Clientes		
Jefe de proyecto	I	II	III
Salim	10	16	32
Milton	14	22	40
Vera	22	24	34

[Tabla 7]

a) Desarrolle una rpresentación de red para este problema
b) Escriba el programa lineal y resuélvalo. ¿ Cuál es el tiempo total que se requiere ?

7. Suponga que la empresa contrata al señor Nelson Nuñez, otro contador, al cual se le puede asignar uno de los proyectos. La tabla (7) muestra la estimacioń de tiempo para este nuevo empleado.

	Clientes		
Jefe de proyecto	I	II	III
S. Elal	10	16	32
M. Cortés	14	22	40
J. Vera	22	24	34
N. Nu ez	14	18	36

[Tabla 8]

a) ¿ Cuál es la asignación óptima ?

b) ¿ De qué manera cambia la asignación, en comparación con la mejor asignación del problema anterior ?, ¿ se vieron ahorros al considerar al señor Nuñez dentro de los jefes de proyecto ?

8. Resuelva el problema de asignación del Departamento de Industrias de la Universidad de Atacama (sección 6.2.0, página 149) suponiendo que el profesor JM, ha estimado él mismo, que demoraría 8, 16 y 6 horas en atender los proyectos de Turismo, Medio Ambiente y Urbanismo, respectivamente.

	Clientes		
Jefe de proyecto	Turismo	Medio ambiente	Urbanismo
Profesor NN	10	15	9
Profesor JV	9	18	5
Profesor WW	6	14	3
Profesor JM	8	16	6

[Tabla 9]

9. En las operaciones que realiza un taller, se pueden efectuar cuatro tareas en cualesquiera de cuatro máquinas. En la tabla de más abajo se resumen las horas que se requieren para cada tarea en cada máquina. ¿ Cuál es la asignación de tareas y máquinas que arroja el tiempo total mínimo ?

	Máquinas			
Tarea	A	B	C	D
I	32	18	32	26
II	22	24	12	16
III	24	30	26	24
IV	26	30	28	20

[Tabla 10]

10. Existen disponibles cuatro secretarias para mecanografiar cualesquiera de tres reportes del Departamento de Matemáticas de la UDA. En la tabla (11) se muestran las horas que requeriría cada secretaria para efectuar esta tarea. Construya un modelo en red para este problema. ¿ Cuál es la asignación de secretarias a cada reporte que minimiza el tiempo total ?

	Reportes		
Jefe de proyecto	A	B	C
Rosa	24	12	10
Nelly	19	11	11
Roxana	25	16	16
Darife	25	14	13

[Tabla 11]

11. La compañía manufacturera de papeles y cartones **CMPC** tiene fabricas de papel ubicados en Laja y en Punta Arenas. Envía parte de su producción a almacenes, en Estados Unidos, a las ciudades de Portsmouth y Albany. Los distribuidores más importantes de la compañía se hallan en las ciudades de Boston New York y Filadelfia. Las capacidades de las plantas y las demandas de los distribuidores (en unidades) para el año 1996 son los siguientes

Plantas	Capacidad	Distribuidor	Demanda
Punta Arenas	300	Boston	150
Laja	100	New York	100
		Philadelfia	150

A continuación se muestran los costos unitarios de transporte para los envíos que se hacen desde las dos plantas a los dos almacenes, y desde los dos almacenes a los tres distribuidores.

	Almacenes	
Plantas	Albany	Portsmouth
Laja	45	38
Punta Arenas	41	36

	Distribuidores		
Almacenes	Boston	New York	Philadelfia
Albany	8	5	7
Portsmouth	5	6	10

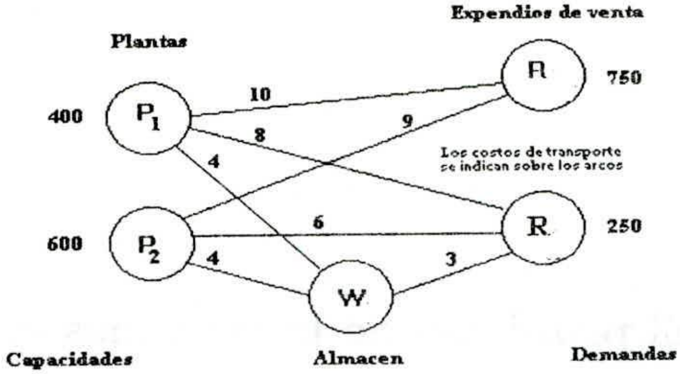
a) Trace la representación en red para el problema de la compañía manufacturera de papeles y cartones **CMPC**.

b) Plantee el problema de la **CMPC** como un programa matemático.

c) Determine el programa de embarque de costo mínimo utilizando el software LINDO/PC.

12. Una compañía tiene dos plantas (P_1 y P_2) en Santiago, un almacen W en la Tercera Región, y dos expendios, R_1 y R_2, de ventas al menudeo. En la figura siguiente se representan las capacidades de las plantas, las demandas en los expendios y los costos de transportes por unidad.

Figura 7



a) Construya un programa lineal para minimizar los costos de transporte.

b) Determine la solución óptima para este problema

c) ¿ Qué cambios tendrían que hacerse en el modelo de programación lineal si la cantidad máxima de artículos que se puede envíar desde W a R_1 es de 500 unidades ?, de que manera cambiaría esto la solución óptima ?

5.5 El problema de la ruta más corta

Hemos visto que los problemas de redes se presentan en una gran variedad de situaciones. Se ha utilizado la representación de redes en problemas de distribución, planeación de proyectos, de transporte, etc. La representación en red de un problema proporciona una visión general que ayuda a visualizar las relaciones entre los diversos elementos que componen el sistema. Si consideramos una red con nodos de origen y de destino, de modo que a cada uno de los arcos se le ha asociado una distancia, el problema de la ruta más corta consiste justamente en hallar la ruta más corta (la trayectoria con la mínima distancia total) que va desde el origen al destino. En lo que sigue aplicaremos este concepto a una compañía constructora.

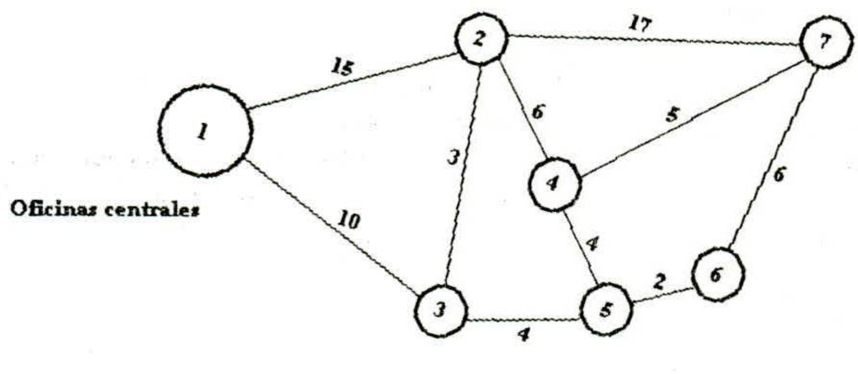


Figura 1

La compañía **Concretos S.A** tiene varios proyectos de construcción distribuidos en diversas comunas de Santiago ubicadas a decenas de kilómetros de sus oficinas centrales. En un día normal de trabajo deben efectuarse varios viajes al día desde, y hacia, los lugares de construcción llevando hombres, equipos y suministros. Los costos relacionados con las actividades de transporte son importantes. En la figura (1) se describen, mediante una red de calles y carreteras las alternativas de transporte entre las oficinas centrales y los lugares de construcción. Los círculos o nodos de la red corresponden a los lugares donde se llevan a cabo las construcciones y los arcos simulan las calles y carreteras. Sobre los arcos se indican las distancias entre los lugares de construcción. El problema de la compañía **Concretos S.A** consiste es determinar la ruta (o trayectoria) que minimice la distancia total recorrida entre las oficinas centrales y los lugares de construcción

5.6 El algoritmo de la ruta más corta

De la notación. Antes de desarrollar el algoritmo conviene aclarar la notación que usaremos. A medida que se vaya estableciendo el posible camino más corto, se fijará un rótulo o etiqueta que se colocará en cada nodo y que indicará la distancia más corta entre las oficinas centrales y los lugares de construcción. Para simplificar la notación indicaremos con el número 1 el nodo correspondiente a las oficinas centrales y con los siguientes números naturales a los nodos restantes. La etiqueta colocada sobre un nodo consta de dos números encerrados en un corchete. El primer número del rótulo colocado sobre el nodo indica la distancia desde el nodo (1) hasta dicho nodo. Y el segundo número indica el nodo que precede al nodo actual. La figura (2) muestra una porción de la red de la compañía **Concreto S.A** y un rótulo sobre el nodo 7.

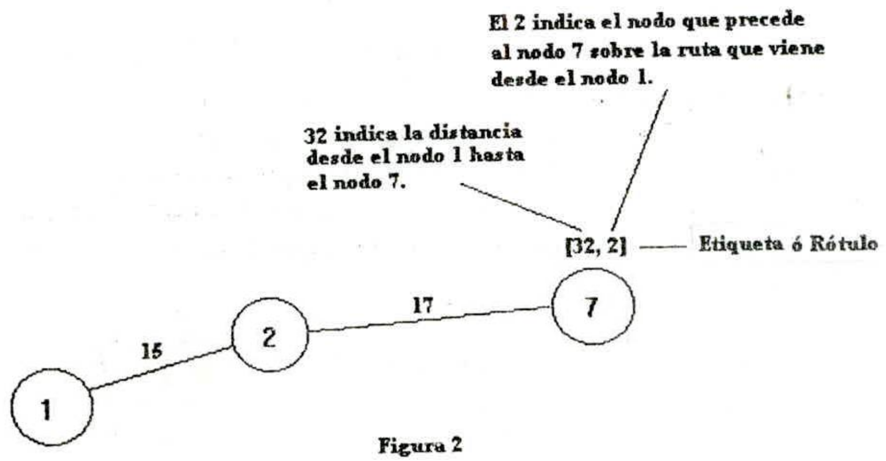
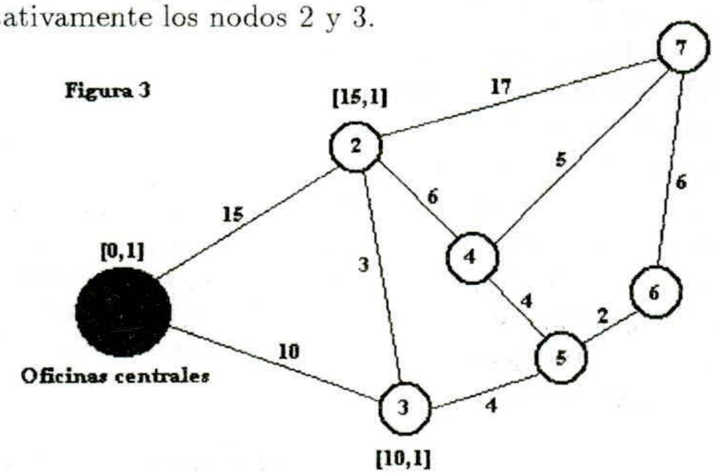


Figura 2

El lector habrá notado, en la figura 1, que los arcos no representan proporcionalmente las distancias que se indican. Así, por ejemplo, las distancias desde el nodo 1 hasta los nodos 2 y 3 son diferentes, pero, en el gráfico los arcos parecen tener la misma longitud. Esto ocurrirá con frecuencia debido a la dificultad que significa realizar representaciones proporcionales en un gráfico. En cualquier etapa del desarrollo del algoritmo un nodo puede estar, o no, rotulado (etiquetado). Con frecuencia, también, nos veremos en la necesidad de rotular un nodo tentativamente. Sin embargo cuando el algoritmo ha permitido establecer definitivamente la ruta más corta, el rótulo será permanente.

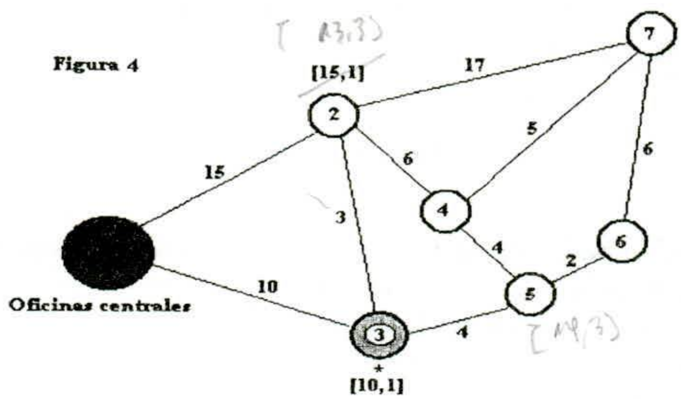
Del algoritmo. El algoritmo se inicia rotulando el nodo 1 con la etiqueta $[0, 1]$. Esto significa que la distancia entre el nodo 1, y él mismo, es cero. Para diferenciar los nodos con rótulos tentativos y permanentes, sombrearemos sólamente los rótulos permanentes. Por otra parte, para identificar el nodo desde el cual se iniciará el paso siguiente, colocaremos un asterisco en alguna parte visible cerca del nodo. La figura (3) muestra el estado del algoritmo después de haber rotulado tentativamente los nodos 2 y 3.

Figura 3



El rótulo [15,1] colocado en el nodo 2 significa que la distancia desde el nodo 1 al nodo 2 es de 15 kilómetros y el nodo que precede al nodo 2 es el nodo 1. Y el rótulo [10,1] colocado en el nodo 3 significa que la distancia desde el nodo 1 al nodo 3 es de 10 kilómetros y el nodo que precede al nodo 2 es el nodo 1. Entre los nodos con rótulos tentativos debemos elegir aquel que indica la menor distancia.

Figura 4

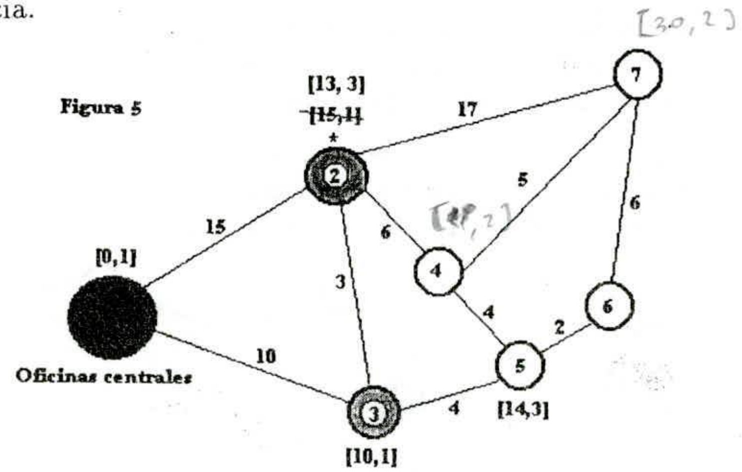


13—5—6—7

Obviamente no existe otra ruta más corta que la que lleva al nodo 3. Cualquier otra ruta que se elija para llegar al nodo 3 será mucho más larga que la que hemos elegido. De tal modo que la etiqueta que era temporal en el nodo 3, ahora, será permanente. Por lo tanto sombrearemos el nodo 3 y le colocaremos un asterisco para indicar que utilizaremos el nodo 3 para iniciar el siguiente paso en la iteración. Ver figura (4).

A continuación observemos que los nodos que pueden alcanzarse desde el nodo 3, son los nodos 2 y 5. La etiqueta tentativa del nodo 5 es $[14, 3]$ e indica que la distancia desde el nodo 1 al nodo 5 es de 14 kilómetros y el nodo que precede al nodo 5 es el nodo 3. Al evaluar la distancia desde éstos al nodo 3 se ve que la distancia más corta entre el nodo 3 y los nodos 2 y 5 es la que va desde el nodo 3 al nodo 2. En efecto, para ir al nodo 2 debemos recorrer 13 kilómetros, en cambio para ir al nodo 5 necesitamos recorrer 14 kilómetros. En consecuencia debemos modificar la etiqueta **tentativa** del nodo 2 y asignar la etiqueta permanente $[13, 3]$ para indicar que se ha encontrado una nueva ruta que va desde el 1 al nodo 2 que tiene una distancia de 13 kilómetros y que el nodo que precede al nodo 2, en la ruta, es el nodo 3. La figura (5) muestra los cambios en la red. Observe que hemos sombreado el nodo 2 para indicar que la etiqueta es permanente. Colocamos un asterisco en el nodo 2 para indicar que desde este nodo se iniciará la siguiente acción. Conviene tener en cuenta que el nodo 5 tiene una etiqueta tentativa que aún tiene vigencia.

Figura 5



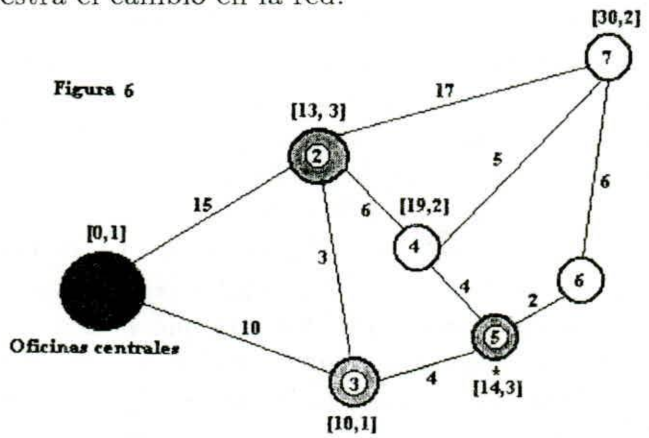
¿ Cuáles son los nodos a los que se puede acceder desde el nodo 2 ? La red de la figura 5 indica que desde 2 el nodo se puede llegar a los nodos 7 y 4, por lo tanto colocamos etiquetas tentativas a dichos nodos. Veamos la figura (6)

a) La etiqueta $[30, 2]$ en el nodo 7 está indicando que la distancia desde el nodo 1 hasta el nodo 7 es de 30 kilómetros y el nodo que precede al nodo 7 es el nodo 2.

b) La etiqueta $[19, 2]$ en el nodo 4 está indicando que la distancia desde el nodo 1 hasta el nodo 4 es de 19 kilómetros y el nodo que precede al nodo 4 es el nodo 2.

De entre todos los nodos (nodos 4, 5 y 7) con rótulos tentativos, se elije aquel que exprese la menor distancia desde el nodo 1 a dicho nodo. Se ve claramente que el nodo que satisface esta condición es el nodo 5 con la etiqueta [14, 3]. Por esta razón se elige al nodo 5 para etiquetarlo permanentemente y se coloca un asterisco en dicho nodo para indicar que desde este nodo se iniciará la próxima búsqueda. La figura (6) muestra el cambio en la red.

Figura 6

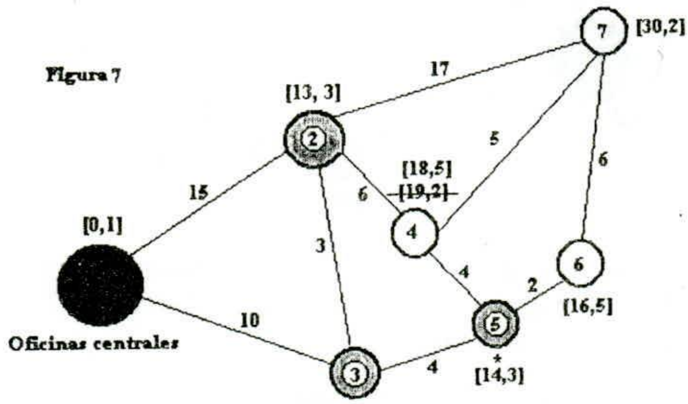


Se consideran ahora todos los nodos que no tienen etiqueta permanente, a los cuales se puede llegar desde el nodo 5; estos son los nodos 4 y 6.

a) Tomando al nodo 5 como referente, la etiqueta del nodo 4 es ahora [18, 5]. Esta etiqueta indica que la distancia desde el nodo 1 al nodo 4 es de 18 kilómetros y el nodo que precede al nodo 4 es el nodo 5.

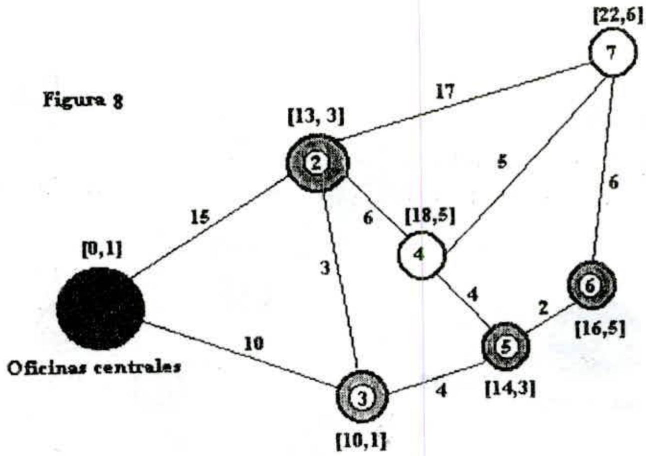
b) Tomando como referente el nodo 5, la etiqueta del nodo 6 será [16, 5] e indica que la distancia desde el nodo 1 al nodo 6 es de 16 kilómetros y el nodo que precede al nodo 6 es el nodo 5. La figura (7) muestra la nueva red.

Figura 7



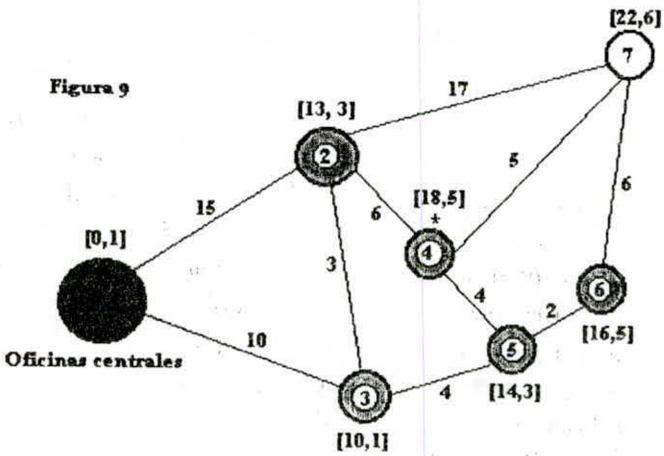
Consideramos, ahora, la menor distancia en el resto de los nodos con etiquetas tentativas. Se observa que al nodo 6 debemos asignarle una etiqueta permanente puesto que dicha etiqueta muestra la menor distancia. A partir del nodo 6 se le asigna la etiqueta tentativa [22, 6] al nodo 7 puesto que la distancia desde el nodo 1 al nodo 7 es de 22 kilómetros y el nodo que precede al nodo 7 es el 6. La apariencia de la nueva red es la de la figura (8).

Figura 8



Como el lector puede ver, restan sólamente dos nodos sin una marca permanente. Puesto que la distancia que indica la etiqueta del nodo 4 es menor que la distancia que indica la etiqueta del nodo 7, la etiqueta de este último nodo se convierte en permanente. Se coloca un asterisco en el nodo 4 para indicar que la próxima iteración se iniciará en dicho nodo. La figura (9) muestra este cambio.

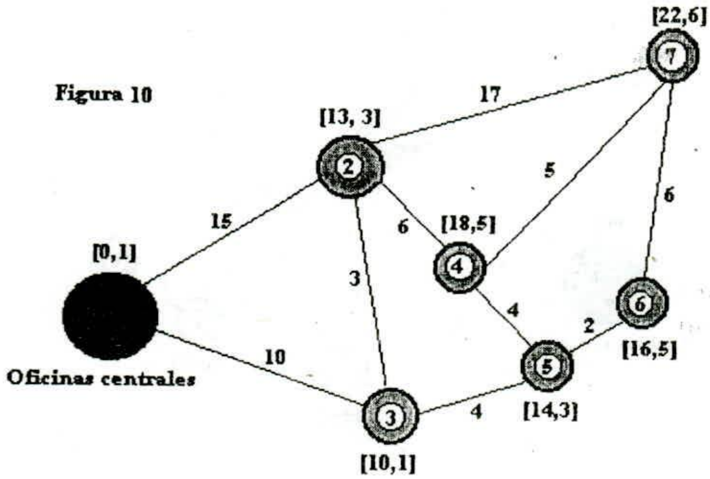
Figura 9



Finalmente como el nodo 7 es el único nodo con rótulo tentativo al cual se puede llegar desde el nodo 4, comparamos la distancia del nodo 7 con la distancia del nodo 4 más la distancia desde el nodo 4 al nodo 7. La distancia del nodo 7 es de 22 kilómetros en cambio la distancia que se requeriría para pasar al nodo 7 desde él nodo 4 es de 18+5=23 kilómetros. En consecuencia la etiqueta permanente del nodo 7 será [22, 6], que es la que tenía desde antes. La figura (10) muestra la red de la compañía **Concretos S.A**

Cuando se han etiquetados en forma permanente todos los nodos, significa que se ha determinado la ruta más corta a cada uno de los nodos de la red.

Figura 10



Por ejemplo la etiqueta permanente [22, 6] del nodo 7, indica que la distancia más corta desde nodo 1 al nodo 7 es de 22 kilómetros. Para determinar la ruta que permite llegar a dicho nodo recorriendo los 22 kilómetros se observa que el nodo precedente al nodo 7 es el nodo 6. Volviendo hacia atrás sobre la red para llegar al nodo 6 se observa que su etiqueta indica que se llegó a dicho nodo a través del nodo 5. Continuando este proceso se ve que se llegó al nodo 5 partiendo desde el nodo 3. Volviendo más atrás aún la etiqueta del nodo 3 muestra que se llegó a él desde el nodo 1. Por lo tanto la ruta más corta desde el nodo 1 al nodo 7 es pasando por los nodos 1−3−5−6−7. La tabla (1) muestra las rutas más cortas para la red de la compañía **Concretos S.A**.

Desde el nodo 1	Ruta	Distancia en Km
hasta el nodo 2	1 −3 −2	13
hasta el nodo 3	1 −3	10
hasta el nodo 4	1 −3 −5−4	18
hasta el nodo 5	1 −3 −5	14
hasta el nodo 6	1 −3 −5−6	16
hasta el nodo 7	1 −3 −5−6−7	22

[Tabla 1]

5.7 Resumen de los pasos del algoritmo

1. Se le asigna al nodo 1 la etiqueta permanente $[0, 1]$ que indica que 1 es el nodo inicial, y el 0 que indica que la distancia desde el nodo 1 a él mismo es 0.

2. Se determinan rótulos tentativos para los nodos a los que puede llegarse en forma directa desde el nodo 1. El primer número de cada etiqueta es la distancia directa entre el nodo 1 el nodo en cuestión. El segundo número de cada rótulo (valor del nodo precedente) indica el nodo que le antecede en la ruta desde el nodo 1. En este primer paso todos estos números son unos.

3. Se identifica el nodo con la etiqueta tentativa que muestre la menor distancia y se considera a ésta como etiqueta permanente. Si todos los nodos tienen etiquetas permanentes se puede encontrar la ruta más corta hasta un determinado nodo yendo hacia sus nodos precedentes.

Comentario. Con frecuencia el algoritmo de la ruta más corta se usa para resolver problemas de minimización de tiempos y costos en vez de distancias. Observe que este algoritmo no tiene sentido aplicarlo en problemas en los cuales primen criterios de utilidad.

5.8 El problema del arbol expandido mínimo. La red de comunicaciones.

En la terminología de redes el problema del arbol expandido mínimo consiste en utilizar los arcos de la red para llegar a todos los nodos de manera que la longitud total de sus ramas sea mínima. A continuación analizaremos el problema de la compañía **Inca de Oro Bell** que debe diseñar una red de comunicaciones en la Tercera Región.

Inca de Oro Bell debe instalar lineas especiales para una red de cómputo con el fin de conectar a 5 usuarios satélites con un **servidor central.** Con el propósito de minimizar los costos de instalación, la gerencia desea que la longitud total de las lineas que unen el servidor con los usuarios sea lo más pequeña posible. Si se conectara directamente al servidor central con cada uno de los usuarios el costo de la instalación sería máximo. Sin embargo se podría instalar una linea directa a algunos de los usuarios y colgar a otros de los usuarios ya conectados. la figura (11) muestra la disposición del servidor central y los cinco usuarios.

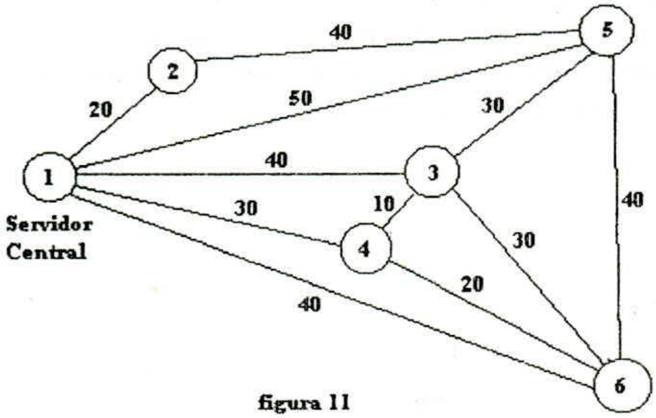


figura 11

La red muestra las alternativas de conexión posibles entre los nodos y las posibles distancias. En lo que sigue desarrollaremos el algoritmo que nos permitirá llegar a todos los nodos de la red de manera que la longitud total de las ramas sea mínima.

Observemos que el nodo que se encuentra más cerca del nodo 1 es el nodo 2, con una distancia de 20 metros. Para diferenciar los enlaces que nos interesen utilizaremos una linea más gruesa que la linea habitual. Nos interesa, ahora, indicar la conexión entre el nodo 1 y el nodo 2.

La figura (12) muestra la red con una linea gruesa uniendo dichos nodos.

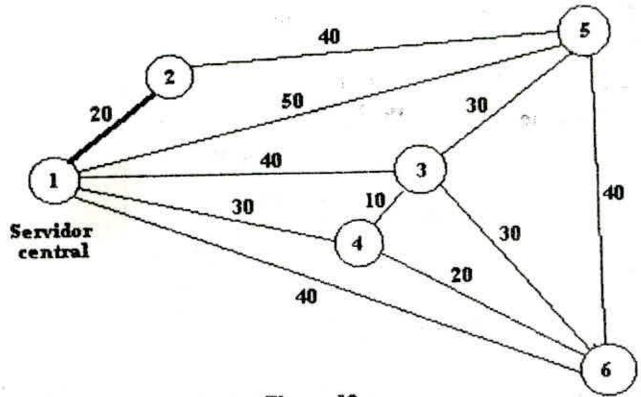


Figura 12

El siguiente paso del algoritmo consiste en precisar el **nodo inconexo** que esté más cerca de alguno de los nodos conexos. Observe que el nodo 4 es el que está más cerca del nodo 1; más precisamente a 30 metros del nodo 1. De acuerdo a la convención que hemos adoptado, la figura (13) muestra la red con una linea gruesa uniendo los nodos 1 y 4.

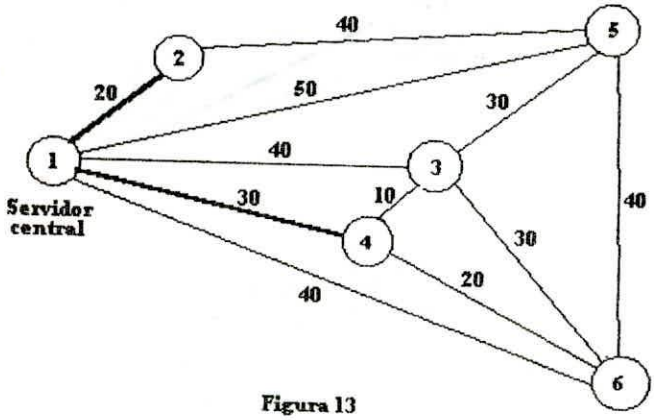


Figura 13

Repitiendo el proceso de agregar siempre el nodo no conectado que esté más próximo al conjunto de los nodos conexos de la red, se obtiene la figura (14). Observe que hemos unido el nodo 3 con el nodo 4 mediante una linea gruesa.

Siguiendo el algoritmo se conectan los nodos 6 y 4, y los nodos 5 y 3.

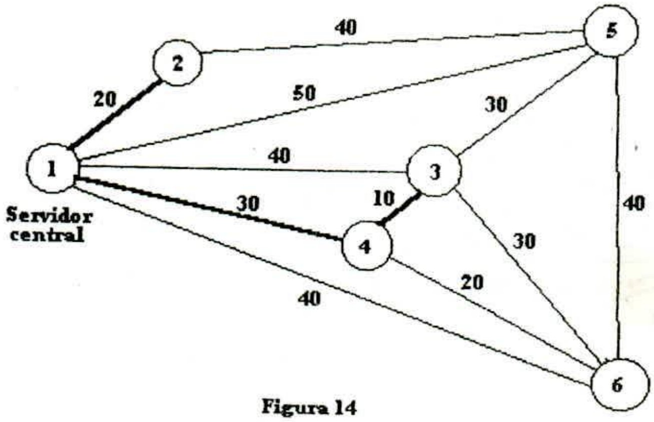


Figura 14

Finalmente se obtiene la red de la figura (15). La menor longitud del arbol está dada por la suma de las distancias de los arcos con linea gruesa. Observe que la distancia total mínima es de 110 metros. Una tabla final con los resultados es la siguiente:

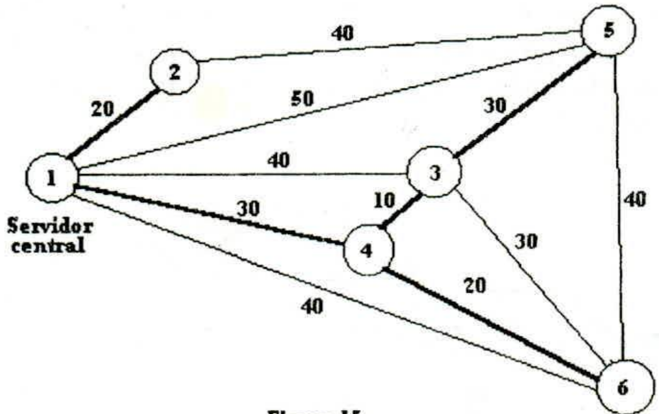


Figura 15

Nodo inicial	Nodo final	Distancia
1	2	20
1	4	30
4	3	10
4	6	20
3	5	30

5.9 El problema del flujo máximo

En este problema hay un solo nodo fuente (nodo de entrada) y un solo destino (nodo de salida). El problema consiste en determinar la cantidad de flujo total (petroleo, vehículos, mensajes, tránsito, etc) que puede circular a través de la red en una unidad de tiempo. Se intenta transmitir flujo sobre todos los arcos de la red en la forma más eficiente posible. Por otra parte la cantidad de flujo está limitada por ciertas restricciones de capacidad. Así, por ejemplo, los tipos de carreteras limitan el flujo de vehículos en un sistema de transporte; el diámetro de las tuberías de un oleoducto limitan el flujo de petroleo en un sistema de distribución, etc. A la cantidad máxima sobre el flujo de un arco se le denomina capacidad

de flujo del arco. Así, por ejemplo, en la figura (16), la capacidad de flujo del arco (5,7) en la dirección $5 \to 7$, es de 8 000 vehículos por hora; la capacidad del arco (3,4) es de 3 000 vehículos por hora en la dirección $3 \to 4$.

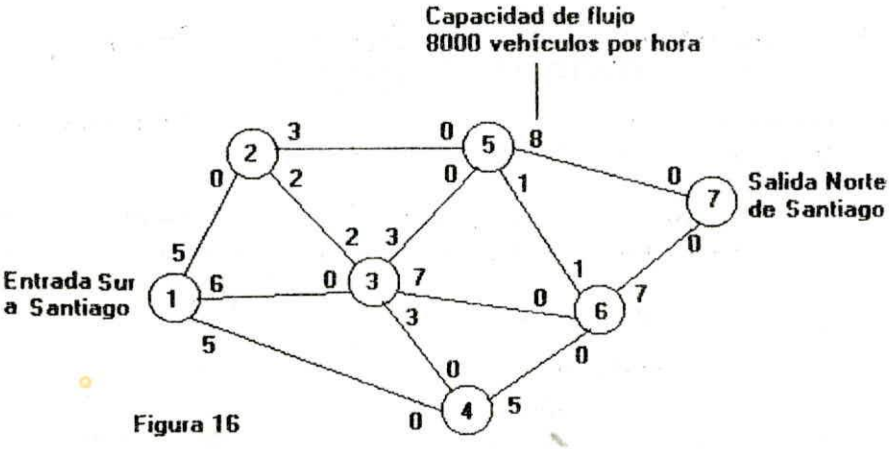


Figura 16

5.10 El Problema del flujo máximo de vehículos en la ruta 5: año 2050

El Departamento de Ingeniería de tránsito de la municipalidad de Santiago está desarrollando un plan de vías, calles y carreteras alternativas, para el año 2050, fecha en la cual se estima que en ciertas épocas del año, el flujo de vehículos que vienen del sur y pasan por Santiago hacia el norte llegará al nivel de 15 000 vehículos por hora. El plan contiene programas de mantenimiento de calles que exigirá el eventual cierre de algunas vías, disminución de velocidad de los vehículos al entrar a la ciudad, etc. En la red de la figura (16) se describe una posible distribución de las calles y carreteras con sus respectivos flujos de vehículos. Debido a la diferencia de velocidad de circulación y a los patrones de tráfico distintos para cada calle y carretera, se supone que las capacidades de flujo variarán entre una calle y otra y entre las carreteras.

Observe que **la capacidad de flujo en un arco se define en base a la dirección del flujo**. Entenderemos que la sección de carretera entre los nodos 1 y 2 muestra una capacidad de flujo de 5 000 vehículos por hora en el sentido de $1 \rightarrow 2$ y que existe una capacidad de 0 vehículos en el sentido $2 \rightarrow 1$. Esto significa que los ingenieros de tránsito, que planificaron la red, no desean que fluyan vehículos del nodo 2 hacia el nodo 1. En realidad sería ilógico permitir flujo de vehículos hacia el nodo de entrada. Podemos entender lo mismo suponiendo que la calle o carretera en cuestión tiene tráfico en una única dirección. Esto nos sugiere que **las capacidades de flujos de las ramas (arcos) dependen de la dirección del flujo**.

Podemos preguntarnos ahora, ¿ la red del sistema propuesto sería capaz de dar cabida a un flujo máximo, Norte Sur, de 15 000 vehículos por hora ?, ¿ **Cuál sería el flujo máximo de vehículos que permitiría la red cada hora** ?, ¿ qué tanto flujo se debe canalizar sobre cada rama ?

5.11 Un algoritmo de flujo máximo.

A continuación se presenta un algoritmo de flujo máximo en cuyo desarrollo se utiliza sólamente el sentido común.

1. Se busca cualquier camino del nodo de entrada al nodo de salida que tenga capacidades de flujo mayores que cero para todas las ramas del camino.

2. Se incrementa, en la medida de lo posible, el flujo sobre ese camino.

3. Se siguen buscando caminos que vayan de fuentes a depósitos que tengan capacidades mayores que cero para todas las ramas, en el sentido del flujo, y se aumenta el flujo sobre esos caminos tanto como sea posible.

4. Detenerse cuando ya no sea posible encontrar un camino desde una fuente hasta un depósito que tenga capacidades de flujo superiores a cero en el sentido del flujo para todas las ramas del camino.

Comentario. Antes de presentar los detalles del algoritmo, analizaremos brevemente un procedimiento que asegura que las etapas anteriores dan como resultado una solución óptima para el problema de hallar el flujo máximo desde un nodo de entrada a un nodo de salida. El procedimiento permite que **un flujo previamente asignado tome una ruta alternativa, permitiendo flujos ficticios en el sentido inverso**. Por ejemplo, consideremos la rama (3,6)

$$3 \;\overset{7 \qquad\qquad 0}{\overline{\qquad\qquad\quad}}\; 6$$

Aquí se observa que la capacidad inicial de flujo en el sentido 3 → 6 es de 7 000 vehículos por hora, y que no se permite flujo en el sentido 6 → 3. Si se decide permitir que fluyan, por ejemplo, 6 000 vehículos por hora en el sentido 6 → 3, se modificaría la capacidad de flujo de la siguiente manera:

$$3 \; \overset{1 \qquad\qquad 6}{\overline{\qquad\qquad\qquad}} \; 6$$

Observemos que se ha disminuido la capacidad de flujo en el sentido 3 → 6 en 6 000 vehículos por hora, y que se ha aumentado simultaneamente la capacidad de flujo en el sentido 6 → 3 en la misma cantidad. La capacidad de flujo modificada en 1 000 vehículos por hora en el sentido 3 → 6 se interpreta como la capacidad restante de flujo en esa rama.

Sin embargo, obsérvese que en el sentido 6 → 3 que tenía una capacidad inicial de flujo cero muestra, ahora, una capacidad modificada de flujo de 6 000 vehículos por hora. En realidad esta capacidad modificada en el sentido 6 → 3 muestra que se permite un flujo ficticio de hasta 6 000 vehículos por hora en dicho sentido. Tal flujo no haría que se enviaran vehículos en el sentido 6 → 3, sino que simplemente disminuiría la magnitud del flujo que se comprometió originalmente en el sentido 3 → 6 de la rama. El flujo ficticio en el sentido 6 → 3 daría como resultado la desviación del flujo que originalmente se había comprometido en el sentido 3 → 6, hacia otras ramas de la red.

Este proceso, el de rastrear las capacidades de flujo, es una parte importante del algoritmo de flujo máximo. Por ejemplo, supongamos que en algún paso anterior se hubiera podido comprometer flujo sobre cierta rama. Posteriormente, y debido a flujos identificados en otras ramas, pudiera ser deseable disminuir el flujo sobre la rama original. El procedimiento que acabamos de describir permite identificar la medida en la que la decisión original, de comprometer determinado flujo, debe modificarse para aumentar el flujo total que pasa por la red.

5.12 Los pasos del algoritmo en el problema de flujo máximo de la ruta 5

A continuación, de acuerdo a los análisis hechos en los párrafos anteriores, describimos los pasos que deben seguirse para hallar la solución óptima al problema de flujo máximo.

1. Se ubica cualquier camino que vaya del nodo origen al nodo de destino que tenga capacidades de flujo, en el sentido del flujo, mayores que cero para todas las ramas de dicho camino. Si no hubiera caminos disponibles significa que ya se ha llegado a la solución óptima. Por ejemplo, dos caminos posibles

que satisfacen esta condición son los que van por los nodos $1-3-6-7$ y $1-2-5-7$. La figura (17) muestra estos caminos con linea gruesa.

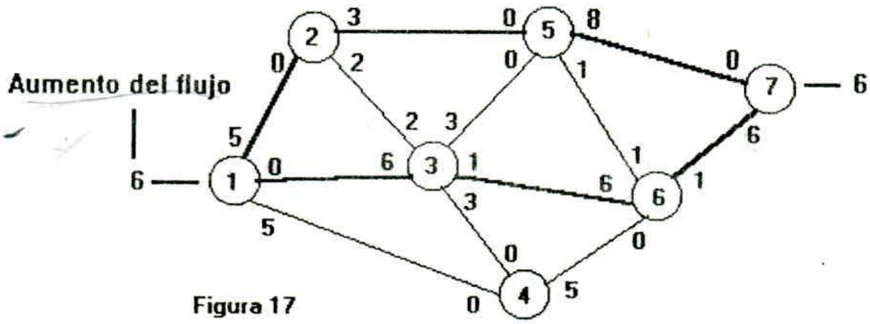


Figura 17

2. Se ubica la rama que tenga la **capacidad mínima de flujo**, (c_m), en el camino elegido en el paso 1, y se aumenta el flujo sobre la red en la cantidad c_m sobre dicho camino. Por ejemplo, si elegimos la rama del camino $1-3-6-7$, la cantidad mínima de flujo es de 6, (esto es de 6 000 vehículos) en consecuencia se coloca en el nodo de origen dicha cantidad. La figura (17) muestra el aumento, en la red, de 6 000 vehículos.

3. Por el camino elegido, reducir en c_m todas las capacidades de flujo de las ramas en el sentido del flujo, y aumentar las capacidades de flujo de las ramas en el sentido contrario en la misma cantidad c_m. Por ejemplo, si elegimos el camino $1-3-6-7$, la menor capacidad de flujo $c_m = 6$, por lo tanto se reduce la capacidad de flujo en la dirección del flujo en 6 y se aumenta el flujo, en sentido contrario, en las mismas ramas, también en 6. Esta es la primera iteración. La figura (18) muestra estos cambios en la red.

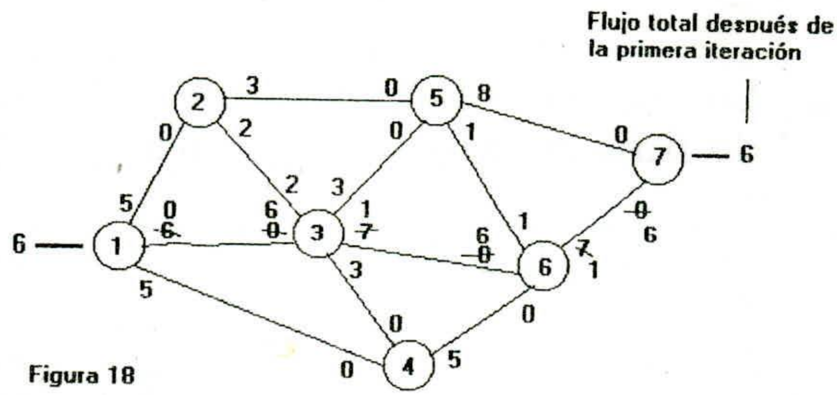


Figura 18

Puesto que en cada problema de flujo máximo podría existir más de un camino cada vez, el procedimento irá dando redes distintas según sean los caminos elegidos. Sin embargo, el algoritmo proporciona en algún momento la solución de flujo máximo.

4. Buscamos otro camino que vaya del nodo origen al nodo destino que tenga capacidades de flujo mayores que cero para todas las ramas del camino. Uno de ellos es el que va por los nodos $1 - 2 - 5 - 7$, cuya $c_m = 3$, por lo tanto aumentamos en 3 el flujo sobre la red. El flujo total después de la segunda iteración es de 6+3=9.

   Reduciendo todas las capacidades del flujo, en el sentido del flujo, en c_m, y aumentando las capacidades del flujo de las ramas en sentido contrario, se obtiene la red modificada de la figura (19).

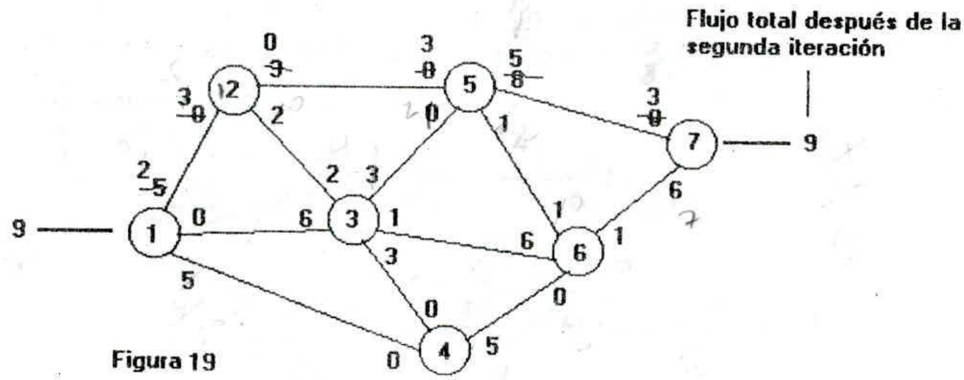


Figura 19

5. En los pasos siguientes no mostraremos la red modificada después de cada iteración. Se deja al lector que actualice las capacidades de flujo a medida que se vaya realizando el análisis. Así, por ejemplo, construya la red si el camino seleccionado es $1 - 2 - 3 - 5 - 7$ con $c_m = 2$. Esta nueva red correspondería a la tercera iteración.

6. Efectúe la cuarta iteración si el camino seleccionado es $1 - 4 - 6 - 7$ con $c_m = 1$.

7. Efectúe la quinta iteración si el camino seleccionado es $1 - 4 - 6 - 5 - 7$ con $c_m = 1$.

En este punto se tiene un flujo total de 13 000 vehículos por hora y las capacidades modificadas en la red se muestran en la figura (20)

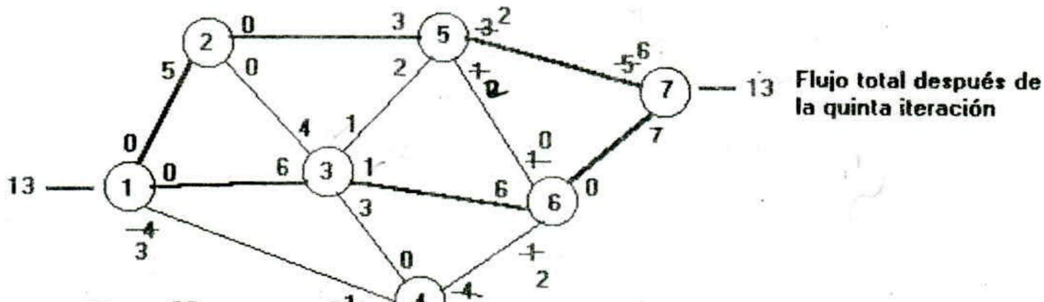


Figura 20

Nos preguntaremos ahora si existen otros caminos que vayan desde el nodo 1 al nodo 7 y que tengan capacidades de flujo, en el sentido del flujo, mayores que cero. Observando la red de la figura 20 se ve que aún queda la ruta $1-4-6-3-5-7$, con un $c_m = 1$ determinado por (3,5) en la dirección de $3 \rightarrow 5$, que aumenta el flujo a 14 000 vehículos por hora. La figura (21) muestra la red modificada después de la sexta iteración

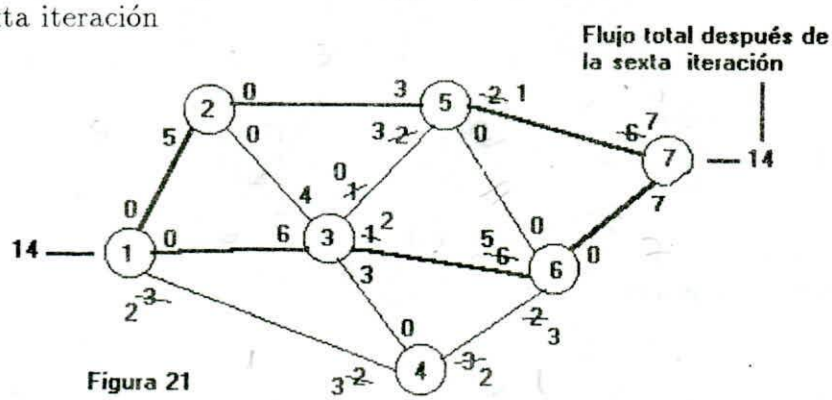


Figura 21

Observando la figura (21) se puede ver que ya no hay más caminos desde el nodo 1 hasta el nodo 7 que tengan capacidades de flujo mayores que cero en todas las ramas del camino. Por esta razón el flujo máximo para esta red es de 14 000 vehículos por hora.

5.12 Determinación de los flujos finales en el problema de la ruta 5

Determinaremos ahora la cantidad y el sentido del flujo en cada rama de manera que se puedan lograr los 14 000 vehículos de flujo total por hora. El flujo final de cada arco se determina comparando la capacidad final del arco con la capacidad inicial. Para cada arco la regla es la siguiente:

Si la capacidad final del arco es menor que la capacidad inicial, calcúlese la diferencia. Esta diferencia es la cantidad de flujo a través del arco

Para aplicar la regla tengamos a mano la red inicial, figura (22)

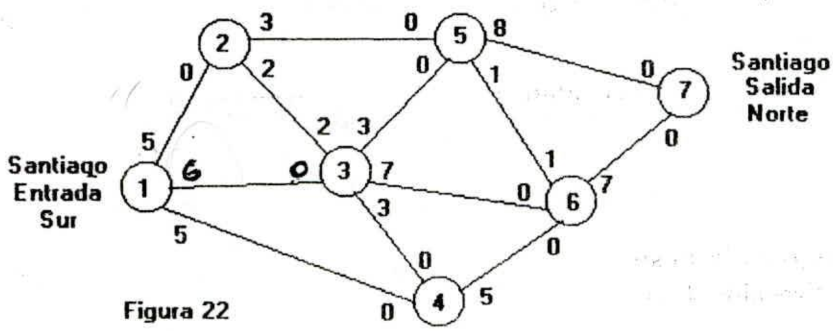


Figura 22

y la red final actualizada del problema de flujo máximo, figura (23)

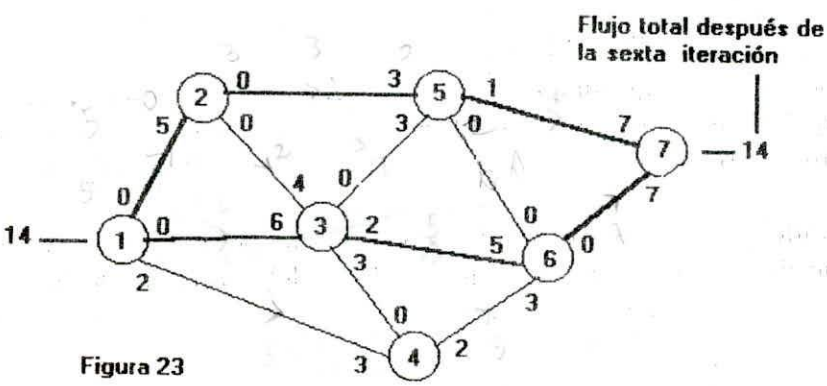


Figura 23

Aplicaremos la regla al arco (3,6). Consideremos la rama (3,6) con las capacidades de flujo final e inicial que se desprenden de las figuras (22) y (23) respectivamente:

$$\text{capacidad inicial}: \; 3 \;\frac{7 \qquad\quad 0}{\qquad\qquad}\; 6$$

$$\text{capacidad final}: \; 3 \;\frac{2 \qquad\quad 5}{\qquad\qquad}\; 6$$

Como la capacidad de flujo final, en la dirección $3 \rightarrow 6$, es menor que la capacidad inicial de flujo en la misma dirección, la diferencia $7 - 2 = 5$ es el flujo final de ese arco en la dirección $3 \rightarrow 6$.

Apliquemos nuevamente la regla a la rama (4,6). De acuerdo a las figuras (22) y (23) se tiene:

$$\text{capacidad inicial}: \quad 4 \ \overset{5 \qquad\qquad 0}{\overline{\hspace{3cm}}}\ 6$$

$$\text{capacidad final}: \quad 4 \ \overset{2 \qquad\qquad 3}{\overline{\hspace{3cm}}}\ 6$$

Como la capacidad de flujo final, en la dirección $4 \rightarrow 6$, es menor que la capacidad inicial de flujo en la misma dirección, la diferencia $5 - 2 = 3$ es el flujo final de ese arco en la dirección $4 \rightarrow 6$.

Apliquemos nuevamente la regla a la rama (3,5). De acuerdo a las figuras (22) y (23) se tiene:

$$\text{capacidad inicial}: \quad 3 \ \overset{3 \qquad\qquad 0}{\overline{\hspace{3cm}}}\ 5$$

$$\text{capacidad final}: \quad 3 \ \overset{0 \qquad\qquad 3}{\overline{\hspace{3cm}}}\ 5$$

Como la capacidad de flujo final en la dirección $3 \rightarrow 5$ es menor que la capacidad de flujo final en la misma dirección, la diferencia $3 - 0 = 3$ es el flujo final del arco (3,5) en la direccción $3 \rightarrow 5$.

Comparando las capacidades final e inicial de flujos para todas los arcos de la red, se puede determinar el patron final de flujo del problema de la carretera 5. La figura (24) muestra la red solución.

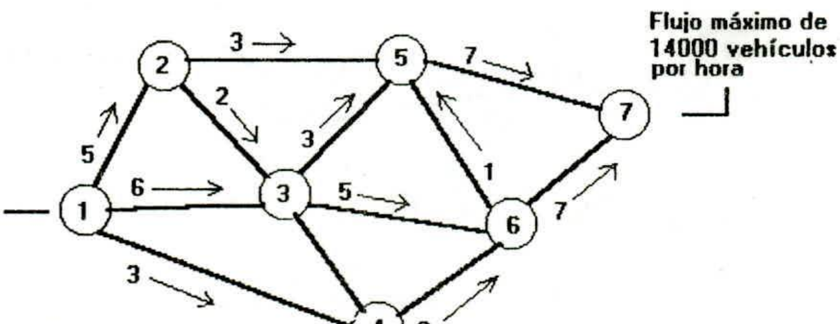


Figura 24

Los resultados del análisis del problema de flujo máximo muestra que la red de carretaras que se planea construir para el año 2 050 no puede manejar un flujo de 15 000 vehículos por hora. Los ingenieros de tránsito tendrán que ampliar la red de carretaras y calles o deberán prepararse para enfrentar serios problemas de embotellamientos. Si se modifica la red, insisitiendo en un flujo máximo de 15 000 vehículos por hora, deberá iniciarse otro análisis similar al que hemos desarrollado.

5.14 Ejercicios propuestos

1. Halle la ruta más corta desde el nodo 1 hasta cada uno de los nodos de la red de transporte de la figura (1)

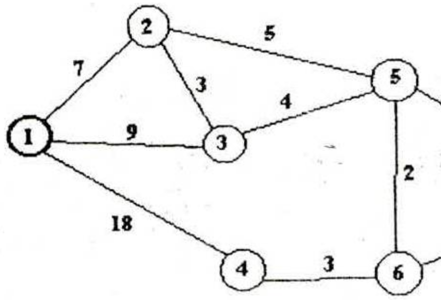


Figura 1

2. Considere el problema de la compañía **Concreto S.A** (página 179) y suponga que el nodo 7 es el centro de abastecimiento y almacenamiento de la compañía. Con frecuencia se realizan viajes diarios desde el nodo 7 hasta los demás nodos o sitios de construcción. Utilizando el nodo 7 como nodo inicial, obtenga la ruta más corta desde este nodo a cada uno de los demás nodos de la red. Ver figura (2)

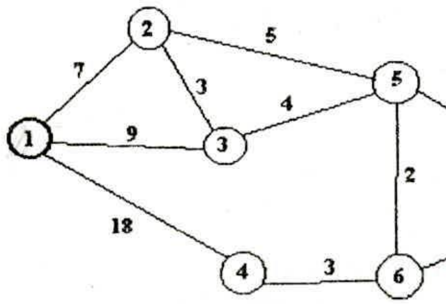


Figura 2

3. En el problema original de la compañía **Concretos S.A** se encontró la distancia más corta desde el nodo 1 hasta cada uno de los demás nodos. Como algunos de los caminos son carreteras y otros son calles de ciudades, las distancias para las rutas entre las oficinas centrales y los sitios de construcción

pueden no necesariamente recorrerse en los menores tiempos. En la figura (3) se muestra la red de caminos de la compañía **Concretos S.A** con los tiempos de viaje, en vez de las distancias, hasta cada uno de los lugares de construcción. Obtener la ruta más corta desde las oficianas centrales de **Concretos S.A** hasta cada uno de los lugares de construcción para minimizar el tiempo de viaje en vez de las distancias.

4. Considere la red de la figura (4) y determine la ruta más corta entre los nodos 1 y 8.

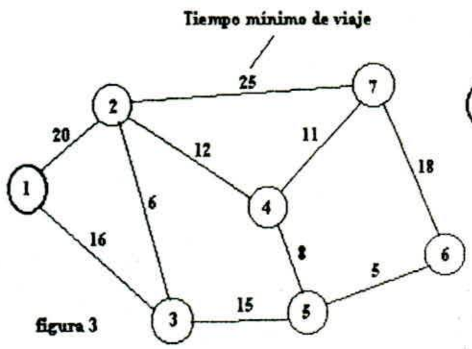


figura 3

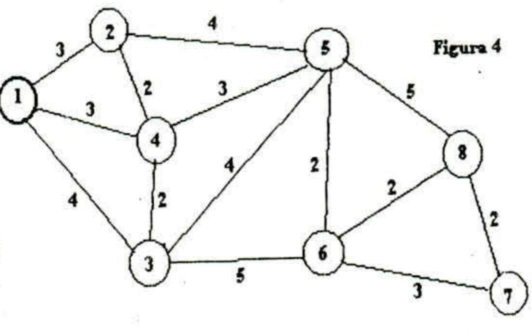


Figura 4

5. Halle la ruta más corta entre los nodos 1 y 10 en la red de la figura (5)

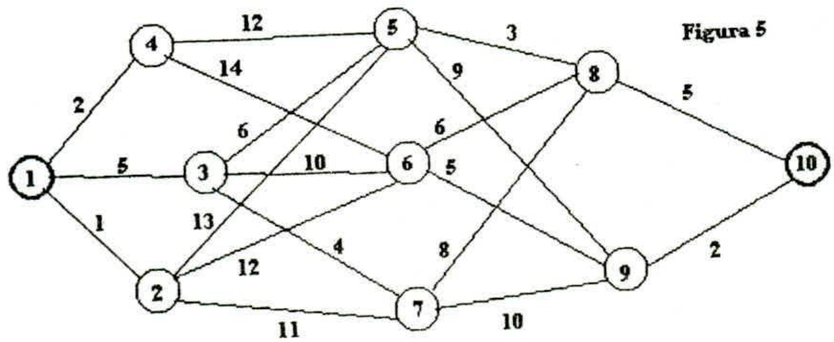


Figura 5

6. La compañía **Copiapó Mail** empezó a operar un servicio de entregas y recolecciones rápidas en 10 comunas y ciudades cercanas a Santiago. Cuando la compañía recibe una solicitud de servicio envía un vehículo desde sus oficinas centrales hasta una oficina subsidiaria en la comuna desde la cual se le solicita el servicio. La **Copiapó Mail** está interesada en que los servicios que presta sean rápidos y los costos de viaje sean mínimos, de tal modo que los vehículos deben operar por las rutas más cortas. Suponga que la

figura (6) (que no está trazada a escala), con distancias dadas en kilómetros, representa la red para el problema.

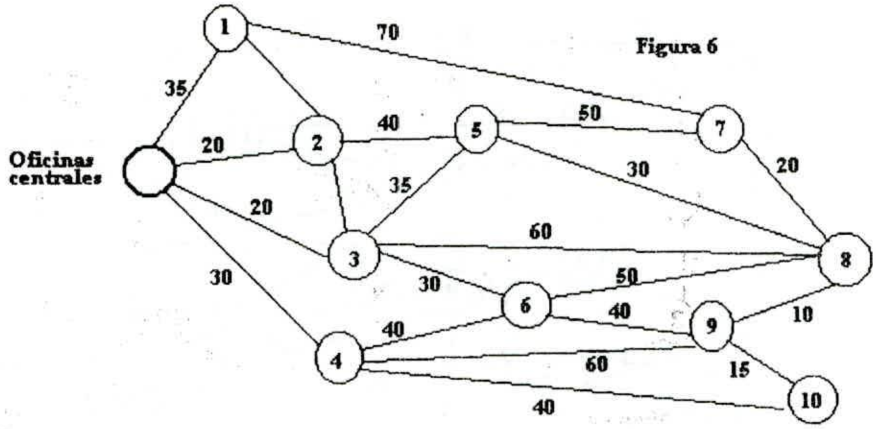


Figura 6

a) Obtenga las distancias para las rutas más cortas desde las oficinas centrales en Santiago hasta cada una de las comunas (o ciudades)
b) Cuál es la ruta más corta desde las oficinas centrales en Santiago a la ciudad correspondiente al nodo 7.

7. Cuando la compañía distribuidora de gasolina **Salfa S.A** era pequeña los choferes de sus camiones tenían libertad para elegir las rutas al realizar sus entregas. Sin embargo al progresar el negocio los costos de transporte y de entrega se han vuelto considerables. En un esfuerzo por mejorar la eficiencia de la operación de entregas, los administradores de **Salfa**, interesados en determinar las rutas de entregas más cortas, han construido la siguiente red de distribución. Ver figura (7)

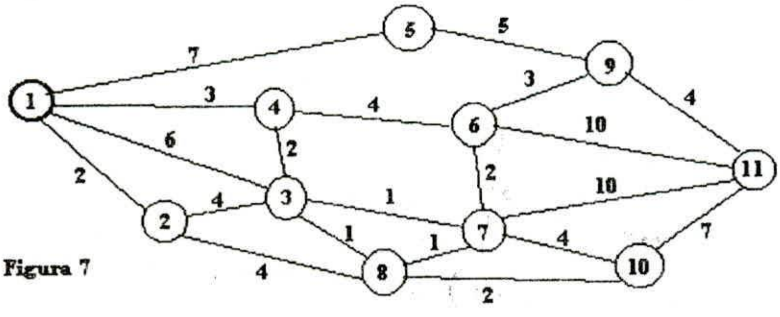


Figura 7

8. desarrolle la solución del arbol de extensión mínima para la siguiente red de comunicaciones de emergencia. Figura (8)

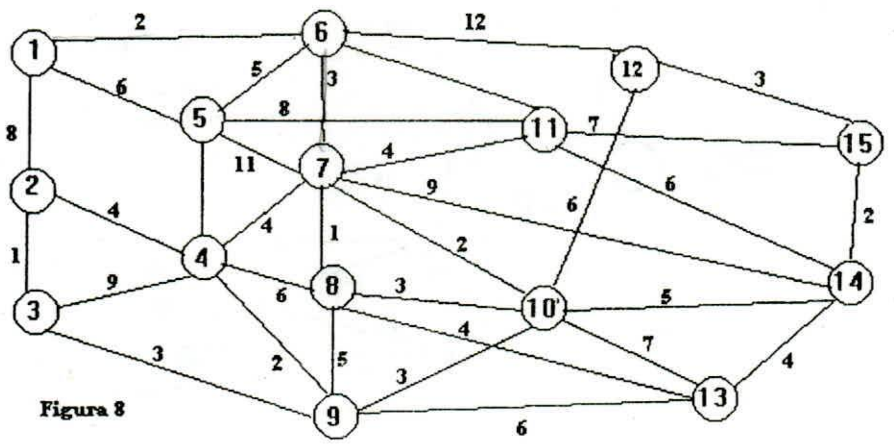


Figura 8

9. Recientemente, la Corporación Nacional Forestal, identificó las ubicaciones ideales para construir refugios en el parque Pan de Azucar en la Tercera Región. Dichos lugares están representados mediante los nodos de la red de la figura (9). Las ramas de la red representan las posibles alternativas de caminos en el parque. Si los diseñadores desean minimizar el total de kilómetros de caminos que se deben construir y al mismo tiempo ofrecer acceso a todas las instalaciones (nodos), ¿ qué caminos de alternativa deben construirse ?

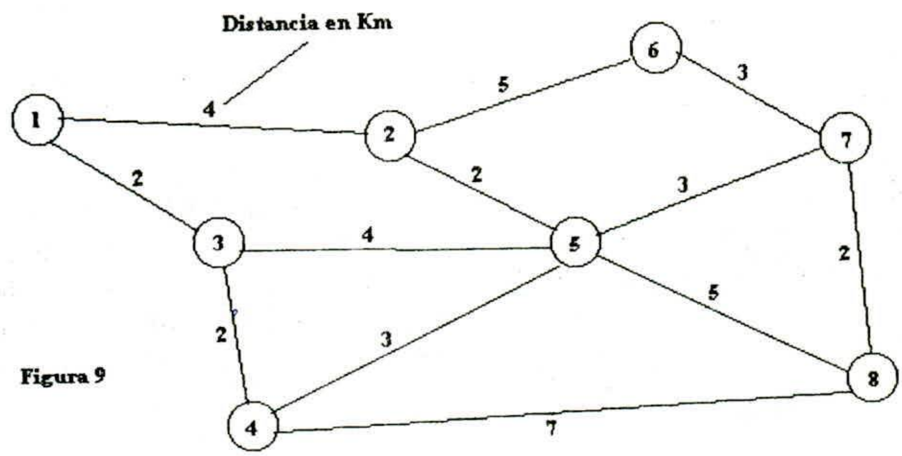


Figura 9

5.15 Problemas de flujo máximo

1. De acuerdo al desarrollo que se espera tendrá la Tercera Región cuando se abra al mercado de países del Pácifico, y de la creciente integración de las economías de América Latina, los ingenieros de tránsito de la Tercera Región están planificando una posible red de carreteras, para el año 2 050, que pasaría por Copiapó. Las capacidades de dicha red se muestran en la figura (1).

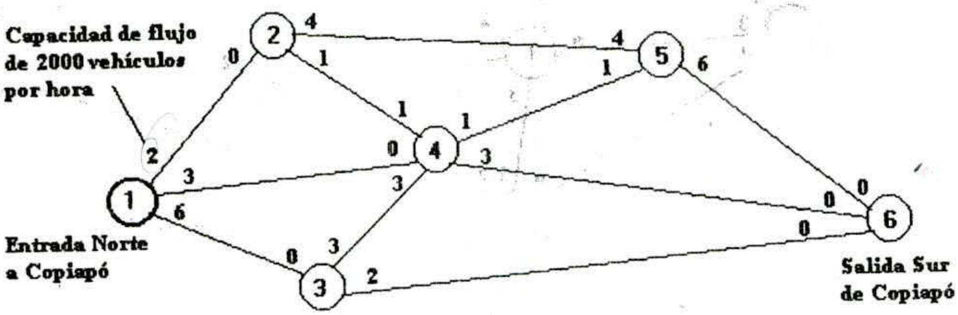


Figura 1

2. Si se modifican las capacidades del sistema de carreteras de la ciudad de Copiapó, tal como muestra la figura (2), ¿ cuál es el flujo máximo de vehículos que puede pasar por hora en dicho sistema ?

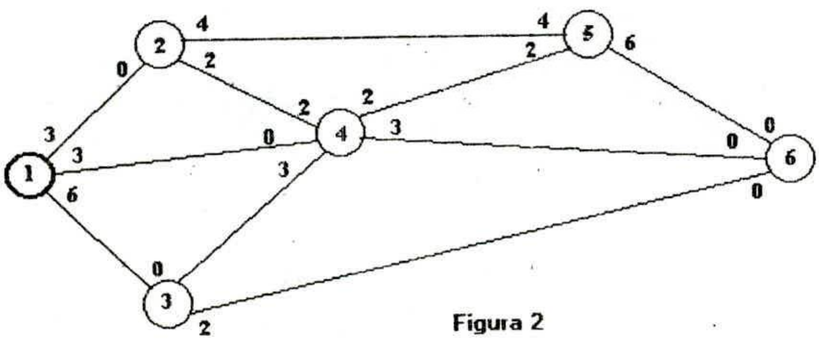


Figura 2

3. La compañía de telefonos **Inca de Oro Bell** tiene pensado utilizar una red de lineas subterraneas de comunicación para ofrecer servicios de audio de alta calidad entre Inca de oro y Coopiapó. El tráfico de llamadas se realizaría

mediante diversas lineas de cable y nodos de conexión en la red, tal como se muestra en la figura (3). En los arcos se indica el número de llamadas telefónicas, en miles, que pueden ocurrir simultaneamente en cualquier instante de tiempo. a) ¿ Cuál es el número de llamadas telefónicas que se pueden transmitir simultaneamente entre las dos ciudades ? b) Determinar los flujos sobre los arcos cuando el sistema opera a toda su capacidad ?

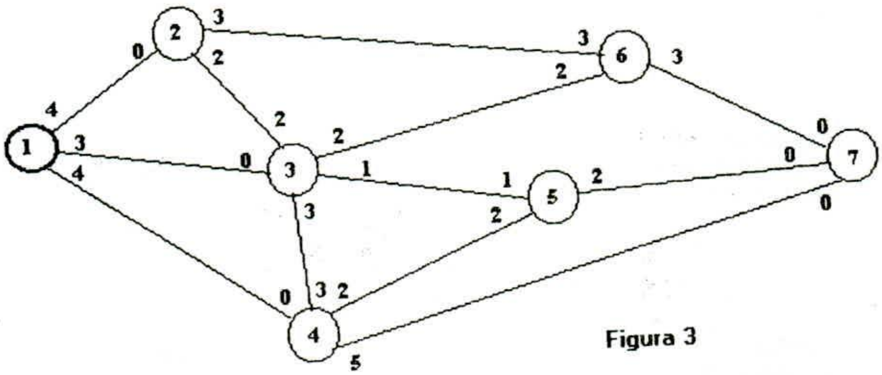


Figura 3

4. **Petroleos de Inca de Oro** es propietaria de un sistema de pozos de petroleo, en el Desierto de Atacama, que está construyendo una red de oleoductos desde su fuente de producción a diversos lugares de almacenamiento. Una porción de la red se muestra en la figura (4)

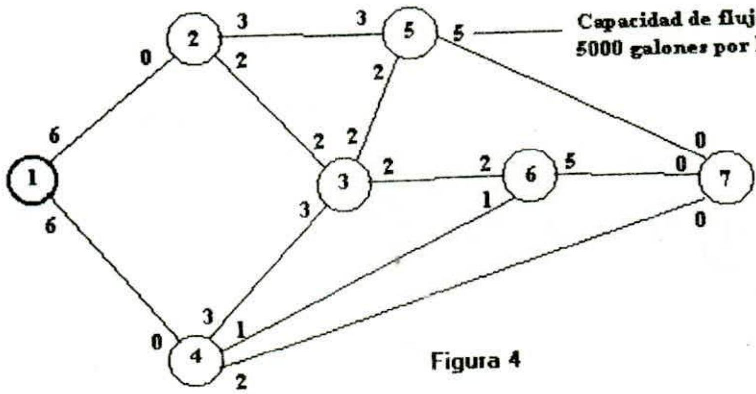


Figura 4

Debido a los diversos diámetros de los ductos, las capacidades de flujos son variables. Al abrir y cerrar selectivamente las diversas secciones de la red de oleoductos, la empresa puede abastecer cualesquiera de los almacenes. a) Si la empresa desea abastecer el almacen 7 y utilizar en forma completa la capacidad del sistema, ¿ cuánto se necesitará para satisfacer la demanda de 100 000 galones para el almacen 7 ?, ¿ cuál es el flujo máximo para este sistema de oleoductos ? b) Si se presenta una ruptura en la linea (2,3) y se cierra dicho arco, ¿ cuál es el flujo máximo para el sistema ?

5. Para el sistema de red de carreteras de la figura (5) determinar el flujo máximo de vehículos por hora que soporta el sistema.

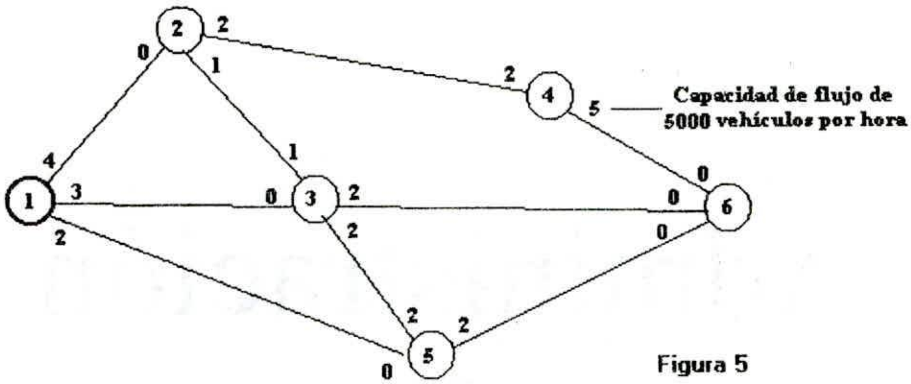


Figura 5

Los ingenieros que diseñaron el sistema están considerando la ampliación del arco (3,4) para permitir un flujo de 2 000 vehículos por hora. ¿ Quá recomendaría para la rama (3,4) de la red ?

6. Una planta procesadora de productos químicos tiene una red de ductos que utiliza para transportar productos químicos desde una parte, a otra, de la planta. La red de ductos y las capacidades de flujo se muestran en la figura (6). ¿ Cuál es la capacidad máxima de flujo para el sistema si la compañía desea transportar toda la cantidad posible de líquidos químicos desde el nodo 1 hasta el nodo 9 ?, ¿ qué cantidad de los productos químicos fluirán sobre el arco (3,5) ?

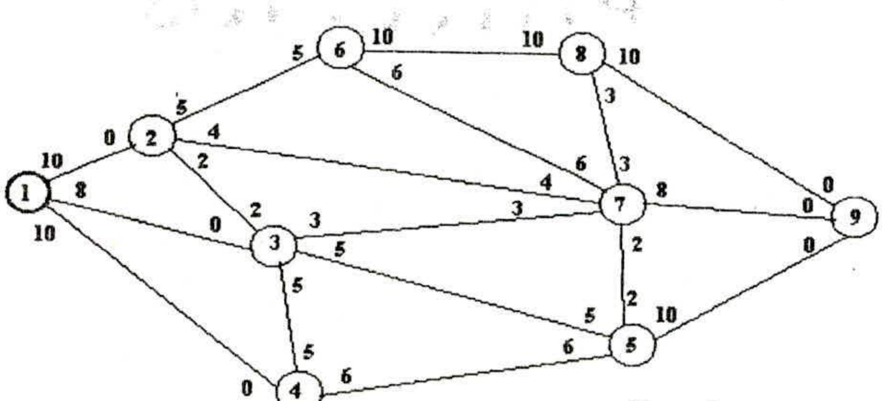


Figura 6

Administración de Proyectos

Administración de proyectos Pert/Cpm/Pert Cost

6.1 Introducción

El problema de administrar proyectos tal como lo conocemos actualmente surgió como respuesta al proyecto de armamentos **Polaris** del Ejercito de los Estados Unidos durante la guerra fría en la década de los años 60. El **Proyecto Polaris** estaba compuesto por una serie de subproyectos realizados por diversos fabricantes, de tal modo que se necesitaba una herramienta que permitiera programar y controlar este gran proyecto. El PERT, que es la sigla de Evaluación de Programación y Técnica de Revisión fue desarrollado por los científicos de la Oficina Naval de Proyectos Especiales del Ejercito Norteamericano. La técnica demostró ser tan efectiva que fue aceptada por todas las oficinas del gobierno y posteriormente por las empresas privadas. Poco tiempo después la compañía Dupont y la Remington Rand desarrollaron el método de Ruta Crítica, cuyas siglas en Inglés son **CPM**, Critical Paht Metod, para controlar el mantenimiento de proyectos de las plantas químicas de la DuPont.

Sabemos que los administradores tienen la responsabilidad de planificar, programar y controlar proyectos que constan de numerosos tareas separadas que son llevados a cabo, a veces, por oficinas de la misma empresa, y otras, por Departamentos de Empresas ajenas, otras personas etc. Con frecuencia los proyectos son tan grandes y complejos que es prácticamente imposible que se pueda tener en mente la información y los avances relativos a dicho proyecto. En estos casos es que las técnicas del Pert y Cpm demuestran ser extremadamente valiosas.

En proyectos de gran envergadura, los administradores deben coordinar las diversas tareas y actividades de las cuales consta el proyecto, con el propósito de terminar el proyecto completo en las fecha fijadas por la empresa. Uno de los factores que complica la realización de cada una de las tareas del proyecto es la interdependencia de las actividades, esto es, cuando el inicio de algunas actividades dependen de la terminación de otras. De lo antes dicho, los administradores deben preocuparse de responder a preguntas como las siguientes:

1. ¿ Cuál es el tiempo total que se requiere para terminar el proyecto ?
2. ¿ Cuáles son las fechas programadas de inicio y de término para cada una de las actividades del proyecto ?
3. ¿ Qué actividades son **críticas** y deben terminarse **exactamente** según lo programado para mantener el proyecto según lo establecido.
4. ¿ Cuánto se pueden demorar las actividades no críticas antes de que ocasionen demoras en el proyecto total ?

Hemos dicho que el Pert y Cpm se desarollaron en forma independiente. El primero con la tarea específica de planear, programar y controlar el proyecto de los misiles Polaris, para manejar las incertidumbres en los tiempos de terminación de las diversas actividades constitutivas del proyecto. En cambio el segundo surgió para desarrollar y controlar proyectos industriales en donde se consideraba que se conocían los tiempos de las tareas y se trataba de reducir los tiempos de dichas actividades. Actualmente las diferencias entre estas técnicas, prácticamente, han desaparecido. Los procedimientos modernos de planeación, de programación y de control de proyectos han combinado las características de ambos.

6.2 Las redes en Pert/Cpm

La primera fase del proceso de programación de un proyecto utilizando PERT/CPM consiste en determinar claramente las actividades específicas que conforman el proyecto. Así, por ejemplo, si quisieramos llevar adelante el proyecto de adquirir un negocio, necesitaríamos previamente definir una serie de actividades. En la tabla (1) se describen algunas de éstas.

Actividad	Descripción de la actividad	Antecedente inmediato
A	Elaborar lista de fuentes de financiamiento	–
B	Análisis Financiero del negocio	–
C	Plan futuro	B
D	Estudios de créditos	A, C

[tabla 1]

La actividad A consiste en elaborar una lista de las fuentes de financiamiento en la adquisición del negocio. La actividad B consiste en realizar un historial del estado actual financiero de dicho negocio. La actividad C consiste en elaborar un plan relacionado con las proyecciones de ventas, flujo en efectivo, etc. Y la actividad D consiste en la elaboración de una propuesta crediticia a la institución que ayudará a financiar la compra del negocio. Se supone que todas estas actividades han sido planeadas cuidadosamente.

Observe que la tabla (1) contiene una columna encabezada con la frase **antecedente inmediato**. Los antecedentes inmediatos de una actividad específica, son las actividades que cuando terminan permiten el inicio de la siguiente actividad. Por ejemplo la tabla (1) muestra que se puede comenzar el trabajo correspondiente a las actividades A y B en cualquier momento, ya que no tienen antecedentes inmediatos. Sin embargo no puede realizarse la actividad C hasta que haya terminado la actividad B, y no se puede iniciar la actividad D hasta que hayan terminado las actividades A y C. De tal modo que es necesario conocer la información sobre la actividad predecesora inmediata de cada actividad con el objeto de describir claramente la interdependencia entre las diversas actividades del proyecto.

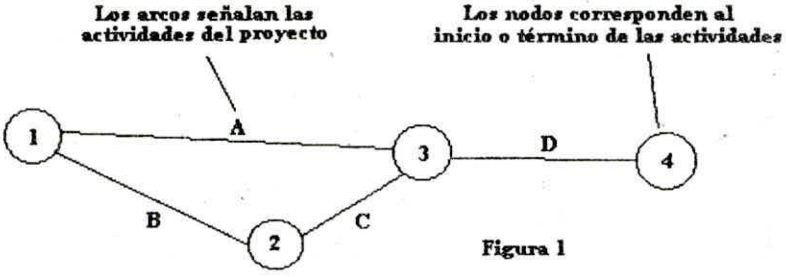


Figura 1

La red de la figura (1) muestra no sólo las actividades enlistadas en la tabla (1) sino, además, las relaciones de interdependencia entre dichas actividades. En efecto:

1. Las actividades se muestran sobre las ramas o arcos de la red. Observe las letras A, B, C y D sobre dichos arcos.

2. Los círculos o nodos de la red, corresponden al inicio o terminación de las actividades. Así, por ejemplo, el nodo 2 corresponde al evento de la terminación de la actividad B y el nodo 3 corresponde al evento de la terminación

de las actividades A y C. LLamaremos evento a la terminación de todas las actividades que conducen a un nodo.

3. Observe que la red muestra que para que se inicie la actividad C es necesario que haya concluido la actividad B.

4. La red muestra, además, que no puede iniciarse la actividad D sin que hayan concluido las actividades A y C.

A esta representación gráfica se le denomina Red PERT/CPM para el proyecto en cuestión.

6.3 La red Pert/Cpm para el proyecto de la compañía Astilleros S.A

la compañía **Astilleros S.A** está desarrollando el proyecto de construcción de un astillero en el puerto de Caldera. En la tabla (2) se presenta un listado de actividades, con sus respectivos antecedentes, estudiados por los administradores e ingenieros de la compañía.

Actividades	Antecedentes inmediatos
A	–
B	–
C	B
D	A y C
E	C
F	C
G	D, E y F

[Tabla 2]

Para iniciar el trazado de la red completa del proyecto, elaboraremos primero, por motivos didácticos, la red Pert/Cpm teniendo en cuenta, sólamente, las cuatro primeras actividades. La construcción de esta porción de la red no ocasiona ningún problema para la cuarta actividad, puesto que las únicos antecedentes inmediatos para dicha actividad son las actividades A y C. Sin embargo cuando añadimos la siguiente actividad a la red, es decir, cuando añadimos la actividad E, se presentarán problemas. La figura (2) muestra la porción de la red con las cuatro actividades. En la red se puede apreciar claramente que las actividades

A y B no tienen antecedentes inmediatos y que la actividad C tiene como antecedente a la actividad B. Finalmente la red muestra que La actividad D tiene como antecedentes a las actividades A y C.

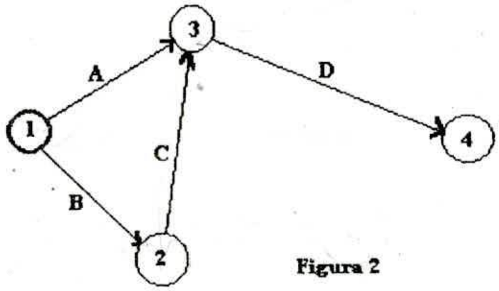


Figura 2

Actividades	Ant/inmediatos
A	–
B	–
C	B
D	A y C
E	C
F	C
G	D, E, F

Al seguir la construcción de la red, observamos que la actividad E tiene como antecedente inmediato sólamente a la actividad C. Podríamos tentarnos a agregar la actividad E a partir del nodo 3, sin embargo, esto sería incorrecto, porque significaría poner a las actividades A y C como antecedentes inmediatos de la actividad E. No debemos olvidar que el único antecedente inmediato de la actividad E es la actividad C. Para evitar esta dificultad inventaremos una actividad ficticia, que no es una actividad real, y que sirve para ilustrar en la red la precedencia correcta de las diversas actividades. De tal modo que añadiremos el nodo 5 para insertar la actividad E después de la actividad C. Note que hemos relacionado el nodo 5 con el nodo 3 mediante una linea punteada. La figura (3) muestra la actividad E comenzando en el nodo 5. Ahora, se ve claramente que el único antecedente de la actividad E es la actividad C.

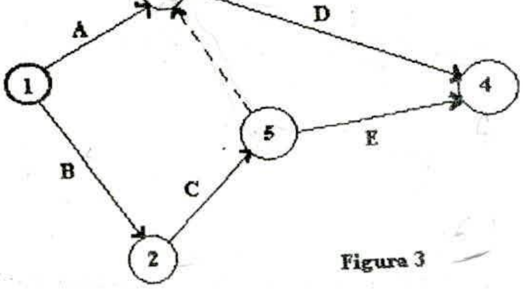
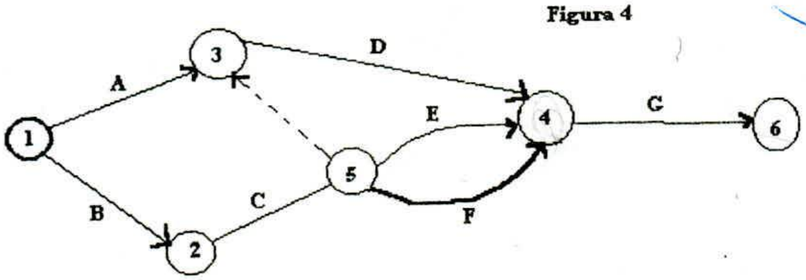


Figura 3

La actividad ficticia no tiene requisito de tiempo, porque sólo se utiliza para conservar las relaciones adecuadas de precedencia en la red. Observe, además, que la inclusión de la actividad ficticia muestra correctamente que las actividades A y C son antecedentes inmediatos de la actividad D.

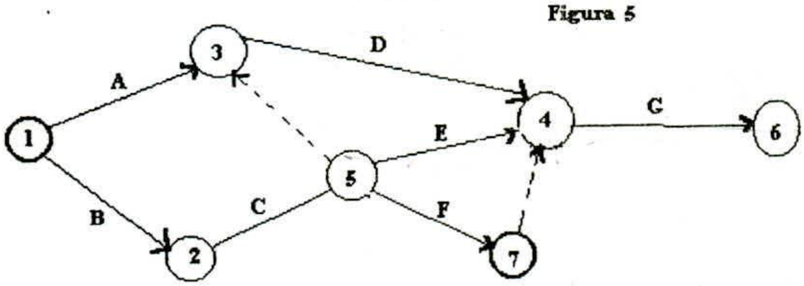
Siguiendo con las actividades F y G trazamos la siguiente red tentativa para el proyecto. Figura (4)

Figura 4



La ampliación de la red nos muestra que se identifica correctamente que las actividades D, E y F son los antecedentes inmediatos de la actividad G. Sin embargo, las actividades E y F comienzan ambas en el nodo 5 y terminan en el nodo 4. Para evitar confundir las actividades E y F y en sentido de considerarlas como la misma actividad, puesto que tienen el mismo nodo inicial y final, añadiremos una nueva actividad ficticia como muestra la figura (5)

Figura 5



Actividades	Ant/inmediatos
A	—
B	—
C	B
D	A y C
E	C
F	C
G	D, E, F

La red de la figura (5) identifica correctamente las relaciones de precedencia así como también, elimina la posible confusión entre las actividades E y F. Vemos que se pueden utilizar actividades ficticias para identificar correctamente las relaciones de precedencia y al mismo tiempo eliminar las confusiones que puedan surgir entre dos o más actividades que tengan el mismo nodo inicial y final. Con frecuencia los grandes proyectos requieren la introducción de actividades ficticias en la red.

6.4 Programación del proyecto: ampliación del Restaurante Pellos S.A, utilizando Pert/Cpm.

La firma Pellos S.A propietaria del Restaurante Pellos, está considerando la ampliación de su actual Restaurante. Se está en conversaciones con inversionistas extranjeros para la construcción de un complejo de restaurantes ubicados en diversos lugares de la ciudad de Santiago que serían dados en administración a personas de diferentes países que introducirían en sus menúes las comidas de sus lugares de origen. En la tabla (3) se muestra una lista de las actividades específicas que conforman el proyecto de ampliación. La tabla muestra no sólo el antecedente inmediato de cada actividad, sino que, además, el número de **semanas** que se requieren para terminar la obra.

Actividad	Descripción de la actividad	Antecedente inmediato	Tiempo de terminación
A	Elaboración de planos de la obra	–	5
B	Identificación administradores extranjeros	–	6
C	Elaborar material para administradores	A	4
D	Elección de contratista	A	3
E	Preparar permisos de Construcción	A	1
F	Aprobación para permisos de construcción	E	4
G	Ejecutar la construcción	D y F	14
H	Finiquitar contratos con administradores	B y C	12
I	Instalación efectiva de administradores	G y H	2
			Total 51 semanas

[Tabla 3]

La información de la tabla señala que el tiempo total que se requiere para terminar todas las actividades del proyecto de ampliación del restaurante a un complejo de restaurantes es de 51 semanas. Sin embargo en la red de la figura (6) se ve que varias de las actividades pueden realizarse simultaneamente (por ejemplo las actividades A y B). Esto significa que se puede abreviar el tiempo de terminación del proyecto a menos de 51 semanas. Es claro que el tiempo de terminación del proyecto no se puede deducir deirectamente de la tabla 3. Se invita al lector a verificar que la siguiente es la red del problema que estamos analizando.

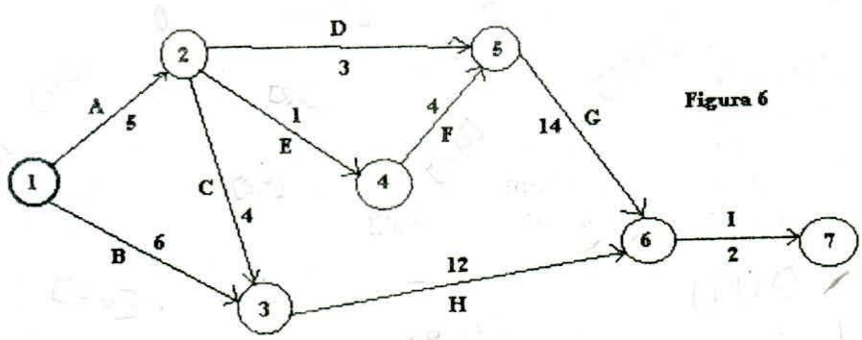


Figura 6

Observe que para facilitar los cálculos de Pert/Cpm le hemos agregado, además de la letra que identifica cada actividad, el tiempo de actividad que indica la tabla (3).

6.5 La ruta crítica

Una vez que se tiene la red y los tiempos de las actividades, claramente establecidas, efectuaremos los cálculos necesarios para determinar el tiempo total que se requiere para terminar el proyecto. Para evaluar el tiempo de terminación del proyecto será necesario analizar la red e identificar la ruta crítica. Hemos visto que una ruta es una secuencia o sucesión de actividades conectadas que van desde el nodo inicial (1) al nodo terminal (7). Por ejemplo, las actividades enlazadas, definidas por los nodos $1 - 2 - 3 - 6 - 7$, forman un trayecto que consta de las actividades A, C, H e I. Por otra parte, los nodos $1 - 2 - 5 - 6 - 7$, definen la ruta correspondiente a las actividades A, D, G e I. Como es necesario pasar por todas las rutas para terminar el proyecto, se requiere analizar el tiempo que toman las diversas rutas. En particular, lo que interesa es el camino más largo a través de la red. Puesto que, la duración de las demás rutas es inferior, la más larga determina el tiempo total que se requiere para terminar el proyecto. Si las actividades que están en la ruta más larga se demoran, entonces se demora la totalidad del proyecto. Por esta razón, las actividades que se encuentran en la ruta más larga, son las actividades de la ruta crítica del proyecto. A tal camino más largo lo denominaremos ruta crítica

Si estamos interesados en reducir el tiempo total del proyecto, tendríamos que reducir la longitud de la ruta crítica, disminuyendo los tiempos de duración de las actividades sobre dicha ruta. En lo que sigue analizaremos el algoritmo para determinar la ruta crítica de la red de nuestro proyecto.

Tiempo más cercano de inicio y tiempo más cercano de terminación. Si empezamos nuestro análisis en el nodo de origen (1) y consideramos cero como tiempo de iniciación de las actividades, se calcula, en primer lugar, un tiempo más cercano de inicio y un tiempo más cercano de terminación para cada actividad de la red. La siguiente es la notación que usaremos:

a) tCI = Tiempo más cercano de inicio para una actividad
b) tCT = Tiempo más cercano de terminación para una actividad
c) t = Tiempo esperado para la actividad

Si queremos evaluar el tiempo más cercano (más próximo) de terminación de una determinada actividad, se efectúa la operación siguiente:

$$\text{tCT} = \text{tCI} + t$$

Veremos el significado de estos conceptos en los nodos 1 y 2 de la red del proyecto. Consideremos la actividad A en la figura (7).

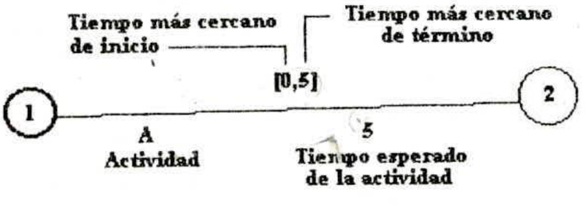


Figura 7

La actividad A tiene un tCI (tiempo más cercano de inicio) igual a cero. El tiempo t, esperado para esta actividad, es 5 (esto es t=5). Por lo tanto el tCT (el tiempo más cercano de terminación) es:

$$tCT = 0 + 5 = 5$$

La notación que usaremos está indicada sobre el arco de la red. El primer número del corchete indica el tiempo más cercano de inicio. El segundo número del corchete indica el tiempo más cercano de terminación. El tiempo esperado para cada actividad se anota bajo el arco de la red.

Como no es posible empezar las actividades que parten de un nodo hasta que finalizan todas las actividades inmediatamente precedentes, utilizaremos la siguiente regla para evaluar los tiempos más cercanos de inicio para las actividades.

El tiempo más cercano de inicio (de comienzo) para una actividad que sale de un nodo determinado es igual al mayor de los tiempos más cercanos de terminación de todas las actividades que entran en ese nodo

Aplicaremos esta regla a una porción de la red que incluye las actividades A, B, C y H. La figura (8) muestra una porción de la red con las actividades antes dichas.

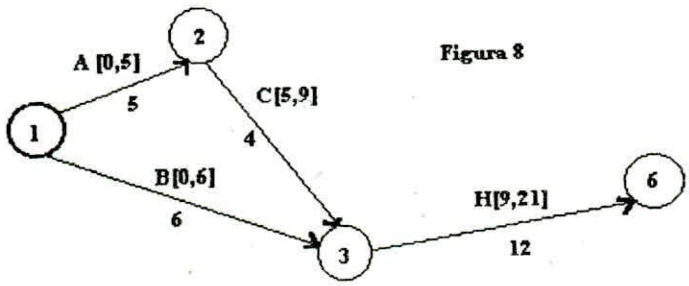


Figura 8

Los corchetes en las actividades A y B parecen claros. Los tCI para la actividades A y B son ambos ceros, por lo tanto los tCT son 5 y 6 respectivamente. Al Aplicar la regla del tiempo más cercano de inicio para la actividad C que sale del nodo 2, nos damos cuenta primero que la actividad A es la única que llega al nodo 2. Como el tiempo más próximo de términación para la actividad A es 5, el tCI (el tiempo más cercano de inicio) para la actividad C, es también 5. Para determinar, ahora, el tCT (el tiempo más cercano de término) para la actividad C ocupamos la fórmula $tCT = tCI + t$, donde $t = 4$ es el tiempo esperado para la actividad C. En suma:

$$tCT = 5 + 4, \quad \text{de donde resulta el corchete,} \quad [5, 9]$$

¿ Cuáles son los tCI y tCT de la actividad H ?

Observe que la actividad H se inicia en el nodo 3 y las actividades que llegan a dicho nodo son las actividades B y C. Los tCT (tiempos cercanos de término de ambas actividades) son 6 y 9 respectivamente, de los cuales el mayor es 9. Aplicando la regla del tiempo más cercano de inicio a la actividad H, se observa que el tiempo más cercano de inicio para esta actividad debe ser 9, ya que 9 que es el mayor tiempo más cercano de término de las dos actividades que entran en el nodo 3. Por lo tanto el tCI (el tiempo más cercano de inicio) de la actividad H es 9.

Para calcular el tCT (tiempo más cercano de término) de la actividad H debemos ocupar la fórmula $tCT = tCI + t$ donde $t = 12$. En efecto:

$$tCT = 9 + 12 = 21, \quad \text{de donde resulta el corchete,} \quad [9, 21]$$

El lector puede verificar que los tiempos más próximos de inicio y de término para cada una de las actividades de la red.

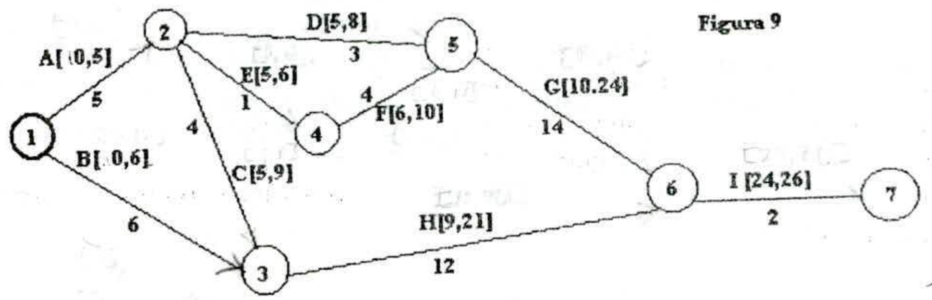


Figura 9

En la figura (9) se muestra la red PERT/CPM del proyecto de ampliación del Restaurante **Pellos S.A**, que incluye los valores de tCI y tCT de cada actividad. Nótese que el tiempo más próximo de terminación para la actividad I es de 26 semanas. Por esta razón el tiempo total que se requiere para terminar el proyecto es de 26 semanas.

Tiempo más lejano de inicio y tiempo más lejano de terminación. Continuaremos, ahora, con el algoritmo para determinar la ruta crítica. Para desarrollar esta idea definiremos la siguiente notación.

a) tLI = Tiempo más lejano de inicio para una actividad
b) tLT = Tiempo más lejano de término para una actividad
c) t = Tiempo esperado para la actividad

Comenzando en el nodo 7 y utilizando el tiempo más lejano de término, que es 26 para la actividad I, se va hacia atrás en la red, calculando un tiempo más lejano de inicio y un tiempo más lejano de término para cada actividad. Para realizar esto utilizaremos la expresión:

$$tLI = tLt - t$$

De tal modo que el tLI (tiempo más lejano de inicio) para la actividad I se puede calcular en dicha forma. En efecto, $tLI = 26 - 2$, donde $tLT = 26$ y el tiempo esperado para esta actividad es 2. La siguiente es una regla para calcular el **tiempo más lejano de término** para una actividad cualesquiera de la red.

El tiempo más lejano de término para una actividad que llega a un nodo específico es igual al menor de los tiempos más lejanos de inicio para todas las actividades que salen de ese nodo

La regla anterior establece que el tiempo más lejano en el que se puede terminar una actividad es igual al valor más cercano (menor) para el tiempo más lejano de inicio de las siguientes actividades. La figura (10) muestra la red completa incluyendo los tiempos más lejanos de inicio y más lejanos de término señalados entre corchetes, directamente debajo de los tiempos más cercanos de inicio y más cercanos de término.

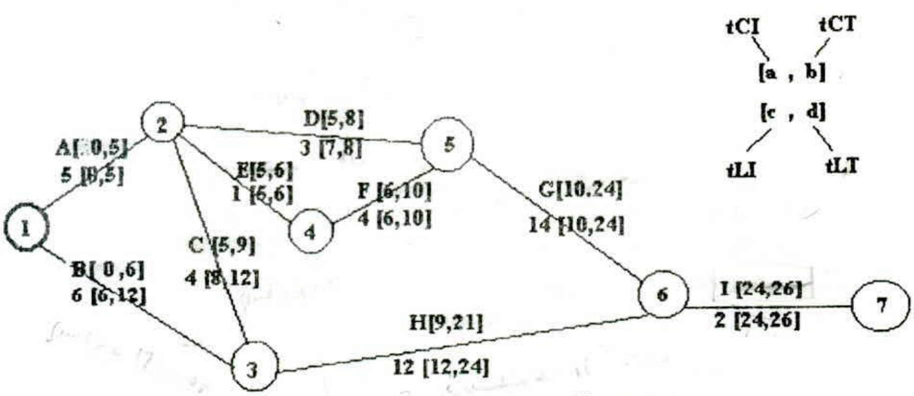


Figura 10

Nótese la aplicación de la regla del tiempo más lejano de término para la actividad A, que llega al nodo 2. El tiempo más lejano de término para la actividad

A es igual a 5 (tLT=5); en efecto, el menor de los tiempo mas lejanos de inicio para las actividades que salen del nodo 2, es decir, para las actividades C (cuyo tLI=8), E (cuyo tLI=5) y D (cuyo tLI=7) es igual a 5.

después de obtenidos los tiempos de inicio y de término de las actividades que se resumen en la figura (10), puede determinarse el tiempo de holgura correspondiente a cada una de las actividades. Se define la **holgura o margen** como el tiempo que se puede demorar una actividad sin afectar el tiempo total que se requiere para terminar el proyecto. La holgura para cada actividad se calcula de la manera siguiente:

$$\text{Holgura} = tLI - tCI = tLT - tCT$$

Por ejemplo, Observe que la holgura correspondiente a la actividad C es:

$$tLI - tCI = 8 - 5 = 3 \text{ semanas}$$

Esto significa que la actividad C puede demorarse hasta 3 semanas (iniciándola en cualquier momento entre las semanas 5 y 8) y aún es posible terminar todo el proyecto en 26 semanas. Por ello la actividad C no es una actividad de ruta crítica. Observe que para la actividad E no hay holgura, en efecto:

$$tLI - tCI = 5 - 5 = 0 \text{ semanas}$$

Por esta razón la actividad E no puede retrasarse sin afectar el proyecto completo. En general las actividades de la ruta crítica son aquellas que tienen holgura cero. Los tiempos de inicio y de término que se muestran en la figura (10) proporcionan un programa detallado para las actividades, es decir, se puede saber, a partir de ella, cuáles son los tiempos más cercanos y más lejanos de inicios y de términos para las actividades. A continuación pondremos la misma información en forma de una tabla con el fin de ver mejor estos hechos.

Actividad	tCI	tLI	tCT	tLT	Holgura (TLI-tCI)	Ruta crítica
A	0	0	5	5	0	si
B	0	6	6	12	6	
C	5	8	9	12	3	
D	5	7	8	10	2	
E	5	5	6	6	0	si
F	6	6	10	10	0	si
G	10	10	24	24	0	si
H	9	12	21	24	3	
I	24	24	26	26	0	si

[Tabla 4]

Se observa que las actividades A, E, F, G e I, tienen holgura cero, por lo tanto, dichas actividades son las que conforman la ruta crítica en la red de la ampliación de **Pellos S.A**. Nótese que la tabla indica, también, la holgura o demora para las actividades no críticas.

6.6 Análisis de la red Pert/Cpm de Pellos S.A.

Hemos dicho que los administradores buscan métodos que les ayuden a resolver problemas de planeamiento, programación y control de proyectos. hemos visto que la tabla (4), producto de la red Pert/Cpm, entrega importante información sobre el desarrollo del proyecto. Reconsideremos estas cuestiones a la luz de la información que nos entrega la red Pert/Cpm sobre el proyecto de ampliación de la firma **Pellos S.A**.

1. ¿ Cuál es el tiempo total que se requiere para terminar el proyecto de ampliación del restaurante ?

   El proyecto puede finalizar en 26 semanas si se terminan las actividades según lo programado.

2. ¿ Cuáles son los tiempos programados de iniciación y de terminación de cada actividad ?

   En el programa de actividades de la tabla 4 se muestran los tiempos más cercanos y más lejanos de inicio, y más cercanos y más lejanos de término para cada actividad.

3. ¿ Qué actividades son críticas y deben finalizar **exactamente** según lo programado para mantener el proyecto dentro del programa ?

   Las actividades que pertenecen a la ruta crítica son A, E, F, G e I y por lo tanto deben finalizar en el tiempo previsto.

4. ¿ Cuánto se pueden demorar las actividades no críticas antes de que ocasionen retrasos en la terminación d los proyectos ?

   La tabla (4) muestra las actividades que presentan tiempos de holgura. Dichos tiempos son los permitidos antes de ocasionar retrasos en la terminación del proyecto.

6.7 El algoritmo de la ruta crítica Pert/Cpm

El siguiente es un resumen del algoritmo de camino crítico Pert/Cpm que puede utilizarse para planear, programar y controlar proyectos.

1. Se elabora una lista de las actividades que conforman el proyecto.

2. Se determinan las actividades inmediatamente precedentes para cada una de las actividades

3. Se estima el tiempo de terminación de cada actividad.

4. Se traza una red que ilustre las actividades y los antecedentes inmediatos que se enunciaron en los pasos 1 y 2.

5. Se utiliza la red y las estimaciones de los tiempos de las actividades para determinar el tiempo más cercano de inicio y el tiempo más cercano de término para cada actividad, realizando el paso hacia adelante en la red. El tiempo más cercano de término para la última actividad del proyecto establece el tiempo que se requiere para terminar el proyecto.

6. Utilizando el tiempo de terminación del proyecto que se obtiene en el paso 5, como el tiempo más lejano de término para la última actividad, se efectúa un paso hacia atrás sobre la red para evaluar los tiempos más lejanos de inicio y de término para cada actividad.

7. Utilizar la diferencia entre los tiempos más lejano y más cercano de inicio para cada actividad con el objeto de obtener la holgura disponible para esa actividad.

8. Las actividades de la ruta crítica son las que tienen holgura cero.

9. Utilizar la información de los pasos 5 y 6 para elaborar el programa de actividades del proyecto.

6.8 El sistema Pert/Cost

Hemos visto que el Pert/Cpm se concentra en **el tiempo** de un proyecto y proporciona información que puede utilizarse para programar y controlar actividades individuales, de manera que un proyecto pueda terminarse a tiempo. Aunque el tiempo del proyecto es una consideración primordial, en muchas situaciones el costo del proyecto es tan importante como el tiempo.

En lo que sigue mostraremos la forma de utilizar la técnica conocida como Pert/Cost para ayudar a planear, programar y controlar los costos de los proyectos. El objetivo final de un sistema de Pert/Cost es ofrecer información que sirva para mantener los costos del proyecto dentro del presupuesto que ha sido especificado.

6.9 Planificación y programación de los costos de un proyecto

Cuando se calcula el presupuesto de un proyecto por lo general se identifican los costos correspondientes, y después se programa un itinerario que muestra los momentos en que se ejecuten dichos costos; teniéndose la oportunidad, en las diversas etapas de desarrollo del proyecto, de comparar los costos reales con los costos presupuestados. Si los costos reales exceden a los costos presupuestados, pueden emprenderse acciones tendientes a corregir el costo total del proyecto dentro de los márgenes presupuestados.

El primer paso de un sistema de Pert/Cost consiste en dividir el proyecto total en actividades componentes cuyos costos sean fáciles de controlar. Aunque una red Pert/Cpm ya contiene las actividades claramente definidas, éstas pueden ser demasiado detalladas y difiles de controlar desde el punto de vista de los costos. En estos casos conviene agrupar las actividades que están, por ejemplo, bajo un Departamento, bajo contratistas, etc, formando lo que llamaremos paquetes de trabajo. Identificando claramente estos paquetes, el administrador del proyecto puede utilizar el sistema Pert/Cost para sus costos. Para ilustrar el Pert/Cost consideraremos la siguiente tabla que reune los resultados de una red de un proyecto de investigación. Supondremos que cada actividad es un paquete de trabajo y que se ha realizado un análisis detallado de costos.

Actividad	Tiempo esperado en meses	Costo presupuestado	Costo presupuestado por mes
A	2	10.000	05.000
B	3	30.000	10.000
C	1	03.000	03.000
D	3	06.000	02.000
E	2	20.000	10.000
F	2	10.000	05.000
G	1	0.8000	08.000
	Costo total del proyecto	87.000	

[Tabla 5]

La tabla (5) muestra las estimaciones de los costos junto con los tiempos esperados. Observe que la técnica Pert/Cost supone que los paquetes de trabajo se han definido de tal manera que sus costos ocurran a un ritmo constante a lo largo de la duración de la actividad. Así, por ejemplo, la actividad B, que tiene un costo estimado en 30.000 dólares y una duración esperada de 3 meses, tiene una tasa de 10.000 por mes. Esto mismo ocurre con todas las actividades.

Utilizando el tiempo esperado d las actividades puede calcularse la ruta crítica para el proyecto. La tabla (6) muestra un resumen de los cálculos de la ruta crítica y el programa de actividades. Las actividades B, D y F determinan la ruta crítica y consideran un tiempo esperado de terminación del proyecto de 8 meses.

Actividad	tCI	tLI	tCT	tLT	Holgura	Ruta crítica
A	0	3	2	5	3	
B	0	0	3	3	0	si
C	2	5	3	6	3	
D	3	3	6	6	0	si
E	3	5	5	7	2	
F	6	6	8	8	0	si
G	5	7	6	8	2	

[tabla 6]

Estamos en condiciones, ahora, de desarrollar un presupuesto para el proyecto que muestre los momentos en que deben presentarse los costos durante los 8 meses. Conviene precisar que todas las actividades comienzan en su tiempo de iniciación más próxima posible. Utilizando las tasas de costos mensuales de las actividades que se muestran en la tabla (6) y los tiempos más próximos de inicio, se puede preparar el pronóstico de costos mes por mes. Los siguientes análisis nos conducen a la tabla (7) que muestra el programa de costos totales presupuestados cuando se inician todas las actividades en los tiempos más próximos de inicio.

Consideremos, por ejemplo, la actividad A. Utilizando como 0 la fecha más próxima de inicio, se espera que tal actividad, que tiene una duración de 2 meses, muestre un costo de 5.000 en cada uno de los dos primeros meses del proyecto. La actividad C se inicia en en tercer mes y el costo presupuestado es de 3.000 por mes. La actividad F se inicia en el séptimo mes y el costo presupuestado se reparte entre los meses séptimo y octavo.

Observe que al sumar los costos de cada columna se obtiene el costo total previsto para cada mes del proyecto. Finalmente, acumulando los costos mensuales, se llega al programa de costos totales presupuestados, suponiendo que se inician todas las actividades en sus **tiempos más cercanos** de inicio

	meses							
Actividad	1	2	3	4	5	6	7	8
A	5	5						
B	10	10	10					
C			3					
D				2	2	2		
E				10	10			
F							5	5
G						8		
Costo mensual	15	15	13	12	12	10	5	5
Costo total	15	30	43	55	67	77	82	87

[tabla 7]

¿ Qué ocurre cuando las actividades se empiezan en sus tiempos más lejanos de inicio ?

La tabla (8) muestra el programa de costos totales presupuestados cuando comienzan todas las actividades en sus tiempos más lejanos de inicio.

	meses							
Actividad	1	2	3	4	5	6	7	8
A				5	5			
B	10	10	10					
C						3		
D				2	2	2		
E						10	10	
F							5	5
G								8
Costo mensual	10	10	10	7	7	15	15	13
Costo total	10	20	30	37	44	59	74	87

[tabla 8]

Si suponemos que el proyecto avanza dentro de su programa Pert/Cpm, todas las acticidades comenzarían en algún punto entre sus tiempos más cercanos y más lejanos de inicio. Esto significa que el costo total del proyecto debe darse en los niveles previstos dentro de los programas de costos más cercanos de inicio y más lejanos de inicio. Veamos un ejemplo, analizando las tablas (7) y (8) se observa que hacia el tercer mes, los costos totales del proyecto deben estar entre 30.000 (tiempo lejano de inicio) y 43.000 (tiempo cercano de inicio). Por ello se esperaría un costo de entre 30.000 y 43.000 en el tercer mes. La figura (11) muestra los costos totales pronosticados para el proyecto tanto en sus tiempos de inicio más cercanos y lejanos. La región sombreada entre las dos curvas de costos muestra los posibles presupuestos para el proyecto. Con base en los análisis anteriores, el presupuesto tendría que estar dentro de la región factible (región sombreada)

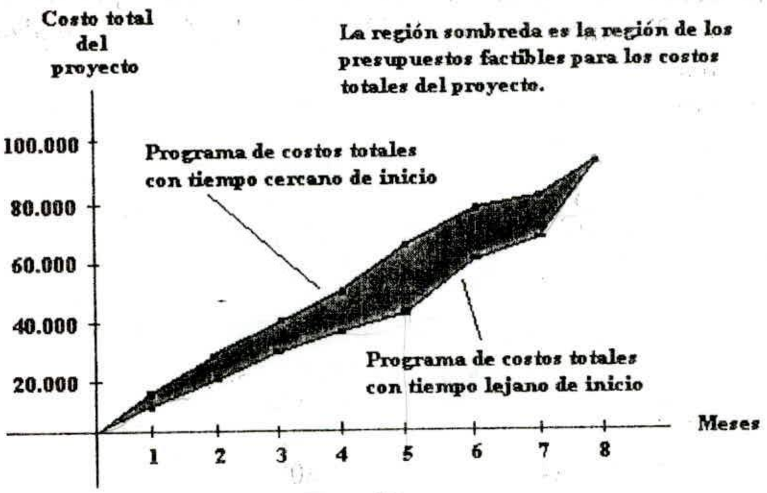


Figura 11

Sin embargo la información que hemos acumulado, en términos de planear y programar los costos totales del proyecto no nos garantiza su efectividad. En efecto, para tener un sistema efectivo de control de costos, es necesario identificar dichos costos de forma mucho más detallada. Así, por ejemplo, tendría muy poco valor saber que el costo real está excediendo al costo presupuestado, si no podemos identificar las actividades que están ocasionando los excesos de costos.

El sistema Pert/Cost, ofrece la posibilidad de controlar los costos al presupuestar y después registrar los costos reales en base a cada actividad o paquete de trabajo. A lo largo de la duración del proyecto, en forma periódica, se comparan los costos reales de todas las actividades que se han terminado, y las que están proceso, con los correspondientes costos presupuestados.

Si en cualquier punto del tiempo los costos reales exceden a los costos presupuestados se ha incurrido en una **elevación de costos**. Por otro lado, si los costos reales son inferiores a los costos presupuestados, se dice que tenemos un abatimiento de costos. Si somos capaces de identificar las fuentes de alzamiento o de abatimientos, se pueden iniciar las acciones correctivas que correspondan. La tabla (9) muestra los costos presupuestados para las actividades de la red del proyecto de investigación que estamos analizando.

Actividades	Costos presupuestados
A	10.000
B	30.000
C	03.000
D	06.000
E	20.000
F	10.000
G	0.8000

[Tabla 9]

Por otro lado, podemos querer saber como avanzan los costos a partir de un determinado mes. Un sistema PERT/Cost requiere de una recopilación periódica, quizás quincenal o mensual de la información sobre:

a) Costo real a la fecha

b) Porcentaje de avance a la fecha

Supongamos que estamos al final del cuarto mes del proyecto y que se tienen los datos de los costos reales y de avance porcentual de cada actividad. La tabla (10) muestra estos supuestos costos y el avance porcentual respectivamente.

Actividad	Costo real	Avance porcentual de la actividad
A	12.000	100
B	30.000	100
C	01.000	050
D	02.000	033
E	10.000	025
F	00.000	000
G	00.000	000

[Tabla 10]

La evaluación que se ha hecho del proyecto, resumida en la tabla (10), muestra que ya han finalizado las actividades A y B; que las actividades C, D y E están en proceso; y que las actividades F y G aún no han comenzado. Para elaborar un reporte sobre el estado de los costos y calcular el **valor del trabajo efectuado** hasta la fecha definiremos lo siguiente para cada actividad $i = A, B, ...G$.

a) V_i = valor del trabajo para cada actividad i

b) P_i = avance porcentual para la actividad i

c) B_i = presupuesto para la actividad i

Para calcular el valor del trabajo realizado hasta la fecha para cada actividad usaremos la siguiente relación:

$$(1) \qquad V_i = \left(\frac{P_i}{100}\right) \cdot B_i$$

Por ejemplo, el valor del trabajo terminado para la actividad A. Aplicando la fórmula (1) y los datos de la tabla (9) se obtiene que:

$$V_A = \left(\frac{100}{100}\right) \cdot 10\,000 = 10\,000$$

El valor del trabajo terminado para la actividad C es:

$$V_C = \left(\frac{50}{100}\right) \cdot 3\,000 = 1\,500$$

Trataremos, ahora, de hallar las **elevaciones o alzamientos de costos** y los abatimientos de costo comparando el costo real de cada actividad con su valor presupuestado. Notaremos con:

a) AC_i = costo real para la actividad i a la fecha.

b) D_i = diferencia entre el costo real y el valor del trabajo realizado para la actividad i

De tal modo que:

$$D_i = AC_i - V_i$$

Si $D_i > 0$, entonces la actividad tiene una elevación de costo. Si $D_i < 0$, entonces, la actividad tiene un abatimiento de costos. Finalmente, si $D_i = 0$, entonces los costos reales corresponden a los costos presupuestados.

Utilizaremos los valores de trabajo efectuados para las actividades A y C para calcular sus **abatimientos o elevaciones**. En efecto:

$$D_A = C_A - V_A = 12\,000 - 10\,000 = 2000 > 0$$

Puesto que $D_A > 0$, entonces, la actividad A, que ya ha terminado, tiene un exceso de costos de 2 000. Por otra parte:

$$D_C = 1\,000 - 1\,500 = -500 < 0$$

por lo tanto la actividad C muestra un abatimiento, o ahorro de costos, de 500.

La tabla (10) muestra un análisis completo de los costos del proyecto de investigación, al cuarto mes.

Actividad	Costo real	Valor del trabajo terminado	Diferencias
A	12.000	10.000	2.000
B	30.000	30.000	0.000
C	01.000	01.500	−500
D	02.000	02.000	0.000
E	10.000	05.000	5.000
F	00.000	00.000	0.000
G	00.000	00.000	0.000
Totales	55.000	48.500	6.500
		Elevación a la fecha en el costo total del proyecto	6.500

[Tabla 11]

La tabla (11) muestra al administrador del proyecto que los costos a la fecha están sobrepasados en 6 500 por encima de los costos presupuestados. Desde el punto de vista porcentual, diríamos que el proyecto está experimentando, hasta la fecha, una elevación en los costos de

$$\frac{6\,500}{48\,500} \cdot 100 = 13,4\%$$

Este porcentaje de aumento en los costos nos está indicando una situación de extrema gravedad.

Una mirada atenta a la tabla muestra que las actividades A y E son las que están ocasionando el exceso de costos. Puesto que la actividad A ya ha terminado, no es posible corregir su exceso, sin embargo la actividad E se encuentra en proceso y ha avanzado sólamente un 25 %. Una acción correctiva sobre la actividad E puede ayudar a acercarnos al costo real presupuestado del proyecto. El administrador puede, también, evaluar las posibilidades de bajar costos en las actividades C, D, F y G.

6.10 Ejercicios propuestos

1. El departamento de Matemática de la universidad de Atacama está diseñando un programa de capacitación para los asistentes administrativos que trabajan en los Programas Temporales Descentralizados (**PTD**). Se pretende diseñar la capacitación de manera que pueda efectuarse lo más pronto posible. Existen importantes relaciones de precedencia que deben mantenerse entre las actividades de capacitación. Por ejemplo, un asistente de PTD, debe conocer el funcionamiento completo de un PTD antes de saber tramitar una solicitud de autorización de viáticos (**SAV**). A continuación se muestran las actividades que cada asistente administrativo debe llevar a cabo.

Actividad	Antecedente inmediato
A	–
B	–
C	A
D	A y B
E	A y B
F	C
G	D y F
H	E y G

[Tabla 1]

Diagramar una red PERT/CPM para este problema. No realice ningún otro análisis.

2. Considere la red PERT/CPM que se muestra a continuación:

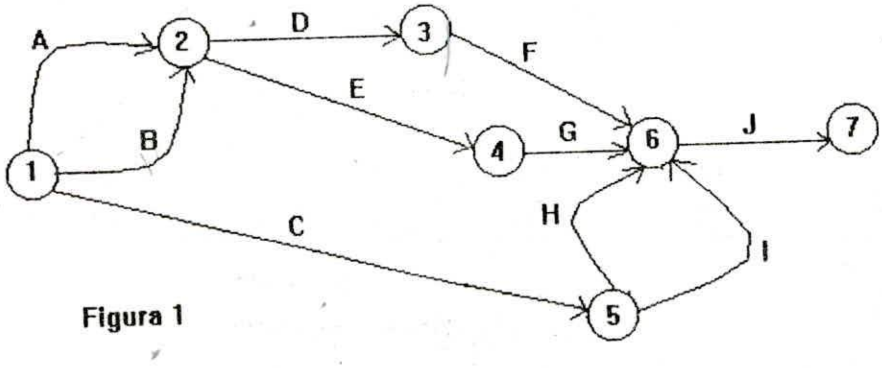


Figura 1

a) Agregue las actividades ficticias que eliminen el problema de las actividades que tienen el mismo nodo de inicio y de terminación. b) Agregue las actividades ficticias que satisfagan los siguientes requisitos de antecedentes inmediatos.

Actividad	Antecedente inmediato
H	B y C
I	B y C
G	D y E

[Tabla 2]

3. Construir una red PERT/CPM para un proyecto que tiene las siguientes actividades:

Actividad	Antecedente inmediato
A	–
B	–
C	A
D	A
E	C y B
F	C y B
G	D y E

[Tabla 3]

El proyecto termina cuando finalizan las actividades F y G.

4. Supongamos que el proyecto del problema 3 tiene los siguientes tiempos de actividad:

Actividad	Tiempo (en meses)
A	4
B	6
C	2
D	6
E	3
F	3
G	3

[Tabla 4]

a) Determine la ruta crítica.
b) El proyecto debe concluirse en 18 meses. ¿ Considera usted que pueda haber alguna dificultad para cumplir con el límite de tiempo ?

5. El área de Industria del Departamento de Matemática y Ciencias de la Computación de la Universidad de Atacama diseñó un un PTD, llamado **UDA-GESTION** para apoyar la toma de decisiones. Actualmente obtuvo un contrato para desarrollar un sistema de computación de apoyo al Gobierno de la Tercera Región. El Director del PTD estableció la siguiente lista de actividades, con sus antecedentes inmediatos.

Actividad	Antecedente inmediato
A	–
B	–
C	–
D	B
E	A
F	B
G	C y D
H	B y E
I	F y G
J	H

[Tabla 5]

Construya una red PERT/CPM para este problema.

6. Considere la siguiente red de proyecto, cuyos tiempos están dados en semanas:

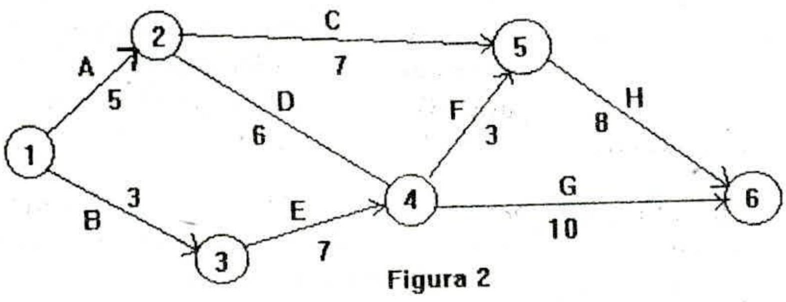


Figura 2

a) Identifique la ruta crítica
b) ¿ Cuánto tiempo se requerirá para terminar el proyecto ?
c) ¿ Se puede demorar la actividad D sin retardar el proyecto completo ?, si es así, ¿ en cuántas semanas ?
d) ¿ Puede demorarse la actividad C sin retardar el proyecto completo ?, si

es así, ¿ en cuántas semanas ?
e) ¿ Cuál es el programa para la actividad E, es decir, sus tiempos de inicio y de término ?

7. La Universidad de Atacama está evaluando la posibilidad de construir edificaciones para la Escuela de Derecho, de reciente inauguración. La nueva construcción deberá poseer un gimnasio, espacio de oficinas, salas de clases, áreas verdes, etc. Las actividades que habría que emprender antes de comenzar la construcción se muestran en la tabla (6). Los tiempos están dados en semanas.

Actividad	Descripción	Antecedente inmediato	Tiempo
A	Levantamiento topográfico	–	6
B	Ejecución del diseño inicial	–	8
C	Aprobación de la Municipalidad	A y B	12
D	Elección del arquitecto	C	4
E	Fijación del presupuesto	C	6
F	Finalización del diseño	D y E	15
G	Obtención del financiamiento	E	12
H	Contratación del constructor	F y G	8

[Tabla 6]

a) Desarrolle una red PERT/CPM para este proyecto.
b) Identifique la ruta crítica.
c) Desarrolle el programa de actividades para el proyecto.
d) ¿ Parece razonable que pudiera comenzarse la construcción un año después de haberse tomado la decisión de comenzar el proyecto con la investigación sobre el sitio y los planes de diseño iniciales ?, ¿ cuál es el tiempo esperado de terminación para el proyecto ?

8. La empresa constructora **Elal & Elal** está planeando la construcción de un nuevo parque y áreas recreativas en un terreno de 100 hectareas. Las actividades que conforman el proyecto incluyen la adaptación de las áreas de campings, cabañas, construcción de caminos, etc. Se está utilizando la red PERT/CPM de la figura (3) como ayuda para planear, programar y controlar el proyecto.

a) Cuál es la ruta crítica para la red ?. b) Muestrese el programa de actividades para el proyecto. c) El director del proyecto pretende abrir el parque al público antes de 6 meses desde el momento en que se inicie el trabajo sobre el proyecto. ¿ Parece factible tal fecha de apertura ?, explique.

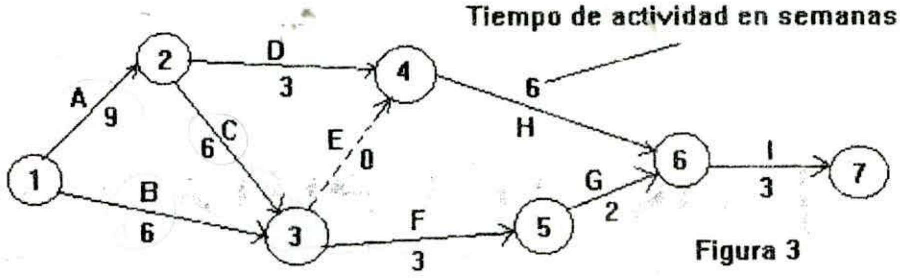


Figura 3

9. El profesor Nuñez ha decidido construir una piscina en su casa de campo. El mismo diseñó el proyecto con las siguientes 9 actividades inmediatas.

Actividad	Antecedente inmediato
A	–
B	–
C	A y B
D	A y B
E	B
F	C
G	D
H	D y F
I	E, G, H

[Tabla 7]

Elabore la red PERT/CPM para este proyecto.

Los inventarios

Los inventarios Los modelos determinísticos

7.1 Introducción

¿Qué son los inventarios? Los inventarios son cantidades de artículos tales como materias primas, productos terminados, dinero en efectivo, etc. almacenados en espera de ser utilizados.

¿Por qué se mantienen los inventarios? Se conservan inventarios por muchas razones, por ejemplo, algunos distribuidores los tienen para surtir con rapidéz los pedidos de sus clientes, de no ser así, los clientes harían sus pedidos a los competidores. Los inventarios minimizan el tiempo de compra comprendido entre la demanda de los consumidores y la oferta de los distribuidores o fabricantes. Por ejemplo, las cosechas de granos se realizan en determinadas épocas del año, pero la demanda de los consumidores es uniforme durante todo el tiempo. De tal modo que la cosecha debe almacenarse en inventario para ser utilizada en cualquier instante. De hecho lo que ocurre, es que los usuarios pagan a otros para que almacenen los productos que ellos desean tener disponibles cuando lo necesiten. Los inventarios contribuyen a veces a bajar los costos de producción. Con frecuencia resulta más barato producir artículos en grandes cantidades aún cuando no haya pedidos inmediatos de ellos: En esta situación se los almacena en inventarios en vez de producirlos en forma mas costosa posteriormente. En suma, el inventario permite proporcionar al consumidor un servicio oportuno del artículo que necesita, y dicho consumidor está dispuesto a pagar por esa comodidad.

No escapará al lector que hay costos asociados a los inventarios, esto es, hay un costo por mantener dicho inventario. En la mayor parte de las organizaciones, los gastos correspondientes al financiamiento y la conservación de los inventarios son una parte importante del costo del negocio, costos que pueden llegar a los millones de dólares, dependiendo de la magnitud del negocio. Los costos asociados a la actividad de inventarios se clasifican en **costos de mantención del inventario, costos de pedidos o de orden del inventario y costos de agotamiento.**

Costos de mantener el inventario. La empresa **Mena & Cuadra** que distribuye zapatos de seguridad para los mineros de la I, II, III y IV regiones del país tiene por lo regular 3000 pares de zapatos en sus almacenes. Cada par de zapatos le cuesta a la empresa 15 000 pesos, en consecuencia **Mena & Cuadra** tienen:

$$15\,000 \cdot 3\,000 = 45\,000\,000 \text{ pesos}$$

asociados al inventario. Supongamos que **Mena & Cuadra** reducen este inventario a sólo 1 000 botas. De esta acción resultaría que la inversión sería sólamente de 15 000 000 en vez 45 000 000 de pesos. Este dinero "sobrante" se podría utilizar perfectamente en otras inversiones. Este costo, llamado también **costo de oportunidad** es el que más contribuye al costo de mantener el inventario. Cuanto mayor es el inventario, mayor es el costo de mantención.

Costos de pedidos o de orden. Cada vez que **Mena & Cuadra** ordenan un pedido están incurriendo en gastos, es decir, cada vez que la compañía reabastece sus inventarios se origina un costo de pedido. Este costo es independiente de la cantidad de zapatos ordenados; su costo está relacionado con la cantidad de tiempo que se requiere para efectuar el trabajo de papelería, trámites afines al proceso, trabajo en contabilidad, etc. Es decir está relacionado directamente con los salarios del personal que realiza el pedido.

Costos de agotamiento. Cuando **Mena & Cuadra** no tiene existencia de zapatos, decimos que la compañía está trabajando sin inventarios. Técnicamente está ocurriendo que los pedidos están llegando después que las existencias se han agotado. En esta situación hay un costo por carecer de existencias, que incluye, por ejemplo, la pérdida de la venta, pérdida de clientes, pérdida de prestigio. Para expresar esta idea se usa el término **costo por ventas perdidas.**

La compañía tiene el problema de administrar correctamente el inventario de modo de garantizar los pedidos de los clientes sin conservar existencias que impliquen un costo excesivo de mantenimiento. Por otra parte, conservar un inventario pequeño puede implicar aumentar los costos en los pedidos y al mismo tiempo incurrir en costos por agotamiento, esto es, por falta de existencia. En suma, los administradores de **Mena & Cuadra** deben atender dos cuestiones importantes para administrar en forma eficiente sus inventarios:

a) ¿Qué cantidad (cuánto) deben pedir para reabastacer el inventario?

b) ¿En que momento (cuándo) deben reabastacer el inventario?

En lo que sigue mostraremos la forma en que los modelos de inventario pueden ayudar a tomar decisiones de esta naturaleza a los administradores.

7.2 El modelo determinístico de la Cantidad Económica de Pedido (CEP)

El modelo de la cantidad económica de pedido (Economic Order Quantity), el más conocido e importante de los modelos de inventarios es un clásico modelo de naturaleza determinística que se aplica cuando la demanda de un artículo tiene una tasa constante (o casi constante) de demanda, o cuando la cantidad que se pide llega al inventario en un instante determinado. La suposición de tasa constante de demanda significa que se extrae del inventario el mismo número (o casi el mismo número) de unidades en cierto período de tiempo.

7.2.1 El modelo CEP aplicado a la Compañía distribuidora de vinos VinosTacam

VinosTacam es una compañía distribuidora de vinos chilenos que tiene sus almacenes principales en el Parque Industrial de la ciudad de Tacna desde el año 1990. El desarrollo minero del sur del Perú ha hecho que la compañía tenga inventarios de gran magnitud de vinos de diferentes marcas, en garrafas de cinco litros. La compañía espera distribuir vinos en el norte de Chile, el sur del Perú y Bolivia. El inventario de la compañía es de 50 000 garrafas de 5 dólares cada una, por lo tanto su valor asciende a 250 000 dólares. El gerente de Operaciones ha recibido la orden de realizar el estudio de costos de dicho inventario cuyo propósito es determinar cuánto y cuándo ordenar pedidos a Chile con el fin de optimizar los costos de dicho inventario. Desde 1992 las ventas se ha mantenido estable en aproximadamente 2 000 garrafas semanales. La siguiente es la demanda semanal durante los últimos 4 meses.

Semana	Garrafas de demanda	Semana	Garrafas de demanda
1	2 000	6	2 050
2	2 020	7	2 000
3	1 950	8	1 970
4	2 000	9	1 900
5	2 100	10	2 000
	Total de garrafas	→	20 000

En realidad la demanda semanal no muestra una tasa constante, pero para los efectos del problema la diferencia entre las distintas semanas es muy pequeña. De hecho rara vez encontraremos tasas de demanda exactamente iguales cuando queramos aplicar el modelo de tal modo que el administrador que ponga en práctica el

CEP deberá considerar estos hechos. En nuestro problema una demanda constante de 2 000 garrafas semanales parece una hipótesis razonable.

Hemos dicho que los costos de mantener el inventario dependen del volumen del inventario. Si se utilizan fondos de la empresa para mantener dichos inventarios se incurre en el costo de oportunidad, esto es, en no poder utilizar, eventualmente, efectivos comprometidos en el inventario para realizar otras inversiones. Si la empresa tuviera que obtener crédito se incurre en un cargo por interés, esto es, el interés que tendría que pagar la empresa de tener que conseguir el capital a través de un préstamo. En general dicho costo es de un 18% anual. De tal modo que el costo de capital de **VinosTacam** es de

$$0.18 \cdot 250\,000 = 45\,000 \text{ dólares por año}$$

Otros costos de tenencia de inventarios son: Los seguros, impuestos, mermas, deterioros, gastos de almacenaje, etc, que dependen en su mayor parte del valor del inventario. **VinosTacam** estima que estos costos son de alrededor 7% anual. Sumado este porcentaje al costo de capital resulta un costo de 25% de mantención de los inventarios. Esto es:

$$250\,000 \cdot 0,25 = 62\,500 \text{ dólares por año}$$

Los administradores de **VinosTacam** han llegado a la conclusión de la importancia de mantener inventarios adecuados en dicha ciudad. Observan que el costo de una garrafa de vino es de 5 dólares y el costo de mantenerla en inventario es de 25% es decir, el costo de mantenerla en inventario es de

$$0,25 \cdot 5 = 1,25 \text{ dólares por año}$$

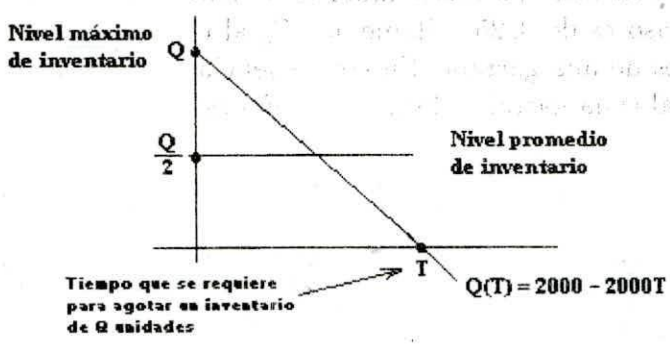
Hemos dicho, también, que otro costo importante que surge cuando se quiere mantener un inventario es el costo de pedido, en que están comprometidos los sueldos del personal, las horas que se invierten en el trámite de cada pedido, los gastos de papelería, teléfonos y transporte, etc. El análisis del proceso de efectuar un pedido, que realizaron los administradores, cualesquiera que fuera la cantidad de garrafas que se esté solicitando, dio un tiempo de 45 minutos aproximadamente. Por otra parte, los empleados de **VinosTacam** son chilenos, cuestión que se traduce finalmente en mayores gastos en sueldo. Se calcula que el costo por hora, en promedio, de cada pedido es de 12 dólares. Finalmente el costo por gastos en teléfonos, transporte, gastos en la recepción, descarga de vehículos, etc, es de 8 dólares. En consecuencia el costo por pedido es aproximadamente 20 dólares. En suma, **VinosTacam** está gastando 20 dólares por cada pedido, cualesquiera que sea la cantidad de garrafas que se solicite en cada uno de ellos.

En lo que sigue veremos como utilizar estos conceptos en la construcción del modelo CEP, teniendo en cuenta que lo que se quiere es minimizar la suma de los costos de la mantención del inventario más los costos de pedidos.

7.2.1.1 La decisión de cuánto pedir en la compañía distribuidora de VinosTacam

Si llamamos Q al volumen, o cantidad de pedido, la decisión de **cuánto pedir** está relacionada con minimizar Q. De tal modo que el nivel de inventarios de **VinosTacam** tendrá un máximo de Q unidades cuando se recibe la cantidad Q de garrafas del proveedor chileno. Con esta cantidad Q de garrafas, **VinosTacam** satisface la demanda de los clientes hasta que este inventario se agota; obviamente, cuando el inventario se agota se recibe otro embarque de Q garrafas. Como la semana de trabajo es de 5 días la tasa constante de demanda de 2 000 garrafas semanales, se traduce en una demanda de 400 garrafas diarias. La figura (1) muestra el gráfico del nivel de inventario para la cantidad Q de pedido.

Figura 1



Si el máximo del inventario es de Q garrrafas, el nivel mínimo es cero y la tasa de decrecimiento es constante, se puede ver que el nivel promedio de inventario (para el período de tiempo que se requiere para agotar el inventario) es de $\frac{Q}{2}$ garrafas. En efecto, la figura (1), muestra que la gráfica de la función $Q(T) = 2\,000 - 2\,000\,T$ se repite cada T período de tiempo. En nuestro problema el período es de $T = 1$ semana. Si $T = 0$, entonces, $Q = 2\,000$, en cambio si $T = 1$, entonces, $Q = 0$. Una tabla aclarará mejor esta idea:

Tiempo en fracciones de semana	cantidad de garrafas
Si $T = 0$	$Q = 2\,000$
Si $T = \frac{1}{4}$	$Q = 1\,500$
Si $T = \frac{1}{2}$	$Q = 1\,000$
Si $T = \frac{3}{4}$	$Q = 0\,500$
Si $T = 1$	$Q = 0\,000$
Promedio semanal	$\frac{Q}{2} = 1\,000$

Si el inventario promedio para cada intervalo $[T, T+1]$, (donde T es un entero positivo o cero) es de $\frac{Q}{2}$, podemos inferir que el inventario promedio para cualquier cantidad de intervalos será también de $\frac{Q}{2}$. Podemos calcular, ahora, el costo de mantener este inventario utilizando el promedio del inventario. Esto significa multiplicar el costo del inventario promedio por el costo de mantener una unidad inventarial en un tiempo unitario. El tiempo que se considere depende del problema que estemos analizando. Normalmente los modelos de inventarios se analizan con costos anuales. La figura (2) muestra el gráfico de las función $Q(T) = 2\,000 - 2\,000\,T$ en diferentes intervalos de tiempo.

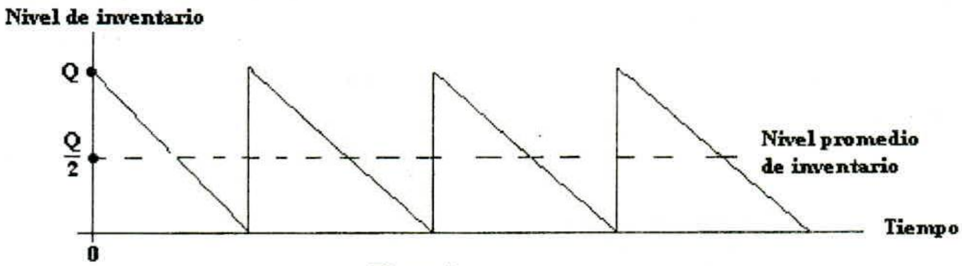


Figura 2

El costo Anual de Tenencia. Calcularemos en primer lugar el CAT, es decir, el costo anual de tenencia, esto es, el costo de mantener el inventario por un año. Para esto llamemos I a la tasa del costo anual de tenencia de una unidad inventarial, que en nuestro caso es de $0,25$ y llamemos C_u al costo unitario del artículo, que en nuestro caso es de una garrafa. En consecuencia, el costo C_h de mantener una unidad inventarial (una garrafa) durante un año es:

$$C_h = I \cdot C_u$$

En nuestro problema dicho costo de mantención es de $C_h = 0,25 \cdot 5 = 1,25$. En consecuencia la ecuación que describe el costo anual de mantención del inventario es la siguiente:

$$CAT = \frac{1}{2} Q \cdot C_h$$

donde $\frac{Q}{2}$ es el nivel promedio de inventario y C_h es el costo anual de mantención de una unidad inventarial.

El costo de pedidos. Puesto que el costo de mantención lo consideramos anualmente, debemos hacer lo mismo con los costos de pedidos. La primera pregunta que tenemos que respondernos es, ¿cuántos pedidos se tienen que efectuar al año? Si denotamos con **D** la demanda anual del producto, que en el caso de la compañía de **VinosTacam** es de $104\,000$ garrafas (es decir, $2\,000$ garrafas durante 52 semanas), el número de pedidos anuales es de:

$$\frac{D}{Q}$$

Si llamamos C_0 al costo de efectuar **un pedido**, la ecuación que describe el costo anual de pedidos es:

$$CAP = \frac{D}{Q} \cdot C_0$$

Puesto que el **C**osto **T**otal de mantención del inventario es igual a la suma de ambos costos, resulta:

$$CT = CAT + CAP = \frac{Q}{2} C_h + \frac{D}{Q} C_0$$

Si queremos que la ecuación de costo total se exprese en función de Q, es decir, en función de **cuánto debemos pedir**, se obtiene la ecuación general de costo total:

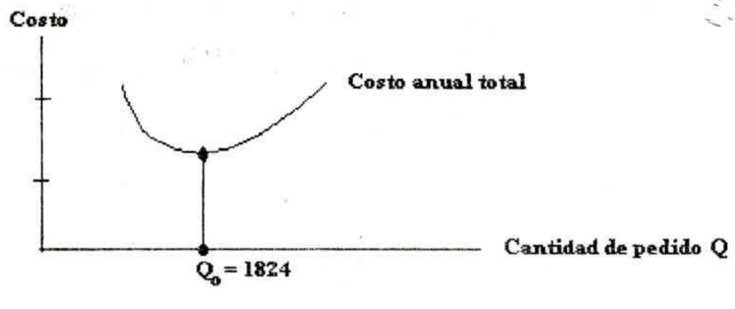
$$CT(Q) = \frac{Q}{2} C_h + \frac{D}{Q} C_0$$

Estamos en condiciones, ahora, de escribir la ecuación que modela el **C**osto **T**otal del inventario de la compañía **VinosTacam**. En efecto, reemplazando los valores de $C_h = 1,25,\ C_0 = 20$ y $D = 104\,000$, en la función $CT(Q)$, se obtiene:

$$CT(Q) = 0,625\,Q + \frac{2\,080\,000}{Q}$$

que llamaremos **ecuación general de los costos totales** para el inventario de la compañía de **VinosTacam**. El gráfico de esta función es el de la figura (3).

Figura 3



Observemos que el mínimo [1] de esta función se produce en $Q \approx 1\,824$. En efecto, derivando la función $CT(Q)$ con respecto a Q, e igualándola a cero, resulta:

$$[CT(Q)]' = 0,625 - \frac{2\,080\,000}{Q^2} = 0 \Longleftrightarrow 0,625\,Q^2 - 2\,080\,000 = 0$$

[1] El lector puede comprobar que la función $CT(Q)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo

o lo que es lo mismo:

$$Q = 160\sqrt{130} \Longleftrightarrow Q \approx 1\,824$$

Este resultado muestra que una política de inventarios de costo mínimo significa mantener 1 824 garrafas semanales con un costo anual de

$$CT(Q) = 0,625\,(1\,824) + \frac{2\,080\,000}{1\,824} = 2\,280,35 \text{ dólares aproximadamente}$$

Una cuestión interesante de hacer notar es que la igualdad entre los costos anual de pedidos (CAP) y de tenencia anual de inventario (CAT) se produce justamente en el valor de Q que minimiza el CT(Q), ésta es una propiedad del modelo CEP. En efecto, haciendo

$$CAT = CAP \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\,Q\,C_h = \frac{D}{Q}\,C_0$$

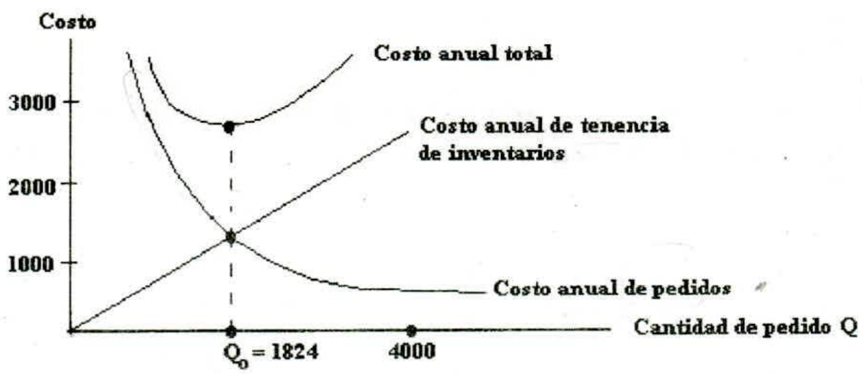
Resulta que

$$\frac{1}{2}\,Q(1,25) = \frac{104\,000}{Q}(20) \Longleftrightarrow Q^2 = 2\,328\,000$$

En consecuencia

$$CAT = CAP = Q \approx 1\,824$$

Figura 4



El gráfico de la figura (4) muestra que la recta $CAT = \frac{1}{2}\,Q\,C_h$ intersecta a la curva $CAP = \frac{D}{Q}\,C_0$ en el punto $Q = 1824$ que es el valor de Q que minimiza a la función $CT(Q)$.

$]0, Q[$, y en consecuencia debe tener un punto de mínimo en dicho intervalo. En efecto, puesto que D, C_0 y Q son mayores que cero, la segunda derivada de esta función es mayor que cero

$$(CT)'' = \frac{2D\,C_0}{Q^3} > 0$$

Podemos obtener directamente una fórmula para determinar la cantidad Q que minimiza el inventario efectuando los cálculos para cualquier D, C_h y C_0. En efecto, derivando $CT(Q)$, igualando a cero esta derivada y despejando Q, resulta:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}}$$

7.2.1.2 Cuándo, y con qué frecuencia, realizar los pedidos en la compañía VinosTacam

Determinada la cantidad Q de garrafas que tenemos que pedir, debemos respondernos, ahora, la pregunta de **cuándo pedir**. Llamaremos **posición de inventario** de un artículo a la cantidad inventarial que se tiene disponible más la cantidad de inventario que se ha pedido.

Cualquier pedido que solicite **VinosTacam**, a los surtidores fabricantes de vino en Chile, tiene una demora de 2 días. Observe que que durante los dos días que se demora el pedido se espera vender 800 garrafas de vino. El tiempo que dicho pedido se demora en llegar se llama **tiempo de adelanto** del pedido, y a las 800 garrafas se le llama **demanda del tiempo de adelanto**. No esacapará al lector, entonces, que **VinosTacam** deberá realizar un pedido a sus fabricantes en Chile cuando el nivel de inventario llegue a las 800 cajas. La decisión de **cuándo pedir** se expresa en términos del **punto de renovación de pedido**, que para los sistemas de tasa constante y tiempo fijo de adelanto, es el mismo que la demanda del tiempo de adelanto. Si denotamos con r el punto de renovación de pedidos, con d la demanda diaria y m el tiempo de adelanto para el nuevo pedido, resulta que el punto de renovación de pedidos es:

$$r = dm \Longleftrightarrow r = 400 \cdot 2 = 800 \text{ garrafas}$$

Lo anterior significa que debemos efectuar un nuevo pedido **cuando** el inventario esté en 800 cajas.

Falta, responder la pregunta de la frecuencia de los pedidos. Si D es la demanda anual del producto y Q la cantidad de pedidos, entonces el número de pedidos que **VinosTacam** debe hacer a los fabricantes en Chile es igual a 57. En efecto:

$$\frac{D}{Q} = \frac{104\,000}{1\,824} = 57$$

Y puesto que el año tiene aproximadamente 250 días hábiles deberán efectuarse los pedidos cada

$$\frac{250}{57} = 4,4 \text{ días}$$

De acuerdo a lo dicho podemos obtener una expresión general para calcular el tiempo del ciclo. En efecto, resulta que

$$T = \frac{250}{\frac{D}{Q}} \Longleftrightarrow T = \frac{250\,Q}{D}$$

El lector habrá observado que una variación en los decimales provoca cambios insignificantes en los resultados, de tal modo que el administrador encargado de tomar las decisiones debe tener en cuenta esta situación. De hecho, una característica del modelo CEP es que es insensible a las pequeñas variaciones en las estimaciones de los costos; de lo cual se desprende que si se tienen estimaciones razonables de éstos pueden lograrse buenas aproximaciones a la verdadera cantidad de pedido y al tiempo de ciclo.

7.3 El modelo determinístico del tamaño económico del lote de producción *

Este modelo, similar al modelo CEP, está diseñado para situaciones de producción. Se intenta determinar también, el **cuánto** del pedido y el **cuándo** tomar la decisión de pedir. Se supone también una tasa constante de demanda, sin embargo, en vez de pedir una cantidad Q de bienes como ocurre en el modelo CEP se considera que se colocan en un inventario, a una tasa constante, las unidades que se producen durante varios días. Así, por ejemplo, si se tiene una linea de producción en la cual se fabrican 200 unidades diarias de un producto y se decide programar 5 días de producción, el tamaño económico del lote de producción es de 1 000 unidades. Si utilizamos Q para representar el tamaño económico del lote de producción, la manera de abordar las decisiones sobre el inventario es similar a la del modelo CEP. Se trata de construir un modelo de **Costos de Tenencia** y **Costos de Pedido** que exprese el costo total como una función del tamaño del lote económico de producción. A continuación hallar el tamaño del lote que minimiza los costos reales que permita determinar el valor del costo total anual de tenencia del inventario.

7.3.1 La determinación del tamaño económico del lote de producción de la compañía envasadora de mariscos, Bahía Blanca

La compañía Bahía Blanca del Puerto de Caldera, que cultiva y procesa mariscos, tiene una capacidad anual de producción de 60,000 frascos de locos. La demanda anual de frascos de locos de sus clientes de Bolivia y Argentina ha sido constante y alcanza a 26 000 frascos por año. Los costos de la preparación de la linea de producción para estas exportaciones, esto es costos por extracción del marisco, acondicionamiento de maquinarias, costos de mano de obra, etc, para cada corrida de producción (que en el caso del modelo CEP corresponden a los costos de los Pedidos), cuesta 135 dólares. El costo por frasco es de 4,50 dólares y su costo anual de tenencia es de 24%. El problema de la compañía es determinar el tamaño económico del lote de producción Q, que minimice el Costo Total de mantención del inventario

Antes de resolver la situación particular de la compañía Bahía Blanca analizaremos el problema desde un punto de vista más general. Digamos antes, que una condición que debe satisfacer el modelo es que la tasa de producción debe ser mayór o igual que la tasa de demanda. Así, por ejemplo, si la tasa de demanda es de 1 200 frascos de locos por semana, **Bahía Blanca** debe producir, a lo menos, esta misma cantidad semanalmente.

El lector observará que, mientras **Bahía Blanca** está en el proceso de producción, esto es, durante la corrida de producción, la demanda provocará una disminución del inventario. Sin embargo como estamos suponiendo que la tasa de producción es superior a la tasa de demanda, el exceso de producción ocasionará un aumento gradual en los inventarios durante el período de producción. Cuando termina la producción, esto es, cuando termina la corrida de producción, la acción continuada de la demanda reducirá gradualmente el inventario hasta que se inicie otro período de producción. El gráfico de la figura (5) muestra este hecho.

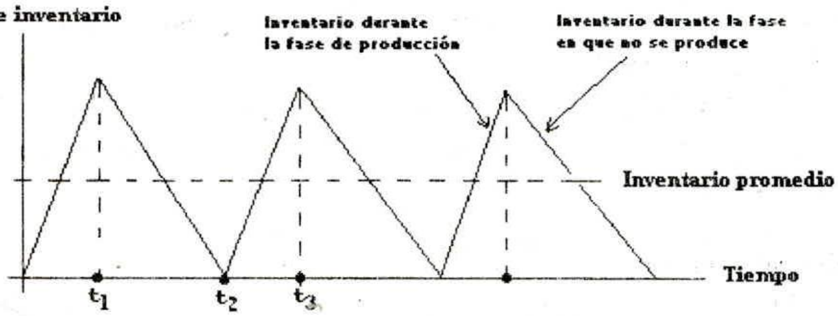


Figura 5

Observe que a medida que transcurre el tiempo el nivel del inventario sube continuamente durante la fase de producción, alcanzando su nivel máximo en el instante t_1. Al cesar la producción el inventario empieza a decrecer hasta el momento t_2, instante en el cual se inicia otra fase de producción que levanta el inventario hasta su máximo nivel en el instante t_3. Este proceso se repite continuamente tal como muestra la figura (5).

Recordemos que los costos del modelo CEP son los de **Tenencia** y de **Pedido**. En el modelo actual los costos de tenencia siguen siendo los mismos, sin embargo los **Costos de Pedido** en un caso de producción serán, ahora, **costos de preparación de la producción**. Este costo, como hemos dicho, incluye los costos de horas de mano de obra, costo de materiales, los costos de preparación del sistema para iniciar las operaciones de producción, etc. Los costos de preparación de la producción son fijos, se presentan en cada corrida productiva y son independientes del tamaño del lote de producción.

En lo que sigue construiremos el modelo del tamaño económico del lote de producción escribiendo el Costo de Tenencia en función del tamaño Q del lote de producción. Tal como lo hicimos con el modelo CEP desarrollaremos una expresión para el inventario promedio y después escribiremos el costo de tenencia anual correspondiente a dicho nivel de inventario.

La figura (5) muestra que el inventario se acumula mediante una tasa constante durante la corrida de producción y se agota con una tasa constante cuando no hay producción (ver las rectas L_1 y L_2 respectivamente), de tal modo que, tal como en el modelo CEP, el inventario promedio podemos tomarlo como la mitad del máximo inventario que se alcanza en un determinado período. Pero, ¿cuál es ese nivel máximo de inventario? Para determinar este nivel máximo debemos buscar una relación entre las tasas de producción y de demanda y el número de días en los cuales ocurre la producción. Denotemos con d, p, t, los siguientes conceptos:

$$\begin{aligned} d &= \text{tasa diaria de demanda del producto} \\ p &= \text{tasa diaria de producción del producto} \\ t &= \text{número de días de una corrida de producción} \end{aligned}$$

Ya que la tasa de producción es mayor que la tasa de demanda, resulta $p - d > 0$. Si diariamente se colocan $p - d$ artículos en el inventario, entonces, durante t días de corrida de producción se colocarán $(p - d)\,t$ artículos. De tal modo que al final de la corrida de producción el **Nivel Máximo** de inventario será:

$$NMI = (p - d)\,t \quad \text{(artículos)}$$

El lector puede observar que este nivel máximo se alcanza al final de la corrida de producción, en los tiempos t_1, t_2, etc. Sin embargo sería conveniente poder expresar el nivel máximo de inventario en función de Q, esto es, en función del lote económico de producción. Si suponemos que se fabrica un lote de producción con un tamaño de Q unidades a una tasa de producción de p unidades diarias, entonces la cantidad Q de unidades producidas en el tiempo de la corrida t de producción será de:

$$Q = p \cdot t$$

En consecuencia la duración de la corrida de producción será de

$$t = \frac{Q}{p} \text{ (días)}$$

De esto se desprende que el nivel máximo de inventario **NM** en función de Q es:

$$NMI = (p - d)\,\frac{Q}{p}$$

o lo que es lo mismo

$$NMI = \left(1 - \frac{d}{p}\right) Q$$

Y, en consecuencia, el nivel promedio del inventario está dado por la expresión:

$$NPI = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d}{p}\right) Q$$

Si el costo de mantener una unidad en inventario durante un año es es igual al costo unitario del artículo en inventario multiplicado por la tasa de costo anual de tenencia, es decir, si $C_h = I\,C$, entonces la ecuación que expresa el costo anual de tenencia es:

$$CAT = (\text{Nivel promedio de inventario}) \cdot (\text{Costo anual de tenencia por unidad})$$

De tal modo que

$$CAT = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d}{p}\right) Q\,C_h$$

Por otra parte, si D es la demanda anual y Q es el tamaño del lote de producción, entonces, $\frac{D}{Q}$ es el número de corridas de producción al año. Y si C_0 es el costo de preparación para una corrida de la producción, entonces el costo anual de preparación CAP, es:

$$CAP = \frac{D}{Q}\,C_0$$

En consecuencia el modelo de **Costo Total** anual, que denotaremos con **CT**, se expresa mediante la ecuación:

$$CT = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d}{p}\right) Q\,C_h + \frac{D}{Q}\,C_0$$

Observemos que en esta expresión la demanda está expresada en función de una tasa diaria de demanda "d", y la producción está expresada en función de una tasa diaria de producción "p", cuando lo ideal sería tener una expresión en función de la demanda y producción anual.

Supongamos que se operan sólamente "a" días al año, si D es la demanda anual, entonces, la demanda diaria "d" es:

$$d = \frac{D}{a}$$

Por otra parte si llamamos P a la producción anual del artículo, entonces:

$$P = a \cdot p, \quad \text{o lo que es lo mismo}, \quad p = \frac{P}{a}$$

El lector puede comprobar fácilmente, reemplazando p y d en la expresión $\frac{d}{p}$ que:

$$\frac{d}{p} = \frac{D}{P}$$

En consecuencia el modelo de Costo Total anual se expresa mediante la ecuación:

$$CT(Q) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right) Q\, C_h + \frac{D}{Q} C_0$$

¿Cuál es el tamaño del lote económico de producción que minimiza el Costo Total anual, la demanda en el tiempo de adelanto, el punto de renovación del pedido y el tiempo de ciclo entre las corridas de producción, de la compañía Bahía Blanca?

Calcularemos la primera y segunda derivada de la función $CT(Q)$ para hallar el valor de Q que minimiza la función de costo total. Igualando a cero la primera derivada tenemos:

$$\frac{d}{dQ}(TC) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{D}{P}\right) C_h - \frac{D}{Q^2} C_0 = 0$$

y despejando Q resulta:

$$Q^2 = \frac{2DC_0}{(1 - \frac{D}{P})C_h} \Longleftrightarrow Q_0 = \sqrt{\frac{2DC_0}{(1 - \frac{D}{P})C_h}}$$

Debemos probar que este valor de Q, que llamaremos Q_0, minimiza la función $CT(Q)$. Se puede ver fácilmente que la segunda derivada de $CT(Q)$ es:

$$\frac{d^2}{dQ^2}(TC) = \frac{2DC_0}{Q^3} > 0, \quad \text{para todo } D, \; C_0 \; y \; Q$$

en consecuencia la función $CT(Q)$ es cóncava hacia arriba en todo su dominio y por lo tanto tiene un mínimo en dicho intervalo. Probaremos ahora que la función $CT(Q)$ tiene un mínimo en Q_0. Aplicando el criterio de la segunda derivada, puesto que $Q_0 > 0$ resulta que

$$\frac{d^2}{dQ_0^2}(TC) = \frac{2DC_0}{Q_0^3} > 0$$

y en consecuencia Q_0 es un punto de mínimo de la función $CT(Q)$. Puesto que la capacidad anual de producción de la compañía Bahía Blanca es de $P = 60\,000$ frascos, la demanda $D = 22\,000$ frascos, la preparación de la linea de producción $C_0 = 135$ dólares, el costo de frabricación $C = 4,5$ dólares, el costo anual de tenencia del inventario por unidad a una tasa de 24% es $C_h = I\,C = 0,24 \cdot 4,5 = 1,08$, resulta que

$$Q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot 26\,000 \cdot 135}{(1 - \frac{26\,000}{60\,000})(1,08)}} = 3\,387 \quad \text{(frascos)}$$

Y el **Costo Total** anual es:

$$CT(3\,387) = \frac{1}{2}(1 - 0,43) \cdot 3\,387 \cdot 1,08 + \frac{26\,000}{3\,387} \cdot 135 \approx 2\,079 \text{ (dólares)}$$

Recordemos, por otra parte, que el tiempo de adelanto en el modelo CEP es el número de días que se demora en llegar el pedido. Pero, en este caso, es el número de días que se demora la preparación de la corrida de producción. Si la empresa programa un **tiempo de adelanto** "m" de una semana para preparar la corrida de producción, podemos calcular la demanda semanal "d" en el tiempo de adelanto. Puesto que el año tiene, aproximadamente, 52 semanas, la demanda semanal será de:

$$d = \frac{26\,000}{52} = 500 \text{ (frascos)}$$

Por lo tanto el **punto de renovación de pedidos** $r = d \cdot m$ es igual a:

$$r = 500 \cdot 1 = 500 \quad \text{(frascos)}$$

Esto significa que se debe iniciar la corrida de producción **cuándo** el inventario esté en 500 frascos. ¿Cada cuántos días deberá deberá iniciarse la corrida de producción?, dicho de otro modo, ¿cuál es el **tiempo de ciclo** entre las corridas de producción? Suponiendo que el año tiene 250 días hábiles, aplicamos la fórmula

$$T = \frac{250}{\frac{D}{Q}} = \frac{250}{\frac{26\,000}{3\,387}} = 33 \quad \text{(días hábiles)}$$

De esto se desprende que se debe planear la corrida de producción de 3 387 frascos cada 33 días hábiles.

7.4 El descuento por cantidades en el modelo de la Cantidad Económica de Pedido. El caso de la compañía importadora de mariscos PiurImport

Con frecuencia los proveedores industriales ofrecen descuentos para motivar a sus clientes a realizar pedidos de gran tamaño. Hemos visto que mantener inventarios de gran magnitud tiene un costo que, sin embargo, podría ser disminuido considerablemente por los descuentos. Al aumentar el inventario aumentan los costos, pero, ¿los descuentos por el pedido mayor, logra disminuir dichos costos? En lo que sigue veremos como podemos utilizar el modelo CEP para enfrentar esta compleja situación.

La compañía chilena **PiurImport** está iniciando operaciones desde HongKong importando **piures** desde Chile. Un estudio de mercado demostró que este molusco tiene gran aceptación en los países asiáticos. Su proveedora desde Chile, la compañía **Bahía Blanca** exportadora de mariscos envasados en frascos, ofrece importantes descuentos por cantidades de pedido. La tabla siguiente muestra la oferta de la compañía envasadora Bahía Blanca a su cliente **PiurImport** (**PI**)

Tipo de descuento	Tamaño del pedido	Porcentaje	Costo unitario
A	desde 0 hasta 999	0%	5,00 dólares
B	desde 1000 hasta 2499	3%	4.85 dólares
C	desde 2500 o mayor	5%	4,75 dólares

No escapará al lector que un descuento de 5% por 2 500 frascos o más, parece tentador, pero, por otra parte, esto significará mayores costos de tenencia en el inventario. Imaginaremos que hemos estudiado el modelo CEP para **PI** y el resultado de los análisis muestran lo siguiente:

Costo anual de tenencia del inventario	20%
Costo por cada pedido	49%
Demanda anual en unidades	5 000

Debemos respondernos, ahora, la pregunta de qué cantidad de pedido debe realizar **PiurImport**. De hecho **PI** tiene la posibilidad de realizar tres pedidos distintos de acuerdo a las posibilidades de descuentos. LLamaremos Q_1, Q_2 y Q_3, a los pedidos con descuentos de categoría A, B y C respectivamente. Recordemos que la fórmula para la Cantidad Económica de Pedido del Modelo CEP es

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}}$$

donde D es la demanda, C_0 es el costo por pedido y $C_h = I \cdot C$ es el costo anual de tenencia por unidad.

Para la categoría de descuento A

$D = 5\,000$ $\qquad Q_1 = \sqrt{\frac{2\,(5\,000)\,(49)}{1}} = 700$

$C_0 = 49$

$C_h = (0,20)(5,00) = 1$

Para la categoría de descuento B

$D = 5\,000$ $\qquad Q_2 = \sqrt{\frac{2\,(5\,000)\,(49)}{0,97}} = 711$

$C_0 = 49$

$C_h = (0,20)(4,85) = 0,97$

Para la categoría de descuento C

$D = 5\,000$ $\qquad Q_1 = \sqrt{\frac{2\,(5\,000)\,(49)}{0,95}} = 718$

$C_0 = 49$

$C_h = (0,20)(4,75) = 0,95$

Observe que ninguna de las cantidades de pedido es del tamaño necesario para aplicarle el descuento correspondiente. Para Q_1, que es mayor que cero y menor que 999, no hay descuento, y Q_1 y Q_2 están lejos de satisfacer las condiciones de tamaño. Cuando esto ocurre, es decir, cuando se tiene una serie de cantidades que no caen dentro de los tamaños para los cuales se hacen descuentos, se recurre a una regla, que no es evidente, pero que es una propiedad del modelo CEP con descuentos: los Q_i que no caen dentro de los descuentos se ajustan hacia arriba hasta la cantidad de pedido más próxima. Si Q_i alcanzó el tamaño conveniente, se ajusta Q_{i+1} hasta el tamaño siguiente, y así sucesivamente. Aplicando esta regla se tiene que: $Q_2 = 711$ se ajusta hasta 1 000; $Q_3 = 718$ se ajusta al tamaño siguiente que es 2 500

Recordemos, por otra parte, que la ecuación de Costo Total, en función de la cantidad de pedido Q, es

$$CT(Q) = \frac{Q}{2}C_h + \frac{D}{Q}C_0$$

Un hecho nuevo, que hasta ahora no habíamos considerado, es el concepto de **C**osto **A**nual de compra del artículo; porque éste era constante y no afectaba las decisiones sobre la política de inventarios y pedidos. Sin embargo vemos que en este modelo el costo total depende no sólo de la cantidad del pedido, sino además, de su correspondiente precio unitario; que varía de acuerdo a la variación de Q. Esto nos obliga a agregar a $CT(Q)$ el costo anual de compra del artículo, que es igual a la Demanda Anual "D", multiplicada por el Costo unitario "C". En consecuencia se tiene que

$$CT(Q) = \frac{Q}{2}C_h + \frac{D}{Q}C_0 + DA$$

Utilizando esta expresión, para cada una de las cantidades de pedido "ajustadas", se puede determinar la cantidad óptima de pedido para el modelo CEP con descuentos. Las siguientes son las ecuaciones que resultan de efectuar los reemplazos:

$$CT(Q_1) = \frac{Q_1}{2} \cdot 1,00 + \frac{5\,000}{Q_1} 49 + 5\,000 \cdot 5,00$$

o lo que es lo mismo:

$$(1) \qquad CT(Q_1) = 0,500\,x + \frac{245\,000}{Q_1} + 25\,000, \quad 0 \leq Q_1 \leq 999$$

$$CT(Q_2) = \frac{Q_1}{2} \cdot 0,97 + \frac{5\,000}{Q_2} 49 + 5\,250 \cdot 4,85$$

o lo que es lo mismo

$$(2) \qquad CT(Q_2) = 0,485\,x + \frac{245\,000}{Q_1} + 24\,250, \quad 1\,000 \leq Q_2 \leq 2\,499$$

$$CT(Q_3) = \frac{Q_1}{2} \cdot 0,95 + \frac{5\,000}{Q_1} 49 + 5\,000 \cdot 4,75$$

o lo que es lo mismo

$$(3) \qquad CT(Q_3) = 0,475\,x + \frac{245\,000}{Q_1} + 23\,750, \quad Q_3 \geq 2\,500$$

Se trata, ahora, de determimar el mínimo de cada una de las funciones (1), (2) y (3), en los intervalos considerados. Un gráfico para cada una de las curvas nos ayudará bastante a resolver el problema.

El gráfico de la figura (6) muestra que el mínimo de la función $CT(Q_1)$ se halla en el punto de extremo donde la pendiente de la recta tangente tiene pendiente cero. En efecto, derivando la función $CT(Q_1)$, y resolviendo la ecuación $[CT(Q_1)]' = 0$, resulta que $Q_1 = 700$

$$[CT(Q_1)]' = 0,5 - \frac{245\,000}{Q_1^2} = 0 \Longleftrightarrow Q_1 = 700$$

Se observa que 700 pertenece al dominio de la función. En consecuencia el Costo Total anual para este valor de Q_1 es $CT(700) = 25\,700$. Por otra parte, se puede ver que que la función $CT(Q_2)$ es creciente en todo su dominio. En efecto:

$$[CT(Q_2)]' = 0,485 - \frac{245\,000}{Q_2^2} > 0, \quad \text{para todo } 1\,000 \leq Q_2 \leq 2\,499$$

Y en consecuencia su mínimo está en el extremo izquierdo del intervalo, esto es, en $Q_2 = 1\,000$ y por lo tanto $CT(1\,000) = 24\,980$

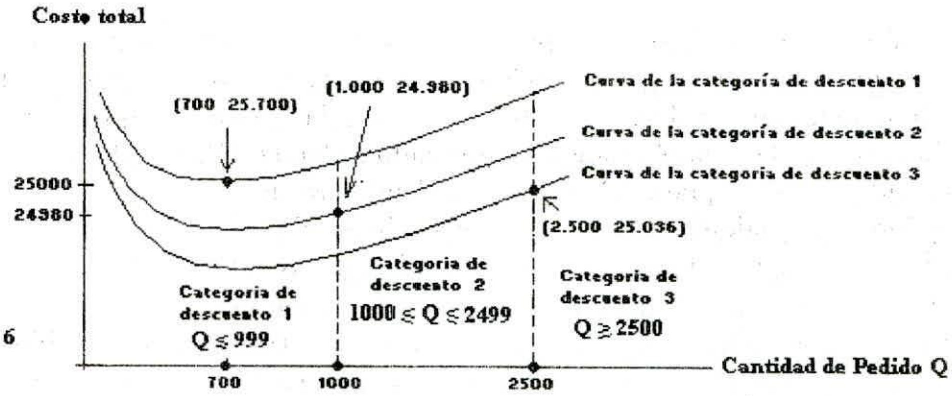


Figura 6

Análogamente, la función $CT(Q_3)$ es creciente en todo su dominio. El lector puede verificar fácilmente que:

$$[CT(Q_3)]' = 0,475 - \frac{245\,000}{Q_3^2} > 0, \quad \text{para todo } \; Q_3 \geq 2\,500$$

Por lo tanto el mínimo de la función en dicho intervalo se halla en el extremo izquierdo del intervalo, es decir, en $Q_3 = 2\,500$ y por lo tanto $CT(2\,500) = 25\,036$.

Al comparar los "tres mínimos" se ve que el Costo Total anual más bajo es de 24 980 dólares y se produce cuando el pedido es de 1 000 frascos. La siguiente tabla resume nuestros cálculos

Descuento	Costo unitario	Cantidad de pedido	Costo Total anual
0%	5,00 dólares	0 700	25 700
3%	4,85 dólares	1 000	24 980
5%	4,75 dólares	2 500	25 036

El lector puede observar que el valor mínimo se obtiene cuando el descuento es de 3% y no de 5%, como podría esperarse. Aunque para **PiurImport** parece atractivo un 5% de descuento, sus Costos Totales aumentarán por tener que mantener un inventario más grande.

7.5 El método "Justo a Tiempo" en la administración de inventarios

Los japoneses [1] se han apoderado de una considerable parte de los mercados mundiales para muchos productos debido a los progresos que han logrado en la manufactura. Entre las razones de esto se halla el sentido nipón de la administración, el desarrollo de nuevas tecnologías y el uso de nuevos métodos de administración y control de materiales. Un nuevo método que ha llamado la atención en los años recientes es lo que se conoce como **Justo a Tiempo** (JAT) o JIT (de just in time).

El método Justo a Tiempo representa una filosofía cuyo objetivo es eliminar todas las fuentes de desperdicio, incluyendo los inventarios innecesarios. El principio fundamanetal del JAT consiste en fabricar las unidades apropiadas, en la cantidad apropiada y en el momento apropiado.. Con el JAT se fabrican unidades sólo cuando se las requiere. Idealmente, el número de partes que se fabrican o se adquieren en cualquier momento debe ser justo el suficiente para fabricar una unidad del producto terminado. No se requieren inventarios o cuando menos se minimizan. Para que el JAT funcione de manera eficaz, deben realizarse cambios fundamentales en los sistemas tradicionales de producción. Tales cambios exigen modificaciones en el diseño de las plantas de producción y del proceso de flujo de materiales debiéndo reducirse, además, los tiempos de preparación.

La distribución deficiente del equipo es una de las principales causas de la ineficiencias en la manufactura . En un entorno fabril o manufacturero estadounidense típico, los materiales se transportan desde el proveedor hasta el almacen, y después a la planta. Dentro de la planta es posible que se transporten de un Departamento a otro. Cuando termina la producción quizás se devuelvan los artículos terminados al almacen, en donde se les guarda hasta su distribución posterior a los clientes. Aún con modelos óptimos de inventarios los costos de manejo de materiales y de inventarios pueden ser considerables. El modelo JAT ayuda a reducir los costos de manejo de materiales y de inventarios al ofrecer un flujo de materias primas y de artículos terminados en el que los materiales se introducen en un extremo del proceso de manufactura, desde donde se trasladan sin demora hasta que se convierten en productos terminados.

La fuerza motríz en que se basa la producción con el JAT es la coordinación de las sucesivas actividades de producción. Un componente clave de esta coordinación es un sistema de información al que se denomina **tarjeta** (Kanban en japonéz). Se anotan en **la tarjeta** el tipo y el número de unidades que se requieren en el proceso de producción, y se utilizan dichas tarjetas para iniciar la extracción y

[1] David R. Anderson at all, Introducción a los métodos cuantitativos para la administración, Grupo Editorial Iberoamericano, México, 1993. (Nota textual pág 516)

la producción de unidades en todo el proceso de producción. Al comenzar con el ensamble final **la tarjeta** "atrae" las partes y componentes desde las estaciones de trabajo precedentes. Así, entonces, la operación completa de manufactura se sincroniza con la etapa final de ensamble. De esta manera el JAT evita que las fuentes previas de abastecimiento y producción "empujen" unidades hacia adelante y que acumulen inventarios innecesarios y excesivos.

Es importante advertir que el concepto de **calidad total** es crucial para la puesta en marcha de la filosofía del JAT. Como los tamaños de los lotes son pequeños y los niveles de inventarios son mínimos, no se mantienen existencias de seguridad para reemplazar unidades defectuosas o unidades que no se ajustan enteramente a las normas o estándares. Cualquier problema en la calidad altera el flujo de materiales en la planta y puede resultar desastroso para el sistema del JAT.

Finalmente, la coordinación del flujo de materiales desde los proveedores hasta el fabricante es otro componente crucial del JAT. La filosofía del método JAT no permite el envío de lotes grandes desde los proveedores que aumentarían innecesariamente los niveles de inventarios y los costos. Para mantener el flujo uniforme que se requiere en el JAT, los proveedores deben realizar entregas **justo a tiempo**. En vez de los envíos grandes que deben contarse, inspeccionarse y almacenarse, los proveedores hacen entregas más pequeñas, en forma diaria, o con una frecuencia aún mayor, para cumplir con el programa diario de producción del fabricante. El JAT requiere de una asociación de confianza entre provedores y fabricantes para obtener los materiales a tiempo con cero defectos.

El beneficio del JAT es un mejoramiento en las utilidades, que se logra debido a reducciones en los costos de los inventarios y a una mejor calidad. En el área de la administración de inventarios, el beneficio más evidente del JAT son los menores niveles de inventarios, la mayor rotación de los mismos y los menores costos globales de tenencia. Aunque estas ventajas son importantes, las diferencias culturales y de conducta entre el pueblo japonéz y el pueblo estadounidense, tanto a nivel de los administradores como al nivel de la fuerza laboral, hacen que resulte poco claro si es posible reproducir el éxito japonéz del JAT en los sistemas estadounidenses de producción. Unas cuantas compañías estadounidenses están intentando aplicar la filosofía del JAT, pero la mayoría sigue utilizando los sistemas tradicionales de manejo o administración de inventarios.

7.6 Ejercicios propuestos

1. Una compañía vende un refresco cuya tasa anual constante de demanda es de 3600 cajas. Cada una de las cajas le cuesta 3 dólares a la compañía. Los costos de pedido son de 20 dólares por pedido, y los costos de tenencia se consideran el 25% de los costos por unidad. Si suponemos que existen 250 días hábiles en el año y el tiempo de adelanto es de 5 días, identifique los siguientes aspectos de la política de inventarios. a) Cantidad económica de pedidos. b) Punto de renovación del pedido. c) Tiempo de ciclo. d) Costo anual total.

2. Una propiedad general del modelo de inventarios de la CEP es que los costos totales de tenencia de inventarios y de los pedidos son iguales en la solución óptima. Utilice los datos del problema anterior para mostrar que en este problema se observa dicho resultado. Utilice también las ecuaciones a) Costo Anual de Tenencia=$\frac{1}{2}QC_h$ b) Costo Anual de Pedidos=$\left(\frac{D}{Q}\right) C_o$ y c) Costo Anual Total=$\frac{1}{2}QC_h + \frac{D}{Q}C_o$ para mostrar que, en general, el Costo Total de Tenencia y el Costo Total de Pedidos son iguales en los casos en los que se utiliza el Q_o que da el mínimo del Costo Anual Total.

3. El punto de renovación de pedidos ($r = dm$) se define como la demanda del artículo en el tiempo de adelanto. En los casos en que se tienen tiempos de adelantos prolongados, la demanda en el tiempo de adelanto, y por ello, el tiempo de renovación, pueden superar a la cantidad económica de pedido Q_0. En tales casos la posición de inventarios no será igual al inventario disponible cuando se coloca un pedido, y el punto de renovación puede ser expresado en términos de la posición de inventario, o alternativamente, en términos de los inventarios disponibles. Considérese el modelo de la cantidad económica de pedido con $D = 5\,000$, $C_0 = 32$ dólares, $C_h = 2$ dólares y 250 días hábiles por años. Identifique el punto de renovación de pedido en términos de la posición de inventarios y en términos del inventario disponible, para cada uno de los siguientes tiempos de adelanto. a) 5 días b) 15 días c) 25 días d) 35 días.

4. **Dante y Compañía** adquiere directamente del proveedor un componente que se utiliza en la fabricación de generadores para automóviles. La operación de producción de los generadores de la compañía, que se da a una tasa constante, requiere de 1 000 componentes al mes, en todo el año (12 000 unidades anuales). Supóngase que el costo de los pedidos es de 25 dólares por cada uno, el costo por unidad es de 2,50 dólares por componente, y que

se cargan los costos anuales de conservación al 20 por ciento. Hay 250 días hábiles por año, y el tiempo de adelanto es de 5 días . Conteste las siguientes preguntas sobre la política de inventarios de **Dante y Compañía**.

a) ¿Cuál es la CEP para este componente?

b) ¿Cuál es el punto de renovación de pedidos?

c) ¿Cuál es el tiempo de ciclo?

d) ¿Cuáles son los costos anuales totales de tenencia y de los pedidos correspondientes a la CEP que se recomienda?

5. Supóngase que los administradores de la empresa **Dante y Compañía** aprueban la eficiencia de la operación que se logra al hacer pedidos en cantidades de 1 000 unidades, haciendo pedidos cada mes. ¿Qué tanto más costosa sería esta política que la recomendada con la CEP? ¿Estaría a favor de recomendar la cantidad de pedido de 1 000 unidades? Explique. ¿Cuál sería el punto de renovación de pedido si la cantidad de 1 000 unidades fuera aceptable?

6. supóngase que es apropiada la siguiente escala de descuentos por cantidades

Tamaño del pedido	Descuento	Costo unitario
0 a 49	0%	30,00 dólares
50 a 99	5%	28,50 dólares
100 o más	10%	27,00 dólares

Si la demanda anual es de 120 unidades, el costo de los pedidos es de 20 dólares y la tasa anual del costo de tenencia es de 25% , ¿qué cantidad de pedido se recomendaría?

7. Aplique el modelo CEP a la siguiente situación de descuento por cantidad

Categoría del descuento	Tamaño del pedido	Descuento	Costo unitario
1	0 a 99	0%	10 dólares
2	100 o más	3%	9,9 dólares

$D = 500$ unidades al año, $C = 40$ dólares, y se da una tasa anual de costo de tenencia de 20%. ¿Qué cantidad de pedido se recomienda?

8. La empresa de zapatos **Calzado Plumita** maneja un tipo de zapatos para caballeros que se vende a una tasa constante de demanda de 500 pares cada tres meses. Su política actual de compras consiste en pedir 500 pares cada vez que se hace un pedido. Si le cuesta 30 dólares colocar un pedido y la tasa anual de costo de tenencia es de 20%, **Calzados Plumita** obtiene el calzado al menor costo posible de 28 dólares el par con su cantidad de pedido de 500. El fabricante le ofrece además los siguientes descuentos por cantidad.

Cantidad de pedido	Precio por par
0 a 99	36 dólares
100 a 199	32 dólares
200 a 299	30 dólares
300 o más	28 dólares

¿Cuál es la cantidad de pedido de costo mínimo? ¿Cuáles son los ahorros anuales de la política de inventarios que se recomienda con respecto a la política que actualmente sigue la empresa?