# El cálculo diferencial y sus aplicaciones

(versión preliminar)

Manuel Barahona Droguett
Universidad de Atacama



Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática y
Ciencias de la Computación.

**Siempre hay más de una forma**
**para realizar la misma tarea**

**B. Barahona. U**

**y más de un camino para llegar**
**al mismo lugar**

**M. Barahona. D**

# Prefacio

A la mayoría de los ingenieros no les agrada la exposición de algunos tópicos de la matemática desarrollada con la perspectiva de un matemático. El estilo con que los matemáticos expresan las ideas matemáticas en cualquier libro de Cálculo está muy influenciado por el desarrollo de la misma matemática en relación con sus fundamentos lógicos. En general, los textos de esta disciplina están imbuidos de conceptos de gran importancia para los matemáticos pero de escaso interés para un ingeniero y la mayoría de las veces contienen desarrollos estrictamente matemáticos que complican de manera innecesaria los conceptos intuitivamente simples. Con frecuencia hemos sido testigos de serias discrepancia entre ingenieros y matemáticos, acerca de cuál debe ser en enfoque de la matemática que los primeros necesitan dominar: a los ingenieros les parece irrelevante la argumentación lógico formal de los conceptos del Cálculo.

En no pocas facultades de ingeniería los cursos básicos que los matemáticos ofrecen a los estudiantes de ingeniería son los mismos que siguen los estudiantes de matemática. Los conceptos del análisis, de la topología y del álgebra, son más familiares para el estudiante de ingeniería que, por ejemplo, el concepto de modelo, concepto central en el trabajo de un ingeniero.

Por otra parte, en la última década hemos visto una lenta evolución en los textos de Cálculo en la dirección de las aplicaciones. Y con la irrupción del computador en la enseñanza de la matemática este pequeño cambio se profundizará rápidamente. En un futuro próximo una gran parte de las matemáticas para los ingenieros se enseñarán con el computador, cuestión que dejará en evidencia más claramente el problema al cual nos referimos. El DERIVE y el MATHEMATICA son dos interesantes software que están siendo experimentados debilmente y que aún no encuentran interlocutores que acumulen y sistematicen experiencia. Cualesquiera de estos software es capaz de calcular derivadas, integrales, ecuaciones diferenciales, graficar curvas, etc, de tal modo que ya no se justifica perder tiempo en explicar tantos métodos de integración, complicar el cálculo de límites y de las derivadas, etc. Nuestros esfuerzos deberían orientarse al estudio de los conceptos centrales del Cálculo y de sus aplicaciones y la operatoria dejársela al computador.

Los dos hechos que transformarán (queramóslo o no) el enfoque de la matemática para los ingenieros son el concepto de modelo y la introducción del computador en la enseñanza de la matemática. El estudiante de ingeniería se verá enfrentado, con mayor frecuencia, a modelar e interpretar fenómenos de ingeniería que no pueden ser resueltos sin el uso del computador. Se plantea así el dilema de orientarlos desde el principio de sus estudios por el camino de las aplicaciones y del uso del computador en la resolución de problemas, o de seguir con el paradigma abstracto de las matemáticas de escaso interés para los ingenieros.

Los profundos cambios que sufrirán el enfoque y los contenidos de los programas de matemática para los ingenieros son inevitables, y el problema será resuelto satisfactoriamente por la próxima generación de matemáticos que deberá enseñar en las universidades. Sin embargo debemos iniciar, desde ahora, aunque sea debilmente, el camino de la renovación.

De acuerdo a lo dicho, la estrategia que seguiremos en este texto es : a) Organizar los contenidos de modo que giren en torno el concepto de **modelo**, b) Evitar las sofisticadas demostraciones dándole mayor importancia al análisis e interpretación de dichos modelos, c) Invitar al lector a resolver ejercicios y problemas utilizando EL DERIVE.

En el capítulo 1 se hace una introducción histórica a los problemas del Cálculo y se estudian los conceptos de velocidad media e intantanea, razón de cambio media e instantanea, pendiente de una recta y algunas aplicaciones que conducen en forma natural al concepto de derivada en el capítulo 2. Los conceptos de límite, continuidad y diferenciabilidad se estudian sólamente en forma intuitiva. En ambos capítulos se sugiere resolver los problemas propuestos utilizando EL DERIVE. Observe el lector que no hemos seguido el itinerario clásico del primer curso de Cálculo, esto es, números reales, límite, continuidad y derivada. No debemos olvidar que el centro de nuestras preocupaciones son, ahora, las aplicaciones.

En el capítulo 3 se demuestran las fórmulas más sencillas de derivación de funciones algebraicas y trascendentes y nuevamente se sugiere al lector verificar los ejercicios utilizando EL DERIVE. En el capítulo 4 los conceptos de primera y segunda derivada, de máximo, mínimo, están orientados más a estudiar modelos que a graficar funciones. Lo mismo ocurre con las funciones paramétricas. Con las herramientas construidas en los primeros cuatro capítulos, en el capítulo 5 se estudian modelos algo más sofisticados en los cuales es necesario comprender el concepto de ecuación diferencial. Finalmente se sugiere resolver los problemas propuestos utilizando EL DERIVE.

**El autor**

# Indice general

## Capítulo 1.

## Los problemas del Cálculo



## Capítulo 2.

## La Derivada.

# Capítulo 3.

# La Diferenciación.



# Capítulo 4.

# La optimización.

# Capítulo 5.

# Las ecuaciones diferenciales como modelos.

# El cálculo diferencial y sus aplicaciones

# Capítulo 1 Los problemas del Cálculo

**Objetivos** .

1. Conocer algunos antecedentes históricos del nacimiento del Cálculo
2. Estudiar los conceptos de velocidad media e instantánea que dieron origen al Cálculo.
3. Estudiar los conceptos de razón de cambio media e instantánea y de pendiente de una recta tangente a una curva.
4. Modelar fenómenos de la naturaleza utilizando los conceptos anteriores.
5. Utilizar EL DERIVE para estudiar, modelar y resolver problemas.

## 1.1 El Cálculo Diferencial e Integral

¿ Qué es el Cálculo Diferencial e Integral y cuando nace esta rama de las matemáticas ?, ¿porqué surge la necesidad de inventar el Cálculo y cuáles son las ideas fundamentales que giran en torno a esta disciplina ?

Desde el punto de vista histórico las primeras ideas en torno al Cálculo nacen de la necesidad de determinar el área de figuras acotadas por lineas curvas y el volumen de sólidos acotados por superficies curvas. Por los documentos que se poseen de las antiguas civilizaciones, sumeria, babilonia y egipcia se sabe que, entre otros grandes inventos matemáticos, lograron determinar con exactitud el área de superficies acotadas por lineas rectas. Sin embargo no pudieron resolver el problema de calcular el área de superficies acotadas por lineas curvas y el volumen de sólidos acotados por superficies curvas. A lo más lograron, por ejemplo, aproximar el área de un círculo mediante un cuadrado y el volumen de un cilindro y de una pirámide aproximadamente. Sin embargo, los grandes monumentos que dejaron estas civi-lizaciones para la posteridad, nos dan cuenta del extraordinario desarrollo de su tecnología de construcción y en consecuencia de su matemática y geometría.

Cuando los antiguos griegos hicieron suyos los conocimientos de estos pueblos, una de sus preocupaciones fue la de resolver el problema de determinar el área de superficies acotadas por lineas curvas. La geometría griega logró increíbles avances en esta dirección. Así, por ejemplo, Arquímedes, mediante sofisticados métodos geométricos halló el área de un segmento de parábola. La Geometría Euclideana, que llegó a ser el paradigma del razonamiento matemático, proporcionó los métodos para esta hazaña.

La observación inmediata del mundo exterior nos muestra que todo lo que en él existe está en constante movimiento, está variando continuamente. Sin embargo los antiguos griegos, que lograron desarrollar una aritmética y geometría extraordinariamente avanzada, no utilizaron el concepto de variable cuando abordaron los problemas que resolvieron. Esto se debió, probablemente, a que la mayoría de los matemáticos y geómetras griegos de esa época, pensaban que la matemática no debía servir para resolver los problemas de la vida real; cuestión que los condujo a considerar los problemas sólo en su aspecto espacial, excluyendo el aspecto temporal; el estudiar determinados problemas de la vida real los hubiera conducido finalmente al concepto de variable. La ausencia del tiempo confiere a la Geometría Euclideana un carácter estático; nada varía en ella. La circunferencia, por ejemplo, **es el conjunto de puntos que está a una misma distancia de otro llamado centro.**

No es casual que en **Los Elementos** de Euclides no aparezca ni un sólo problema de cálculo. La geometría, según los sabios griegos, debía estudiarse para el ejercicio de la razón y el deleite del espíritu. De ahí que los únicos intrumentos que debían usarse en su estudio eran la regla y el compas; los instrumentos de los dioses.

El **Milagro Griego**, como llaman los historiadores al conjunto de conocimientos que éstos aportaron a la humanidad durante casi mil años, no se quedó solamente en la estática geometría euclideana, la aritmética, la astronomía, teatro, poesía, filosofía, etc, sino que además hizo posible que surgiera **Arquímedes (287-212 a.C)**. Este hombre llamado con frecuencia el primer hombre moderno de la antiguedad, fue el precursor de las nociones del Cálculo.

Hemos dicho que la opinión de la mayoría de los filósofos y matemáticos griegos de la época, era que la matemática no debía ser usada para resolver los problemas de la vida real. La matemática práctica, como diríamos hoy, no era efectuada por los matemáticos y geómetras, sino por los carpinteros y agrimensores; oficios mirados peyorativamente por éstos.

Sin embargo, Arquímedes, desafiando abiertamente a sus pares y poniéndose en una situación de crítica, no sólo utilizó la matemática para resolver los problemas de la vida real, desarrollando **la estática** y **la hidrostática** y descubriendo las **leyes de las palancas**, sino que además inventó una serie de artificios mecánicos que aún despiertan nuestra admiración. El genial Arquímedes aplicó con éxito la matemática en la construcción de máquinas de guerra que hicieron posible que Siracusa, su ciudad natal, se defendiera con éxito durante dos años de acoso del ejército romano. Marcelo, el general romano que comandaba las tropas invasoras, sólo pudo tomar Siracusa después de simular que abandonaba la plaza y hacer creer a los siracusanos que había sido derrotado. Cuenta la historia que creyendo los sitiados que Marcelo había abandonado sus propósitos, festejaron la victoria con una borrachera general, dejando sin guardias sus torres de observación. Marcelo, en la obscuridad de la noche, movió sus huestes sigilosamente entrando por los sitios desguarnecidos. La matanza fue general y Arquímides fue muerto por un soldado.

Siempre es difícil saber en que fecha, y en las mentes de que hombres, empiezan a germinar las ideas que resultan ser fundamentales para desarrollar determinadas teorías. Si los conceptos que dieron origen al Cálculo no surgieron de la mente de Arquímedes, existen sobradas evidencias que muestran que él fue quien llegó más lejos en su desarrollo. Los problemas fundamentales del Cálculo que son los de hallar, el área de superficies acotadas por lineas curvas, el volumen de sólidos acotados por superficies curvas y el de la tangente a una curva, fueron propuestos, estudiados y resueltos por éste para casos particulares. Así, por ejemplo, resolvió el problema de trazar una tangente a la llamada **espiral de Arquímedes**, determinó el área de un segmento de parábola y halló los volúmenes del cilindro y de la esfera. Aunque en esta tarea utilizó la estática Geometría Euclideana, más adelante tuvo que poner en evidencia el concepto de variable al intentar calcular el área de un círculo aproximándolo mediante polígonos regulares. En esta tarea logró, también, determinar el número $\pi$ con dos decimales exactos mediante la fracción $\frac{22}{7}$.

Es sabido que para determinar el área de un círculo inscribió una sucesión de polígonos regulares en él, de manera que cuando el número de lados de éstos aumenta, las áreas de los polígonos se aproximan al área de dicho círculo. A Arquímedes le pareció obvio que mientras más polígonos tomara, más cerca estaría del ărea exacta del círculo. Esta idea, fue fundamental en el desarrollo del Cálculo Integral y sería seguida durante casi dos mil años por los matemáticos del futuro.

Cuando Grecia se transformó en una colonia romana en el año 156 antes de Cristo, su cultura terminó por extinguirse. Las colonias de cualquier imperio jamás florecen y los griegos no fueron una excepción. El camino natural que debía seguir el conocimiento griego era el de occidente. Sin embargo, los cristianos, que se habían hecho del poder romano antes de la caída del imperio, decidieron sumergirse para siempre en la noche más larga de todos los tiempos. A instancias de San Agustín, el más renombrado doctor de la iglesia de la época, se olvidaron completamente de la ciencia y de todo lo que fuera curiosidad científica e intelectual. Solamente a partir del siglo XII, es decir, 800 años después, empezaron a despertar de su profundo sueño. Los Europeos jamás imaginaron que los 800 años de oscuridad, que van desde la caída del Imperio Romano, alrededor del siglo IV después de Cristo hasta aproximadamente el siglo XII, tendrían un tan explosivo despertar intelectual en el siglo XV.

El conocimiento desarrollado por los pueblos del Antiguo Oriente y por los griegos, y olvidado por Occidente, fue guardado como un tesoro por los árabes. En el siglo VII Mahoma logró formar un imperio que tuvo vigencia hasta el siglo XV y que logró extenderse hasta España. Los musulmanes fueron los guardianes de la memoria de la humanidad y al mismo tiempo que asimilaron el conocimiento griego e hicieron sus propios aportes, alrededor del siglo XII dejaron caer gota a gota en el universo feudal europeo la sabiduría de los grandes filósofos, matemáticos, astrónomos, escritores, poetas, historiadores y científicos griegos y árabes. Todo este conocimiento, asimilado en corto tiempo por los italianos, franceses alemanes e ingleses, especialmente, terminó por producir la gran explosión intelectual conocida como **El Renacimiento** en Europa.

El surgimiento de las primeras manufacturas en el naciente capitalismo que anticiparon la producción mecanizada, la necesidad de resolver los problemas de la navegación y de la ubicación en alta mar y de otros grandes retos de la época, hicieron necesaria la aparición de otros hombres que retomaran las ideas propuestas por Arquímedes: uno de estos hombres fue **Galileo Galilei (1564-1542)**. Galileo retomó la idea de que la clave que permitiría resolver los enigmas del universo estaba encerrada en la matemática.

Bajo la influencia de Galileo, sus alumnos inmediatos, el creador del barómetro **Evangelista Torricelli (1608-1647)** y el gran geómetra **Buenaventura Cavalieri (1548-1647)** continuando el trabajo de Arquímedes resolvieron varios problemas relacionados directamente con el concepto de integración utilizando métodos muy cercanos a los desarrollados posteriormente por los inventores definitivos del Cálculo. Galileo descubrió la ley de la caída libre de los cuerpos utilizando, sin definirlos, los conceptos de variable y de función; conceptos centrales en el Cálculo

Diferencial e Integral. Toricelli resolvió problemas de velocidad mediante el concepto de tangente a una curva. Sin embargo la herencia de la Geometría Euclideana no permitía desarrollar métodos generales o algoritmos que hiciera posible **calcular sin pensar** como lo hacemos actualmente. El gran matemático y físico **Alfred Whitehead (1861-1947)** expresó una vez que **la civilización avanza ampliando el número de operaciones que podemos efectuar sin pensar en ellas**; debían transcurrir todavía algunos años para pasar a la etapa superior del cálculo moderno.

Entre los precursores del Cálculo se halla **Johannes Kepler (1571-1630)** notable astrónomo y matemático quien descubrió las tres leyes del movimiento planetario. Kepler a quien se debe el primer importante avance en la dirección de Arquímedes inspirándose en una cuestión de caracter práctico resolvió el problema de calcular el volumen de algunos sólidos acotados por superifices curvas. Con motivo de la abundante vendimia que hubo en el año 1662 en Austria, que coincidió con su casamiento en 1614, tuvo que comprar algunos barriles de vino y al verlos se preguntó de lo dificil que sería calcular su volumen. Kepler se interesó por esta cuestión y después de un año, en 1615, publicó un libro llamado **"estereometría de los barriles de vino principalmente austriacos por tener la forma más conveniente"**, donde resuelve un conjunto de problemas sobre la determinación de volúmenes de cuerpos limitados por superficies curvas. En este trabajo Kepler determinó la fórmulas para la determinación de dichos volúmenes que actualmente se calculan mediante el Cálculo Integral. Sin duda para su tiempo, Kepler fue uno de los más grandes maestros de la integración, que en ese entonces no se conocía por tal nombre.

Como vemos el Cálculo Integral tiene muchos antecedentes y su desarrollo es anterior al Cálculo Diferencial; que por motivos didácticos siempre se enseña primero. El Cálculo Diferencial emerge con fuerza cuando por motivos de carácter práctico, empezaron a estudiarse a fondo los problemas que traía consigo el incipiente maquinismo que exigía un conocimiento profundo del movimiento. Esto hizo necesario que algunos físico matemáticos tales como **Gilles Robervall (1602-1675)** se preocuparan de estudiar el concepto de tangente a una curva. En 1669 **Isaac Barrow (1630-1677)**, profesor de Newton en el Trinity College, descubrió que **el problema del área es el inverso del problema de la tangente**. En este momento es cuando **Isaac Newton (1642-1727)** se encuentra con el Cálculo Diferencial e Integral. Tiempo después, Isaac Barrow cede la cátedra de matemáticas al joven profesor Isaac Newton que prometía brillar con luz propia en el firmamento científico. En esta etapa el Cálculo Diferencial e Integral aún no se desprendía de la Geometría Euclideana, de tal modo que el método para determinar la tangente a una curva era difícil y engorroso y sólo un geómetra avezado podía hallarla no después de un largo y complicado trabajo. Sin embargo en esta misma época las ideas infinitesimales habían madurado lo suficiente como para que el joven Newton y **Gottfried Leibniz (1646-1716)** pudieran, por caminos distintos y simultaneos, sistematizarlas y presentarlas tal como se conocemos actualmente.

En realidad la genialidad de Newton y Leibniz estuvo en desvestir el naciente Cálculo estático del ropaje de la Geometría Euclideana, y vestirlo con el **lenguaje de los infinitesimales**. Al transformarse en dinámico el Cálculo geométrico, se hizo apto para estudiar a fondo los fenómenos de la naturaleza.

Las nociones de masa, fuerza y movimiento, extraídas de la experiencia, fueron expresadas en el lenguaje infinitesimal, perfectamente apto para traducir cualquier fenómeno físico al lenguaje de las matemáticas.

A partir de Newton y Leibniz los conceptos de diferenciación e integración se hicieron comunes, y llegaron a ser el estudio favorito de todos los matemáticos de la época. En poco tiempo, el Cálculo Diferencial e Integral se transformó en la herramienta más poderosa que haya inventado el hombre para estudiar nuestro universo cercano.

Actualmente las computadoras pueden realizar todas las operaciones del Cálculo Diferencial e Integral, en las cuales con frecuencia se pierde un precioso tiempo. Si creemos a **Whitehead** debemos aprovechar la tecnología moderna para que las operaciones del Cálculo las efectúen las máquinas, y no pensemos en ellas, tal como no pensamos cuando queremos saber la hora, o cuando multiplicamos o dividimos dos números.

## 1.2 Velocidad media y velocidad instantánea

Hemos dicho que el Cálculo Diferencial está estrechamente ligado a los conceptos físicos de movimiento, velocidad y aceleración, es decir, a los conceptos básicos de la dinámica. De hecho los fundadores del Cálculo Diferencial e Integral no eran sólo matemáticos sino, además, físicos y astrónomos que aplicaban la matemática a los fenómenos de la naturaleza; creían que las fórmulas que expresan dichas leyes no debían deducirse a priori sino de experiencias que se verifican en el universo y que pueden comprobarse en la calle o en un laboratorio. Newton, por ejemplo, terminó de inventar el Cálculo Diferencial para estudiar e interpretar los fenómenos mecánicos, ópticos, astronómicos y de navegación, urgentes de resolver en el naciente capitalismo.

Cuando Newton exponía sus trabajos sobre el Cálculo comenzaba por dos problemas fundamentales del movimiento, a los cuales, según decía, se reducían todos los demás:

a) Si la longitud de la distancia recorrida es dada, se pide hallar la velocidad del movimiento.

b) Si la velocidad del movimiento es dada, se pide hallar la longitud de la distancia recorrida en el tiempo propuesto.

El primero trata del cálculo de la derivada de una función, y el segundo del cálculo de la función dada su derivada, es decir, del cálculo de una integral indefinida. Como veremos más adelante estos dos procesos son mutuamente inversos. En lo que sigue explicaremos el concepto de derivada siguiendo un camino análogo al de Newton, esto es, utilizando los conceptos de distancia recorrida y de velocidad. Veremos que los problemas sobre el movimiento de cuerpos con velocidad constante nos lleva a cálculos aritméticos y algebraicos de relativa simplicidad. Sin embargo, en los movimientos cuya **velocidad varía con el transcurso del tiempo** la situación es algo más complicada. El estudio de ambos movimientos nos conduce a los conceptos físicos de distancia recorrida y velocidad como funciones del tiempo. De tal modo que el movimiento de un cuerpo se puede determinar por la dependencia de la coordenada "s", que expresa la distancia, en función del tiempo "t", es decir, el movimiento se puede caracterizar por la función $s = s(t)$. Esto significa que conociendo la función $s(t)$ se puede hallar la posición del cuerpo en cualquier instante "t". Como hemos dicho en otras oportunidades, una idea clara del movimiento lo ofrece la gráfica de la función $s = s(t)$, donde el eje de las abcisas representa el tiempo y el eje de las ordenadas representa la distancia recorrida. Ver figura (1)

En el **movimiento uniforme**, es decir, en el **movimiento con velocidad constante**, el recorrido s es directamente proporcional al tiempo "t", donde el coeficiente de proporcionalidad es igual a v. [1] Esta idea se aprecia claramente en la fórmula:

$$s = v \cdot t$$

Estamos suponiendo que en el instante $t = 0$, el cuerpo está en la posición 0, esto es, $s(t) = 0 + vt = vt$. Ver figura (2).

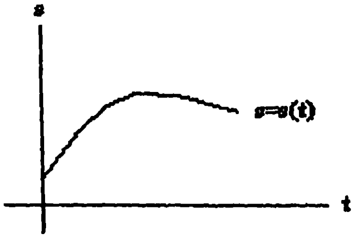



**Figura 1**

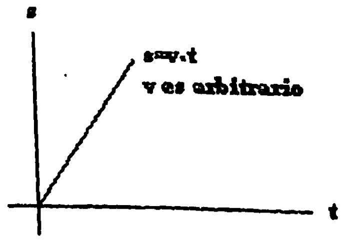



**Figura 2**

En el caso más general del movimiento uniforme la dependencia de la coordenada "s" en función del tiempo "t" se expresa mediante la función lineal

$$s(t) = s_0 + vt, \quad (s_0 \neq 0)$$

La figura (3) muestra una función lineal que modela dicho movimiento.

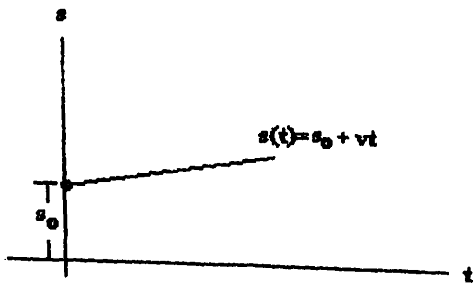



**Figura 3**

Supongamos que la dependencia funcional entre la distancia recorrida por un cuerpo y el tiempo t es dada, es decir, está dada la función $s(t) = s_0 + vt$ y se pide hallar la velocidad del cuerpo. Recordemos que la **velocidad se define como la distancia recorrida por el móvil en la unidad de tiempo**. En este caso, es decir, en el caso del movimiento uniforme, el estudio de la velocidad es bastante simple. Para analizar estas ideas consideremos el siguiente ejemplo.

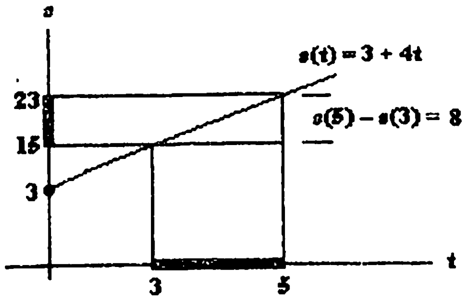
[1] Muchas aplicaciones a las ciencias físicas y sociales hacen uso de una dependencia funcional conocida como **proporcionalidad**, que a menudo puede ser lineal o cuadrática. La siguiente es una definición de proporcionalidad directa. **Definición**. Si dos variables **x** e **y** están relacionadas de forma tal que el cociente $\frac{y}{x}$, llamado la razón de **y** a **x**, es constante, entonces se dice que **y** es **directamente proporcional a x**. Esta relación se puede escribir como $\frac{y}{x} = k$ o bien $y = kx$. Ver páginas 29 y 30 del texto Fundamentos de Matemática.

**Ejemplo 1**

Consideremos un cuerpo que se mueve con movimiento uniforme sobre una linea recta, según la función $s(t) = 3 + 4t$, (s en metros y t en segundos), e intentemos determinar su velocidad.

Hallemos, por ejemplo, la distancia recorrida por el móvil en los momentos $t_1 = 3$ y $t_2 = 5$ segundos. Este recorrido se mide por la diferencia de las ordenadas $s(t_2) - s(t_1)$. La figura (4) muestra esta situación.

Figura 4




De acuerdo a la función $s(t) = 3 + 4t$, el cambio en el espacio recorrido es:

$$s(t_2) - s(t_1) = 3 + 4 \cdot 5 - (3 + 4 \cdot 3) = 3 + 20 - 3 - 12 = 20 - 12 = 8\ m$$

Lo que significa que entre el tercer y quinto segundo el movil ha recorrido 8 metros. En consecuencia su velocidad es media es:

$$v_m = \frac{\text{cambio en distancia}}{\text{cambio en tiempo}} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{20 - 12}{5 - 3} = 4\ [\frac{m}{seg}]$$

Veamos cuál es la velocidad media en otro intervalo arbitrario de tiempo, por ejemplo, entre el quinto y noveno segundos. Para esto suponemos que $t_1 = 5$ y $t_2 = 9$. Efectuando los cálculos resulta:

$$v_m = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{3 + 4 \cdot 9 - (3 + 4 \cdot 5)}{9 - 5} = \frac{36 - 20}{4} = 4\ [\frac{m}{seg}]$$

De hecho, si el móvil está en el punto $s_1$ en el instante $t_1$ y luego en el punto $s_2$ en el instante $t_2$, entonces demoró $t_2 - t_1$ unidades de tiempo en recorrer $s_2 - s_1$ unidades de distancia. Definimos **la velocidad media** del cuerpo en dicho intervalo de tiempo como:

$$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

A pesar de que no sabemos cuál es la velocidad en los instantes comprendidos en cada uno de los intervalos de tiempo los cálculos nos están sugiriendo que la velocidad es constante y que para cualquier intervalo de tiempo $t_2 - t_1$ que consideremos, la respuesta no dependerá ni del momento $t_1$ ni del momento $t_2$, ni de la magnitud del intervalo $t_2 - t_1$ que se ha considerado.

Analicemos ahora una situación más general. Hagamos $t_1 = t$ y $t_2 = t + \Delta t$. La figura (5) muestra dicha situación con una nueva notación.

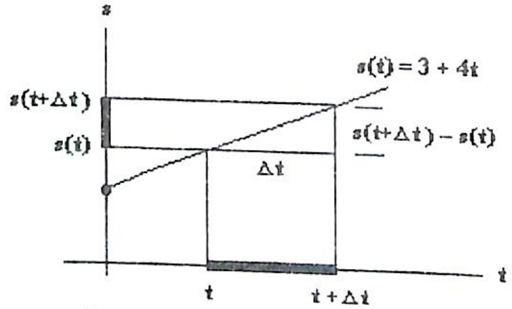



**Figura 5**

Según la figura, el cambio en el recorrido es $s(t+\Delta t) - s(t)$, es decir:

$$s(t+\Delta t) - s(t) = 3 + 4(t+\Delta t) - (3+4t) = 3 + 4t + 4\Delta t - 3 - 4t = 4\Delta t$$

y la variación en el tiempo es $t + \Delta t - t = \Delta t$. En consecuencia la velocidad media es:

$$v_m = \frac{\text{cambio en la distancia}}{\text{cambio en el tiempo}} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{4\Delta t}{\Delta t} = 4\ [\frac{m}{seg}]$$

El lector habrá notado que en cada uno de los casos la velocidad media del móvil ha sido igual a $4\ [\frac{m}{seg}]$; que es igual a la pendiente de la recta $s(t) = 3 + 4t$. Este resultado nos sugiere lo siguiente:

> La velocidad, en cualquier instante, de un cuerpo con movimiento uniforme descrito por la función lineal $s = s_0 + vt$, es igual a la pendiente "v" de la recta.

**Ejemplo 2**.

La velocidad de un móvil, en metros por segundos, con movimiento constante descrito por la función $s(t) = 9 + 7t$ es igual a $7\ [\frac{m}{seg}]$.

En el caso general del movimiento con velocidad variable la cuestión es menos simple ya que la velocidad varía constantemente en cualquier intervalo de tiempo considerado. Un movimiento de tal naturaleza puede ser modelado por una función cuadrática.

Cuando un cuerpo es arrojado en caída libre desde una cierta altura – no es el caso de los ejemplos 1 y 2 – **la velocidad del cuerpo varía gradualmente con el tiempo.** Observará el lector que mientras menor sea el intervalo de tiempo en el transcurso del cual se mide el camino recorrido, tanto menos alcanzará a variar la velocidad en dicho intervalo, y tanto más cerca estará su velocidad media de su **velocidad instantánea.**

La pregunta que trataremos de contestar es, ¿con qué rapidez se está moviendo el cuerpo en un instante determinado ?, es decir, **¿cuál es la velocidad instantánea del cuerpo en movimiento ?**

Recordemos que la ecuación del movimiento para un cuerpo en caída libre está dado por la ecuación:

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

donde **g** es la aceleración de gravedad (aproximadamente $9,8\ \frac{m}{seg^2}$) y **s**, la distancia (en metros) recorrida por el cuerpo desde que comenzó su movimiento. Podemos suponer que dicha ley se expresa mediante la función:

$$s = s(t)$$

y que estamos interesados en saber cuál es la velocidad del cuerpo en un instante **t** cualquiera. Observemos que para dos valores de **t**, digamos $t_1$ y $t_2$ segundos, el desplazamiento del cuerpo será de $s(t_2) - s(t_1)$ metros. Esto significa que si $s = s(t)$ expresa la distancia recorrida por el cuerpo en caida libre, entonces la velocidad media en el intervalo de tiempo $t_2 - t_1$ será igual a la expresión:

$$v_m = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}\ [\frac{m}{seg}]$$

**Ejemplo 3**

Supongamos que la aceleración de gravedad es aproximadamente $10\ [\frac{m}{seg^2}]$. Para un cuerpo en caída libre la ley en cuestión se expresará mediante la función:

$$s(t) = 5t^2$$

En consecuencia la velocidad media entre, por ejemplo, los segundos $t = 1$ y $t = 2$ está dada por la expresión:

$$(i) \quad v_m = \frac{5(2)^2 - 5(1)^2}{2 - 1} = \frac{20 - 5}{1} = \frac{15}{1} = 15\ [\frac{m}{seg}]$$

Si consideramos otro intervalo de tiempo, por ejemplo un intervalo de tiempo más pequeño, veremos que la velocidad no es constante, es decir, es distinta para distintos intervalos de tiempo. En efecto si calculamos la velocidad media entre los segundos $t = 1$ y $t = 1,5$, la velocidad media está dada por la expresión:

$$(ii) \quad v_m = \frac{5(\frac{3}{2})^2 - 5(1)^2}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{\frac{45}{4} - 5}{\frac{1}{2}} = \frac{25}{2} = 12,5\ [\frac{m}{seg}]$$

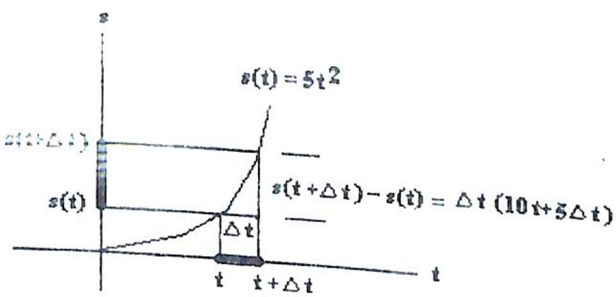
Los cálculos anteriores nos están mostrando que este es un caso de movimiento cuya velocidad varía constantemente.

Supongamos ahora que queremos hallar la velocidad media en un intervalo de tiempo más pequeño aún, por ejemplo, entre 1 y 1,1 segundos. En este caso la velocidad media será igual a:

$$(iii) \quad v_m = \frac{5(1,1)^2 - 5(1)^2}{1,1 - 1} = \frac{6,05 - 5}{0,1} = 10.05\ [\frac{m}{seg}]$$

En una situación más general hagamos $t_1 = t$ y $t_2 = t + \Delta t$. La figura (6) muestra esta situación.

figura 6




Según la figura, el cambio en el recorrido es $s(t + \Delta t) - s(t)$, es decir:

$$s(t + \Delta t) - s(t) = 5(t + \Delta t)^2 - 5t^2 = 5t^2 + 10t\Delta t + 5\overline{\Delta t}^2 - 5t^2 = 10t\Delta t + 5\overline{\Delta t}^2$$

Es decir:

$$s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta t(10t + 5\Delta t)$$

Y la variación en el tiempo t es $(t + \Delta t) - t = \Delta t$. En consecuencia la velocidad media en el intervalo de tiempo $\Delta t$ es igual a:

$$v_m = \frac{\text{cambio en la distancia}}{\text{cambio en el tiempo}} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta t(10t + 5\Delta t)}{\Delta t} = 10t + 5\Delta t$$

La expresión $v_m = 10t + 5\Delta t$, que expresa la velocidad media del móvil en el intervalo de tiempo $\Delta t$, contiene a 10t; término que no depende de la magnitud del intervalo $\Delta t$. Y por otra parte contiene el término $5\Delta t$; que puede llegar a ser tan pequeño como se quiera. De tal modo que si hacemos que $\Delta t$ tienda a cero la velocidad media se transformará en la velocidad instantanea y escribimos:

$$\text{si } \Delta t \longrightarrow 0, \text{ entonces } v_m \longrightarrow 10t$$

En consecuencia la velocidad instantánea del cuerpo en caída libre, en el instante t es igual a:

$$v_{\text{ins}} = 10t$$

Podemos preguntarnos ahora, ¿cuál es la velocidad instantánea del móvil en el momento t=1?

Los cálculos de los puntos (i),(ii) y (iii), nos están sugiriendo que a medida que el intervalo de tiempo $\Delta t$ se hace cada vez más pequeño teniendo como punto fijo $t = 1$, la velocidad media tiende a 10 $[\frac{m}{seg}]$.

Por otra parte observe que la velocidad instantánea $v_i = 10t$ es una función de t y cuanto $t = 1$, resulta que $v_i = 10 \cdot 1 = 10$ $[\frac{m}{seg}]$

Observe que la expresión $v_1(t) = 10t$ nos permite hallar la velocidad instantánea del cuerpo en caída libre para cualquier t. Así, por ejemplo:

$$\text{cuando } t = 2 \text{ la velocidad instantánea es } v_i(2) = 10 \cdot 2 = 20 \; [\frac{m}{seg}]$$

$$\text{cuando } t = 5 \text{ la velocidad instantanea es } v_i(5) = 10 \cdot 5 = 50 \; [\frac{m}{seg}]$$

Decir que la velocidad instantánea de un cuerpo es igual a 10 $[\frac{m}{seg}]$ significa que en cada 1 segundo el móvil recorre 10 metros. Si la velocidad instantánea es de 20 $[\frac{m}{seg}]$ significa que en 1 segundo el movil recorrió 20 metros. En el caso del movimiento en caída libre, la cantidad de metros que recorre el móvil en cada segundo aumenta a medida que transcurre el tiempo.

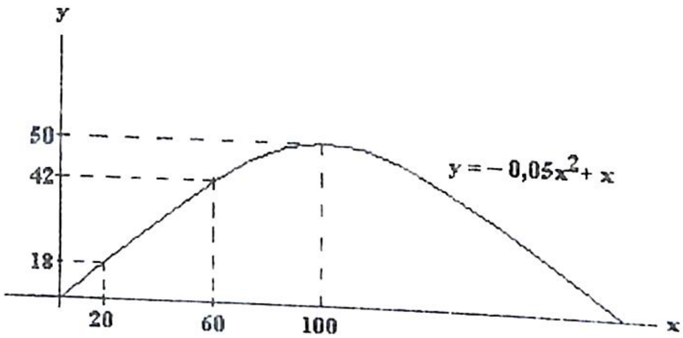
## 1.3 Las razones de cambio media e instantánea

Supongamos que se lanza una pelota al aire con un cierto ángulo y con una velocidad determinada de tal forma que la ecuación de su trayectoria está representada por la ecuación

$$y = -0,005x^2 + x$$

tal como muestra la figura (7). ¿Cuál es la razón de cambio de la altura $y$ de la pelota a medida que crece la distancia horizontal $x$?

Figura 7




Aclaremos que a la expresión $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ se le llama también **razón media de cambio de y con respecto a x.** Y conforme el intervalo $\Delta x$ tiende a cero, la razón media de cambio se llama **razón instantánea de cambio de y con respecto a x**

La figura muestra que en $x = 20$ la altura $y = 18$, mientras que en $x = 60$, la altura de la pelota es $y = 42$. Podemos concluir que la razón media de cambio o **cociente de incrementos** de $y$ al pasar x de 20 a 60 es:

$$\frac{\text{cambio en y}}{\text{cambio en x}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{42-18}{60-20} = 0,6$$

En el intervalo de x=60 a x=100, la razón media de cambio o el cociente de incrementos es igual a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{50-42}{100-60} = 0,2$$

Puesto que la función $y = -0,005x^2 + x$ es una función cuadrática la razón media de cambio varía a medida que varían los intervalos considerados en el eje X. De tal modo que no debe extrañarnos los resultados obtenidos en ambos cálculos.

Ahora nos interesa saber a que razón está creciendo la variable **y** por cada unidad de incremento en la variable $x$, es decir, cuál es la razón de cambio instantánea de **y** respecto de **x**.

Para responder esta pregunta calculamos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{-0,005(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) + 0,005x^2 - x}{\Delta x}$$

es decir, $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0,005x^2 - 0,01x\Delta x - 0,005\overline{\Delta x}^2 + x + \Delta x + 0,005x^2 - x}{\Delta x}$$

$$\text{por lo tanto} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0,01x\Delta x + \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(-0,01x + 1)}{\Delta x}$$

Simplicando la expresión por $\Delta x$ resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -0,01x + 1$$

Si hacemos que $\Delta x \longrightarrow 0$, entonces $\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow -0,01x + 1$.
En consecuencia la razón instantánea de cambio es $r_i = -0,01x + 1$.

Podemos preguntarnos ahora, cuál es la razón instantánea de cambio de y con respecto a x, en x=20. Puesto que $r_i$ es una función de x, resulta:

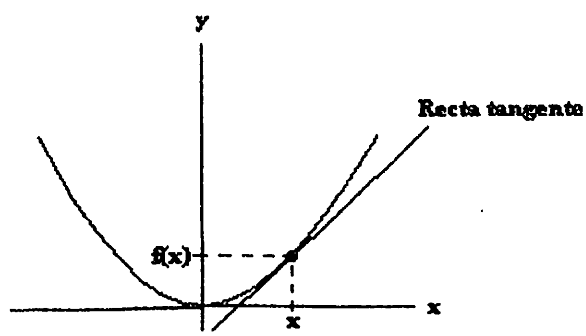
$$r_i(20) = -0,01 \cdot 20 + 1 = -0,2 + 1 = 0,8$$

Lo que significa que, en $x = 20$, por cada metro que la pelota se desplaza horizontalmente, la pelota incrementa su altura en 0,8 metros.

## 1.4 La pendiente de la recta tangente

¿ Cómo hallar la pendiente de una recta que es tangente a una curva en un punto dado, tal como lo ilustra la figura (8) ?

Figura 8



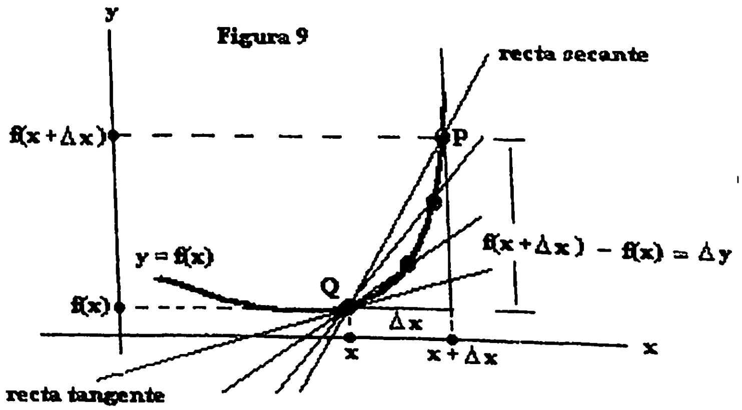

Hemos visto que la pendiente de una recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $P(x_2, y_2)$ viene dada por la expresión:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Desgraciadamente no es suficiente conocer el punto $(x, f(x))$ en la recta tangente para determinar su pendiente. En consecuencia el cálculo directo de dicha pendiente es imposible. La estrategia que seguiremos es aproximar la tangente por otras rectas cuyas pendientes puedan ser calculadas directamente. Consideremos los puntos P y Q sobre la curva y tracemos la recta secante que pasa por dichos puntos. Si hacemos que el punto P se mueva sobre la curva hacia Q las rectas secantes que se forman serán buenas aproximaciones a la tangente en la medida que P esté muy próximo a Q.

Podemos hacer la pendiente de la secante tan próxima como queramos a la pendiente de la tangente, eligiendo el punto P suficientemente cerca del punto Q. El cálculo de la pendiente de las secantes se realiza en la forma que muestra la figura (9)

$$m_{\text{sec}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$




Es claro que el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ no es la pendiente de la tangente sino sólo una aproximación de ella. Sin embargo cuando el punto P se aproxima al punto Q, el valor de $\Delta x$ se hace muy pequeño y la pendiente de la recta secante a aproxima a la pendiente de la recta tangente. De hecho la pendiente de la tangente es el número al que este cociente se aproxima cuando $\Delta x$ tiende a cero.

**Ejemplo 4**

Halle la ecuación de la recta tangente a a la curva $y = x^2$ en el punto $Q(2,4)$.

**Solución.** La figura (10) muestra la gráfica de la curva $y = x^2$ y los puntos P y $Q(2,4)$ sobre ella. Debemos determinar, en primer lugar, la pendiente de la recta secante PQ. En efecto:

$$m_{\text{sec}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}$$

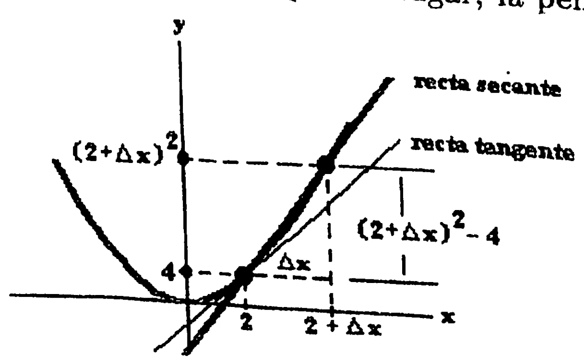



Figura 10

Desarrollando el numerador del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, resulta:

$$m_{\sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 + 4\Delta x + \overline{\Delta x}^2 - 4}{\Delta x} = \frac{4\Delta x + \overline{\Delta x}^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(4 + \Delta x)}{\Delta x}$$

Simplificando por $\Delta x$ resulta que:

$$m_{\sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

. Si hacemos que $\Delta x \longrightarrow 0$ resultará que la pendiente de la secante tiende a la pendiente de la tangente, que es igual a 4. En consecuencia la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto $Q(2,4)$ tiene pendiente $m = 4$. Y la ecuación de la recta es

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Longleftrightarrow y - 4 = 4(x - 2) \Longleftrightarrow y = 4x - 4$$

# 1.5 Algunas aplicaciones.

## 1.5.1 La capacidad calórica de un cuerpo.

La capacidad calórica de una sustancia es la cantidad de calor, medida en Julios, necesaria para calentar 1 kg de dicha sustancia en 1 grado celsius. Esto sugiere que sustancias distintas tienen una capacidad calórica diferente. Por otra parte, en una misma sustancia, para diferentes temperaturas iniciales, cuando se requiere calentar 1 kg de ella en 1 grado celsius, se requiere diferente cantidad de calor. Esto nos está diciendo que la capacidad calórica $c$ de una sustancia es una función de **la temperatura inicial T**; escribimos entonces que $c = c(T)$.

Por ejemplo, para calentar un kg de hierro, con temperatura inicial $0^0$ celsius, en $1^0$ celsius, son necesarios 449,857 Julios de calor. Y para aumentar en 1 grado celsius la misma cantidad de hierro con una temperatura inicial de $50^0$ celsius son necesarios 470,583 Julios. Estos dos casos nos están sugiriendo que a medida que la temperatura inicial aumenta, la cantidad de julios necesarios para calentar 1 kg de hierro aumenta. ¿Cómo determinar entonces la capacidad calórica de un cuerpo a una temperatura dada? Si suponemos que **Q** es la cantidad de calor (en Julios) que es necesario trasmitir a 1 kg de una sustancia para su calentamiento, desde cualquiera temeperatura inicial T, es claro que esta magnitud depende de T; por lo tanto podemos escribir que $Q = Q(T)$.

Para calentar un cuerpo desde la temperatura inicial T hasta la temperatura $(T + \Delta T)$ grados celsius, se necesitará $\Delta Q = Q(T + \Delta T) - Q(T)$ cantidad de calor.

Con ayuda de la figura (11) podemos visualizar la definición de capacidad calórica media.

$$c_m = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{Q(T+\Delta T)-Q(T)}{\Delta T}$$

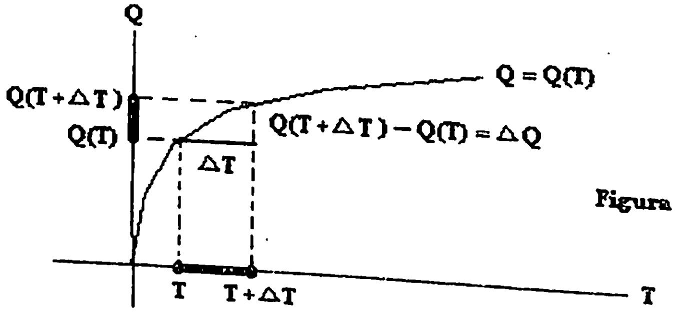



Figura 11

¿Cuál será la capacidad calórica instantanea?. En este caso la capacidad calórica instantanea se refiere no a un determinado tiempo sino a una temperatura T fija de calor. De tal modo que la capacidad calórica instantanea $c_i$ se define como el valor $c_m$ correspondiente a un incremento $\Delta T$ muy pequeño de temperatura; el valor de $c_i$ así obtenido será más exacto cuanto más pequeño sea $\Delta T$. Se advierte que en la gran mayoría de los casos el valor $\Delta T = 1^0$ ya es bastante pequeño para la determinación de $c_i$.

**Ejemplo 5**

La cantidad de calor necesaria para calentar un kg de hierro de $0^0$ celsius a $T^0$ celsius está determinada empiricamente por la expresión

$$Q(T) = 440,857T + 0,29725T^2 \quad \text{para} \quad 0^0 \leq T \leq 200^0$$

Determinar la capacidad calórica instantanea para $T = 0^0$ y $T = 100^0$.

**Solución.** Calculemos en primer lugar la capacidad calórica media. En efecto:

$$c_m = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{Q(T+\Delta T) - Q(T)}{\Delta T}$$

es decir:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{440,857(T+\Delta T) + 0,29725(T+\Delta T)^2 - 440,847T - 0,29725T^2}{\Delta T}$$

Desarrollando el producto y cuadrado de un binomio y sumando términos semejantes resulta:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{440,857\Delta T + 0,5945T\Delta T + 0,29725\overline{\Delta T}^2}{\Delta T}$$

Factorizando por $\Delta T$ se obtiene:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta T}=\frac{\Delta T(440,857+0,5945T+0,29725\overline{\Delta T}}{\Delta T}$$

Simplificando por $\Delta T$ resulta que la capacidad calórica media es:

$$c_m = 440,857+0,5945T+0,29725\Delta T$$

En consecuencia si $\Delta T \longrightarrow 0$, resulta:

$$c_i = 440,857+0,5945T$$

Estamos en condiciones de hallar la capacidad calórica instantanea para las temperaturas de $0^0$ y $100^0$. En efecto, para $0^0$ se tiene:

$$c_i(0) = 440,857 \quad [\frac{\text{Julios}}{\text{kg grado}}]$$

lo que significa que para aumentar la temperatura de un 1 kg de hierro a $0^0$ en un grado celsius se necesita una cantidad de calor equivalente a $440,857\ [\frac{\text{julios}}{\text{kg grado}}]$

Finalmente la capacidad calórica instantanea para $100^0$ es:

$$c_i(100) = 440,857+0,5945\cdot 100 = 500,357 \quad [frac\text{Julioskg grado}]$$

Lo que significa que para aumentar en $1^0$ celsius la temperatura de 1 kg de hierro a $100^0$ celsius, se necesita una cantidad de calor equivalente a $500,357\ [\frac{\text{julios}}{\text{kg grado}}]$

## 1.5.2 Crecimiento o decrecimiento de una población.

Cuando una población crece (o decrece) resulta de interés práctico estudiar la razón de cambio del crecimiento (o decrecimiento) de dicha población respecto al tiempo. Si la función de población $N(t)$ tiene como variable al tiempo "t", el cambio en $N(t)$ desde el tiempo "t" hasta al tiempo $t+\Delta t$ se llama incremento de la función. Y la razón promedio de cambio de $N(t)$, por unidad de tiempo "t", en el intervalo $[t, t+\Delta t]$ se escribe tal como muestra la expresión y se interpreta según la figura (12).

$$\frac{\Delta N}{\Delta t}=\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$$

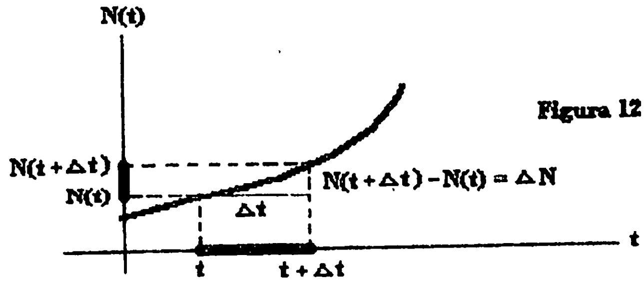



Figura 12

Observe que si $N(t)$ modela el crecimiento de una población en el tiempo "t" entonces la diferencia $N(t+\Delta t) - N(t)$ expresa el crecimiento de la población en el intervalo de tiempo $[t, t+\Delta t]$.

**Ejemplo 6**.

La función $N(t)$ descrita mediante la tabla:

| $t$ | $N(t)$ |
|---|---|
| 5 | 12 |
| 10 | 32 |
| 15 | 67 |

muestra el crecimiento, cada 5 meses, de una cierta población de insectos. (t en meses y $N(t)$ en miles). Hallar la razón promedio de cambio de la población en cada uno de los intervalos de tiempo.

**Solución.** En el intervalo [5, 10], se tiene que $\Delta t = 10 - 5 = 5$, por lo tanto la razón promedio de cambio por unidad de tiempo "t" es:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{32-12}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

Esto significa que la población creció cada mes, en promedio, en 4 000 insectos, en dicho intervalo de tiempo.

En el intervalo de tiempo [10, 15] se tiene que $\Delta t = 15 - 10 = 5$, por lo tanto la razón promedio de cambio por unidad de tiempo es:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{67-32}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

Lo que significa que la población creció en promedio 7 000 insectos por mes, en dicho intervalo de tiempo.

**Ejemplo 7**

Una colonia de bacterias crece según el modelo $N(t) = 1\,000(1 + 0,3t + t^2)$ donde $N(t)$ está dado en miles y "t" en minutos.

a) ¿En cuántas bacterias aumentó la población en los primeros 5 minutos?

b) ¿Cuál es la razón instantanea de crecimiento de la población a los 5 minutos?.

**Solución.** a) Para saber en cuantas bacterias creció la población en los primeros 5 minutos debemos calcular $N(5) - N(0)$. Resulta entonces que:

$$N(5) - N(0) = 1000(1 + 0,3 \cdot 5 + 5^2) - 1000(1 + 0,3 \cdot 0 + 0^2) = 26\,500$$

Esto significa que la población creció en 26 500 000 millones de insectos en los primeros 5 minutos.

b) Para calcular la razón instantánea de crecimiento debemos determinar, en primer lugar, la razón promedio de crecimiento: $\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}$. En efecto:

$$i) \quad \Delta N(t) = 1000[1 + 0,3(t + \Delta t) + (t + \Delta t)^2] - 1000(1 + 0,3t + t^2)$$

Efectuando los cálculos que se indican y sumando términos semejantes se obtiene que:

$$\Delta N(t) = 300\Delta t + 2\,000t\Delta t + 1\,000\overline{\Delta t}^2 = \Delta t(300 + 2\,000t + 1\,000\Delta t$$

En consecuencia:

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \frac{(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta t(300 + 2\,000t + 1\,000\Delta t}{\Delta t}$$

Simplificando por $\Delta t$ resulta:

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = \frac{(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = 300 + 2\,000t + 1\,000\Delta t$$

Si $\Delta t \longrightarrow 0$, entonces, la razón instantánea de crecimiento es:

$$r_i = 300 + 2\,000t$$

Luego la razón instantánea de crecimiento en el quinto minuto es:

$$r_i(5) = 300 + 2\,000 \cdot 5 = 300 + 10\,000 = 10\,300$$

Lo que significa que de mantenerse el ritmo de crecimiento de la población, de ese minuto, ésta se incrementará, aproximadamente, en 10 300 000 insectos, en cada minuto, a partir del quinto minuto.

Observemos que en el quinto minuto hay $N(5) = 1\,000(1 + 0,3 \cdot 5 + 25) = 27\,500$ (miles) de insectos. Es decir en el quinto minuto hay 27 500 000 insectos y en el transcurso de de ese mismo minuto la población se incrementó en

10 300 000 individuos. Esto significa que en el sexto minuto habrá *aproximadamente* 27 500 000 + 10 300 000 = 37 800 000 insectos. En cambio la cantidad real de insectos que habrán en el sexto minuto es igual a $N(6) = 1\,000(1 + 0,3 \cdot 6 + 36) =$ 38 800 000

Por otra parte, es claro que el ritmo de crecimiento de la población no es uniforme, ya que dicho crecimiento se expresa mediante una parábola. Entonces, ¿ cómo es que podemos asegurar que la población se incrementará, aproximadamente, en 10 300 000 insectos en el siguiente minuto?

Lo que ocurre es que cuando agregamos la frase "de mantenerse el ritmo de crecimiento en ese punto" estamos "reemplazando" la función $N(t) = 1\,000(1 + 0,3t + t^2)$ por la función lineal $y = 10\,300\,x - 24\,000$, de pendiente $m = r_i = 10\,300$ y que pasa por el punto $P(5, 27\,500)$ (en miles). En efecto:

$$y - 27\,500 = 10\,300(x - 5) \Longleftrightarrow y = 10\,300\,x - 24\,000 \text{ (en miles)} \qquad (1)$$

Suponiendo que el ritmo de crecimiento de la población fuese modelado por la ecuación (1) el incremento de la población entre el quinto y el sexto minuto será igual a:

$$y(6) - y(5) = 37\,800 - 27\,500 = 10\,300 \text{ (en miles)}$$

que es igual a $r_i(5)$ (razón instantanea de crecimiento en el quinto minuto), que es 1 000 000 menos de insectos de incremento real. En efecto, el incremento real es igual a:

$$N(6) - N(5) = 11\,300 \text{ (en miles)}.$$

Es decir 11 300 000 de insectos. Sin embargo la razón instantanea de crecimiento, con frecuencia, resulta ser una buena aproximación del incremento de la población en una determinada unidad de tiempo.

# 1.6 Ejercicios propuestos

1. En los siguientes ejercicios hallar el cociente de incrementos, entre los puntos dados, de cada una de las funciones que se indican: a) $f(t) = 2t + 7$ y $P(1, 9)$; $Q(2, 11)$. b) $f(t) = \frac{1}{t+1}$ y $P(0, 1)$; $Q(3, \frac{1}{4})$ c) $h(t) = \sqrt{t^2 - 1}$ y $P(1, 0)$; $Q(3, 2\sqrt{2})$.

2. Considere las funciones: a) $f(x) = x^2 + 3x$ b) $h(x) = \frac{1}{x-2}$ c) $f(x) = \frac{x}{2} - 2x - 1$ y exprese en la forma más simple posible el cociente

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

3. Se lanza una pelota que sigue la trayectoria descrita por $y = x - 0,02x^2$. a) representar la gráfica de la trayectoria. b) Hallar la distancia horizontal total que alcanza la pelota. c) ¿Para qué valor de x alcanza la pelota su mayor altura?. d) Hallar la ecuación que expresa la razón de cambio instantánea de la altura de la pelota respecto al cambio horizontal. e) ¿Cuál es la razón instantanea de cambio de la altura del proyectil respecto de la distancia horizontal, cuando eśte se encuentra en su máxima altura?

4. La distancia en metros, de un cuerpo en caída libre, está dada por la función $s(t) = 16t^2$. a) Determinar la velocidad media del cuerpo en el intervalo $[t, t + \Delta t]$. b) Hallar la velocidad media del cuerpo en el intervalo $[10, 11]$ segundos. c) Determinar la velocidad instantánea del cuerpo al final de "t" segundos (en el instante t) y en el octavo segundo.

5. Se dan las siguientes funciones de posición del movimiento de un movil: a) $s = 100 - t^2$ b) $s = -16t^2 + 13$ c) $5t^2 - 50$. ¿Cuál es la posición del móvil en el instante $t = 0$?

6. Se da la temperatura celsius C en función de la temperatura Farenheit F mediante la fórmula:
$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$
Encontrar la razón de cambio de C con respecto a F y la razón de cambio de F con respecto a C.

7. Encontrar la razón de cambio del área A de un círculo con respecto a la longitud de su circunferencia C.

8. A un tambor que contiene 100 litros de agua se le abre una gotera en el tiempo $t = 0$, el volumen de agua del tambor, t segundos después (en el instante t) es de
$$V = (1 - \frac{t}{100})^2$$
a) ¿A qué razón escapa el agua de la cubeta después del primer minuto?. b) ¿En qué instante la razón instantánea de cambio es igual a la razón promedio de cambio de V entre $t = 0$ y $t = 100$ segundos?

9. Cierta población de roedores asciende a:
$$N(t) = 100[1 + (0,30)t + (0,04)t^2] \quad \text{(después de t meses)}$$
¿Cuánto tardará esta población en duplicar su tamaño.

10. Para el diamante, la cantidad $Q(t)$ de calor (medido en Julios) necesarios para calentar 1 kg de sustancia de $0^0$ a $T^0$ celsius, donde $0 \leq T \leq 700^0$ grados celsius se expresa mediante la fórmula:

$$Q(T) = 0,3965T + 2,081 \cdot 10^{-3}T^2 - 5,024 \cdot 10^{-7}T^3$$

a) Hallar la capacidad calórica media del diamante en el intervalo $[t, t + \Delta t]$ y la capacidad calórica instantánea $C_i = c(T)$. b) Calcular $c_i(0)$ y $c_i(100)$ e interpretar los resultados.

11. La cantidad de calor $Q(t)$ necesaria para aumentar la temperatura de 1 kg de agua, de $0^0$ celcius a $T^0$ celsius, se expresa mediante la fórmula

$$Q(T) = 4186,68T + 8373,36 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 + 1256 \cdot 10^{-6}T^3$$

Determinar $c_i(T)$ para $T = 10^0$ celcius.

12. Para el movimiento de un punto material M a lo largo de una recta se observó la siguiente dependencia del camino recorrido z en función del tiempo "t": a) $z = t^3 + 1$ b) $z = \frac{1}{t^2+1}$. Hallar la velocidad media y la velocidad instantanea en el momento t, en ambos casos.

13. Se estima que dentro de t meses la población de una ciertas comunidad será de $N(t) = t^2 + 20t + 8000$ personas. a) ¿A qué ritmo cambiará la población dentro de 15 meses ? (en t=15). b) ¿Cuánto cambiará realmente, la población, durante el décimo sexto mes ? (en el décimo sexto mes)

14. Se estima que dentro de t años la tirada de un periódico local será de $c(t) = 100t^2 + 400t + 5000$ periódicos. a) Obtener una expresión para el ritmo al que estará cambiando la tirada dentro de t años. (en el instante t) b) ¿ A qué ritmo estará cambiando la tirada dentro de 5 años?. c) ¿Estará creciendo o decreciendo el tiraje?. c) ¿En cuánto cambiará, realmente, el tiraje, durante el sexto año ? (en el sexto año)

15. Un objeto se mueve sobre una linea recta de forma que después de t minutos su distancia a un punto fijo de referencia es de:

$$D(t) = 10t + \frac{5}{t+1} \text{ metros}$$

a) ¿A qué velocidad se está moviendo el objeto después de 4 minutos ?. (en el instante t=4). b) ¿Cuánto se desplaza realmente durante el quinto minuto?

# 1.7 El DERIVE

Al ejecutar EL DERIVE la pantalla aparece dividida en dos partes. La parte superior, en la cual se leen las especificaciones relativas al programa y la parte inferior en la cual se lee lo siguiente:

| |
|---|
| **Command:** Author, Build, Calculus, Declare, Expand, Factor, Help, Jump, Solve, Manage, Options, Plot, Jump, Remove, Simplify, Transfer, move, Window, Approx. |

Con la barra espaciadora usted puede mover el cursor sobre cada una de las funciones que aparecen a la derecha de **Command**. Para ejecutarlas, después que el cursor este sobre la función elejida, es suficiente presionar la tecla **Enter**.

**Ejemplo 8**

Dada la función $N(t) = t^2 - 3$, calcular $N(4) - N(3)$

1. En **Command :** ponga el cursor en **Author** y presione la tecla Enter.
2. Aparece **Author expression:** Escriba $N(t) := t^2 - 3$ y presione la tecla Enter. En la parte superior aparece $N(t) := t^2 - 3$ y en la inferior aparece Command. En Author presione la tecla Enter.
3. Aparece **Author expression:** Escriba $N(3)-N(3)$ y presione la tecla Enter.
4. En la parte superior aparece $N(4)-N(3)$. En la parte inferior, en Command, presione la tecla **Simplify**.
5. En la parte superior aparece 7, que es el valor buscado.

Para calcular expresiones como $\frac{N(x)-N(y)}{x-y}$ se debe escribir:

$$((N(x) - N(y))/(x - y)$$

## Utilice EL DERIVE para resolver los ejercicios propuestos 1.6.[1]

[1] Para prácticar los comandos usted debe consultar los apuntes "Comandos Utilitarios DERIVE" preparado por el ayudante Manuel monasterio y, además, el manual de ejercicios para práctica de DERIVE del profesor. Julio Mena.

# Capítulo 2 La derivada

**Objetivos**

1. Estudiar el concepto de derivada de una función.
2. Estudiar el concepto de límite y sus propiedades.
3. Estudiar los conceptos de continuidad, discontinuidad y diferenciabilidad.
4. Utilizar EL DERIVE para analizar la continuidad, discontinuidad y límite de una función.

## 2.1 La derivada de una función.

En los ejemplos de las páginas precedentes hemos visto que la velocidad media se describe mediante la expresión

$$v_m = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

donde $s(t)$ es la función posición de un cuerpo que se halla en movimiento. Y si en esta expresión hacemos que $\Delta t$ tienda a cero, entonces, se obtiene la velocidad instantanea de dicho cuerpo. En lo que sigue escribiremos este hecho en la forma siguiente:

$$\lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = v(t)$$

La velocidad instantanea $v(t)$, así obtenida, es una función de "t" que en adelante llamaremos también **la derivada de la función s** y que escribiremos $s'(t)$. Para la derivada hay también otras notaciones

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

donde la magnitud $\frac{ds}{dt}$ se lee "de s a de t" y se analiza no como una fracción, sino como una notación abreviada del límite de la derecha. De tal modo que la derivada de la función s, con respecto a la variable t, podemos escribirla de las siguientes formas

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

> La derivada de una función $f$ es otra función $f'$ cuyo valor para un número cualquiera $c$ es:
>
> $$f'(c) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{f(c+\Delta t) - f(c)}{\Delta t}$$
>
> siempre que el límite exista

Si la función la denotamos por f y la variable independiente es x, **la derivada** $f'(x)$ expresa también la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ como una función de la coordenada x del punto de tangencia.

**¿Cómo calcular la derivada de una función cualquiera ?.** Para calcular la derivada de una función hemos seguido los siguientes pasos:

**paso 1)** Se forma el cociente de incrementos (la pendiente de una secante):

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

**paso 2)** Se simplifica algebraicamente el cociente de incrementos

**Paso 3)** En el cociente de incrementos del paso 2 se calcula $\lim_{\Delta x \to 0}$. La expresión resultante es la derivada $f'(x)$, esto es:

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

**Ejemplo 1**

Halle la ecuación de la recta que es tangente a la curva $y = \frac{1}{x}$, en el punto $x = 2$.

SOLUCIÓN. Para hallar la ecuación de una recta se necesita conocer, un punto y la pendiente. Puesto que el punto es dado, falta sólo determinar la pendiente.

Paso 1) Formamos el cociente de incrementos:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}$$

Paso 2) Simplicamos la expresión:

$$\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\frac{x-(x+\Delta x)}{x\Delta x(x+\Delta x)}=\frac{-1}{x(x+\Delta x)}$$

Paso 3) A continuación hacemos que $\Delta x \longrightarrow 0$:

$$\text{si } \Delta x \longrightarrow 0, \text{ entonces } \frac{-1}{x(x+\Delta x)} \longrightarrow -\frac{1}{x^2}$$

En consecuencia la derivada de la función f es:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

Para hallar la pendiente de la recta tangente cuando $x=2$, se calcule $f'(2)$. Por lo tanto:

$$\text{la pendiente de la tangente es } f'(2)=-\frac{1}{2^2}=-\frac{1}{4}$$

Para hallar la coordenada "y" del punto de tangencia, calculamos f(2). Se ve que $f(2)=\frac{1}{2}$. A continuación, usando la forma punto pendiente de la ecuación de la recta, esto es, la ecuación de la forma $y-y_0=m(x-x_0)$, donde $m=-\frac{1}{4}$ y $(x_0,y_0)=(2,\frac{1}{2})$, se obtiene la ecuación de la recta. En efecto;

$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-2)$ o bien,

$y=-\frac{1}{4}x+1$

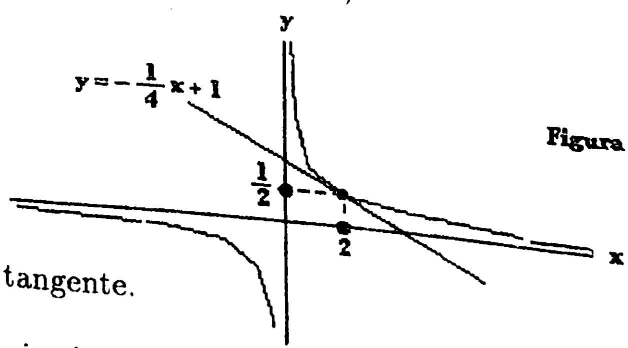



**Figura 1**

La figura (1) muestra el gráfico de la tangente.

Observemos que la definición de derivada exije la existencia de un límite. ¿Qué significa que un límite exista? ¿Es qué las funciones no son derivables en cualquier punto? En realidad en la definición de derivada están involucrados dos importantes conceptos: los conceptos de límite y de continuidad de una función.

La misma figura (1) muestra el gráfico de una función discontinua en el punto 0 y pareciera imposible trazar una tangente en dicho punto. En lo que sigue estudia-remos las nociones de límite y continuidad de una función.

## 2.2 Los límites

Hemos visto que la derivada es el valor al que tiende un cierto cociente de incrementos cuando $\Delta x$ tiende a cero. En general los matemáticos usan la palabra límite para representar el valor al que tiende una función cuando su variable tiende un número específico. Debemos decir que los límites juegan un papel central en la matemática moderna y forman la base de un desarrollo riguroso del Cálculo Diferencial e Integral. En lo que sigue analizaremos brevemente este importante concepto matemático a partir de algunos ejemplos específicos.

**Ejemplo 2**

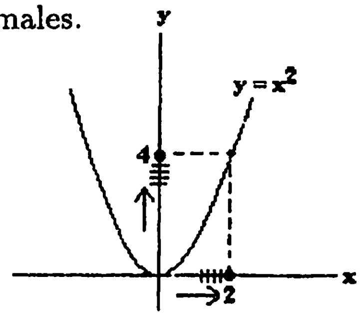
Evaluar el límite de la función $f(x) = x^2$, cuando $x \longrightarrow 2$. Escrito en símbolos:

$$\lim_{x \longrightarrow 2} x^2$$

SOLUCIÓN. Estamos interesados en obtener información acerca del valor que podría tener el límite de la función cuando $x \longrightarrow 2$. Pero, cómo podemos acercarnos a 2 tanto por su derecha como por su izquierda, parece natural analizar esta situación usando valores que se aproximan a 2 de ambas formas. Hemos construido dos tablas que contienen la información de este hecho. La primera de ellas nos muestra el comportamiento de la función a medida que nos acercamos a 2 por la izquierda y la segunda lo que ocurre cuando nos acercamos a 2 por la derecha. En ambos casos hemos redondeado los resultados a 5 decimales.

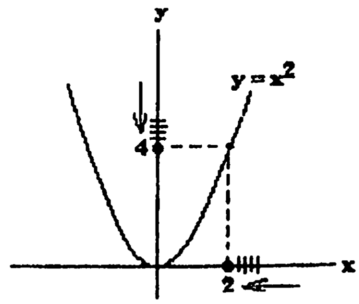
| x | $x^2$ |
|---|---|
| 1,90000 | 3,61000 |
| 1,99000 | 3,96000 |
| 1,99900 | 3,99600 |
| 1,99990 | 3,99960 |
| 1,99999 | 4,00000 |

figura 2




| x | $x^2$ |
|---|---|
| 2,10000 | 4,41000 |
| 2,01000 | 4,04000 |
| 2,00100 | 4,00400 |
| 2,00010 | 4,00040 |
| 2,00001 | 4,00000 |

figura 3



Aunque esta no es una demostración, podemos inferir que es casi seguro de que

$$\lim_{x \longrightarrow 2} x^2 = 4$$

Observemos que hubiesemos obtenido el mismo resultado sustituyendo el valor $x = 2$ en la función $f(x) = x^2$ para obtener el valor correcto del límite. Aunque en este caso particular la respuesta sería correcta, en muchos otros, la sustitución nos conduciría a ninguna respuesta o a respuestas incorrectas.

**Ejemplo 3**

Evalúe el límite de $\frac{x-1}{x+2}$ si $x \longrightarrow 3$

Solución. De acuerdo al ejemplo anterior parece natural suponer que

$$\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{x-1}{x+2} = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5} = 0,4$$

La tabla siguiente, en la cual se muestran valores de la variable independiente que se acercan a 3 por el lado derecho, refuerza dicha suposición. Se han efectuado los cálculos con 5 decimales.

| x | $\frac{x-1}{x+2}$ |
|---|---|
| 3,100000 | 0,41176 |
| 3,010000 | 0,40120 |
| 3,001000 | 0,40012 |
| 3,000100 | 0,40001 |
| 3,000010 | 0,40000 |
| 3,000001 | 0,40000 |

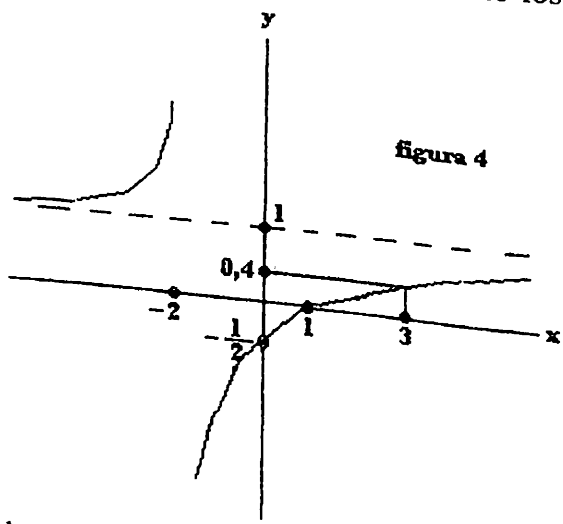


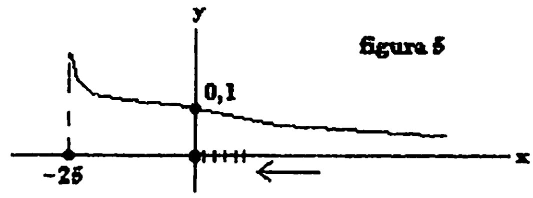

figura 4

**Ejemplo 4**

Evalúe el límite de $f(x) = \frac{\sqrt{x+25}-5}{x}$ cuando $x \longrightarrow 0$

Solución. Observemos que no podemos reemplazar directamente el 0 en la expresión dada porque ésta no tiene sentido para $x = 0$; la función no está definida para $x = 0$. Sin embargo la tabla siguiente nos muestra que el límite de $\frac{\sqrt{x+25}-5}{x}$ existe y es igual a $\frac{1}{10}$. En efecto:

| x | $\frac{\sqrt{x+25}-5}{x}$ |
|---|---|
| 1,0000 | 0,09902 |
| 0,1000 | 0,09990 |
| 0,0100 | 0,10000 |
| 0,0001 | 0,10000 |

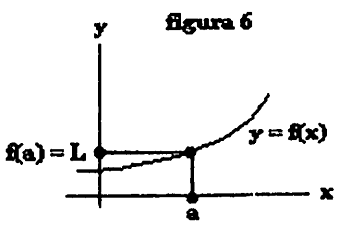


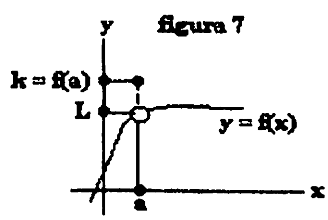

Los ejemplos nos dan una visión intuitiva del concepto de límite bastante correcta y a menudo sugieren, con ayuda de una buena gráfica, el valor de éste. Sin embargo, a pesar de que en algunos casos será suficiente tener una idea intuitiva del concepto de límite, en otros, tendremos necesidad de realizar cálculos y apelar a **las leyes de los límites**. En el anexo A se analiza este concepto desde un punto de vista más formal.

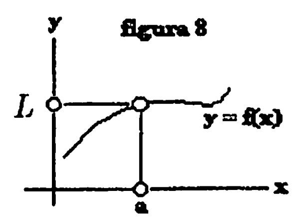
**Definición.** Si los valores de la función $f(x)$ se aproximan más y más a un determinado número **L**, siempre que **x** se aproxima más y más a algún número **a**, se dice que L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a **a** y se escribe

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L$$

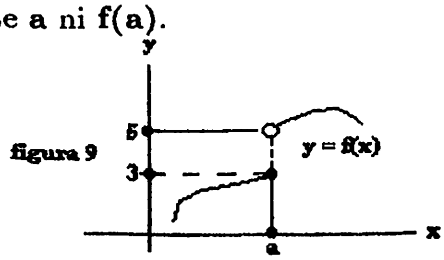
Los límites describen el comportamiento de una función cerca de un punto particular y **no necesariamente en el punto mismo**, esto se ilustra en las figuras siguientes.

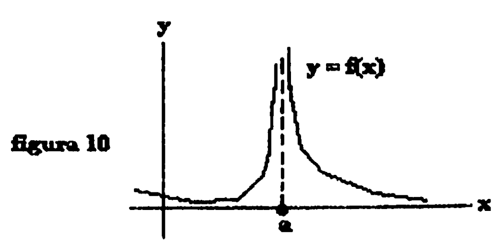



En las figuras 6, 7 y 8, el límite de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow a$ es igual a L. Sin embargo las tres funciones se comportan en forma diferente en $x = a$. En efecto, en la figura (6), $f(a)$ es igual al límite L. En la figura (7) $f(a)$ ha sido definido artificialmente para ser diferente de L. En la figura (8), $f(a)$ no está definida: no existe **a** ni **f(a)**.




Las figuras (9) y (10) muestran dos funciones que no tienen límite cuando $x \longrightarrow a$. La función de la figura (9 ) no tiene límite cuando $x \longrightarrow a$ porque

$f(x) \longrightarrow 5$ cuando $x \longrightarrow a$ por la derecha, y tiende a 3 cuando $x \longrightarrow a$ por la izquierda. Y la función de la figura (10) no tiene límite cuando $x \longrightarrow a$ porque los valores de $f(x)$ crecen sin límite y no tienden hacia ningún número (finito). En lo que sigue escribiremos $x \longrightarrow a^+$ y $x \longrightarrow a^-$ para significar que x tiende a a por la derecha y que tiende a a por la izquierda respectivamente.

La definición y el análisis de las figuras anteriores nos sugieren el siguiente teorema:

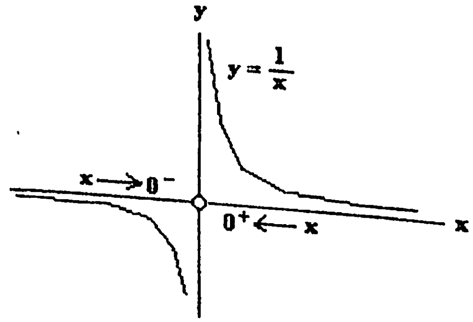
$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = L \;\; y \;\; \lim_{x\to a^+} f(x) = L}$$

**Ejemplo 5**

Evalúe el límite de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando $x \longrightarrow 0$

SOLUCIÓN. La función $f(x)$ se indefine para $x = 0$. Analizaremos el límite de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow 0$ por la izquierda y por la derecha. Observemos que cuando $x \longrightarrow 0^+$ la función $f(x) \longrightarrow +\infty$. En símbolos: $\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Por otra parte, cuando $x \longrightarrow 0^-$, entonces, $f(x) \rightarrow -\infty$. En símbolos: $\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

figura 11




La figura (11) muestra el gráfico de la función $f(x) = \frac{1}{x}$. Se puede ver que si x tiende a cero por la derecha la función crece indefinidamente hacia arriba. En cambio si x tiende a cero por la izquierda la función crece indefinidamente hacia abajo, luego la función no tiene límite en $x = 0$. Lo dicho nos sugiere el siguiente teorema:

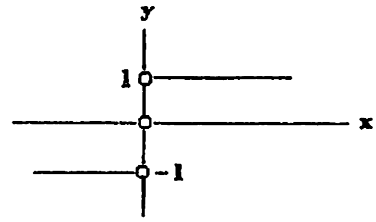
Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ $y$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \mp\infty$
entonces la función no tiene límite en x=a

**Ejemplo 6**

Investigue los límites laterales de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow 0$, si

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

figura 12




**Solución.** En la gráfica de la función dada, fig (12), se ve que $f(x) \longrightarrow 1$ cuando $x \longrightarrow 0^+$. En cambio $f(x) \longrightarrow -1$, cuando $x \longrightarrow 0^-$. En particular, hay valores positivos tan cerca de cero como se desee y tal que $f(x) = 1$ y valores negativos de x, tan cerca de cero como se desee, tales que $f(x) = -1$. Por lo tanto $f(x)$ no puede acercarse tanto como se desee a ningún valor "L" cuando $x \longrightarrow 0$. En consecuencia de acuerdo a la definición

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x}{|x|} \quad \text{no existe}$$

**Ejemplo 7**

Evaluar el límite de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow 0$ si

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

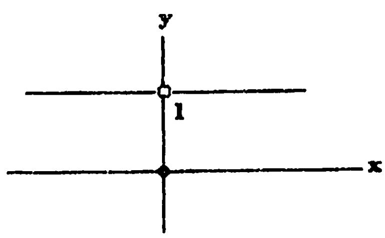



figura 13

**Solución.** El hecho de que $f(x) = 1$ para cualesquiera valores de x cercanos a cero implica que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 1$$

Recuerde que no importa que $f(0)$ no coincida con el límite.

## 2.3 Propiedades de los límites

Los límites obedecen a las siguientes leyes algebraicas, cuyas demostraciones se dan en el anexo B.

### 2.3.1 El límite de una suma o resta

$$\lim_{x \longrightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \longrightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \longrightarrow a} g(x)$$

siempre que ambos límites existan

### 2.3.2 El límite de un producto

$$\lim_{x \longrightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \longrightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \longrightarrow a} g(x)$$

siempre que ambos límites existan

### 2.3.3 El límite de un cociente

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \longrightarrow a} f(x)}{\lim_{x \longrightarrow a} g(x)}$$

siempre que ambos límites existan y $\lim_{x \longrightarrow a} g(x) \neq 0$

### 2.3.4 El límite de una potencia

$$\lim_{x \longrightarrow a} [f(x)]^p = [\lim_{x \longrightarrow a} f(x)]^p$$

para todo número real p, siempre que el límite exista.

### 2.3.5 El límite de una constante

Si k es una constante $\lim_{x \longrightarrow a} k = k$

## 2.4 Cálculo de límites

Los siguientes ejemplos muestran como se pueden usar las leyes de los límites para evaluar límites de funciones polinomiales y racionales.

**Ejemplo 8**

Halle los siguientes límites: a) $\lim_{x\longrightarrow 2}(x^2-3x+1)$ b) $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{3x^2-8}{x-2}$

SOLUCIÓN a) Usando las propiedades de los límites de una potencia, de la suma y del producto, se tiene:

$$\lim_{x\longrightarrow 2}(x^2-3x+1) = (\lim_{x\longrightarrow 2} x)^2 - \lim_{x\longrightarrow 2} 3\cdot \lim_{x\longrightarrow 2} x + \lim_{x\longrightarrow 2} 1 = 2^2 - 3(2) + 1 = -1$$

b) Usando la propiedad del límite de un cociente, de una potencia y de la resta, resulta:

$$b)\ \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{3x^2-8}{x-2} = \frac{\lim_{x\longrightarrow 0}(3x^2-8)}{\lim_{x\longrightarrow 0}(x-2)} = \frac{-8}{-2} = 4$$

**Ejemplo 9**

Halle el límite de $\frac{x+1}{x-2}$, si $x \longrightarrow 2$.

SOLUCIÓN. En este ejemplo la función se indefine en el denominador, y el límite en el numerador es distinto de cero. Notemos que cuando $x \longrightarrow 2^+$, entonces, $f(x) \longrightarrow +\infty$. Y cuando $x \longrightarrow 2^-$, entonces, $f(x) \longrightarrow -\infty$. Decimos en este caso que la función no tiene límite cuando $x \longrightarrow 2$.

## 2.5 La continuidad

Desde el punto de vista intuitivo podemos ver que las figuras (7), (8), (9) y (10) de la página 31 muestran curvas que no son continuas. De hecho una curva es discontinua en un punto cuando está "rota" en dicho punto. Este es el caso de cada una de las curvas aludidas.

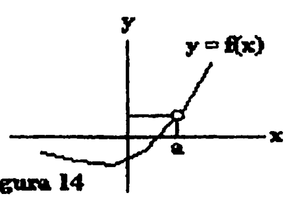


figura 14

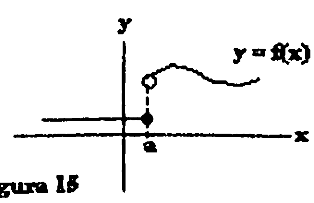


figura 15

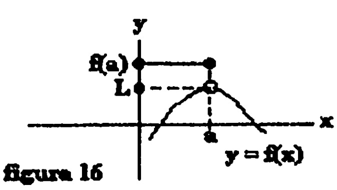


figura 16

Las figuras (14), (15) y (16) muestran tres funciones discontinuas en el punto $x = a$. La función de la figura (14) no es continua en $x = a$ porque $f(a)$ no está definida. La función de la figura (15) no es continua en $x = a$ porque no existe $\lim_{x\longrightarrow a} f(x)$. Y la función de la figura (16) no es continua en $x = a$ porque

$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, a pesar de que $f(a)$ está definida y el límite existe. De acuerdo a estas consideraciones, la siguiente es una definición de función continua.

> Definición. Una función f es continua en $x = a$ si: a) $f(a)$ está definida. b) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe. c) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

**Ejemplo 10**

Demuestre que la función racional $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ es continua en $x = 3$.

SOLUCIÓN. De acuerdo a la definición: a) La función está definida en $x = 3$ y $f(3) = 4$. b) El $\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x-2} = 4$ existe. c) El $\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x-2} = f(3) = 4$. En consecuencia la función es continua en dicho punto.

Sin embargo se ve claramente que la función es discontinua en $x = 2$ ya que no está definida para este punto. No olvidemos que la división por cero es imposible. En general es suficiente que no se satisfaga cualesquiera de las condiciones de la definición para que la curva no sea continua. Usando las propiedades de los límites se puede demostrar lo siguiente:

> Un polinomio es continuo para todo valor de x. Una función racional algebraica es continua para todo valor de x, excepto para aquellos valores de x en los cuales el denominador es igual a cero

## 2.6 Diferenciabilidad y continuidad

Conviene precisar que no todas las funciones continuas tienen derivada para cada valor de x de su dominio. La figura (17) muestra el gráfico de la función valor absoluto, que siendo continua en todo su dominio no tiene derivada en $x = 0$. Para explicar formalmente este hecho debemos aplicar el cociente de incrementos a la función

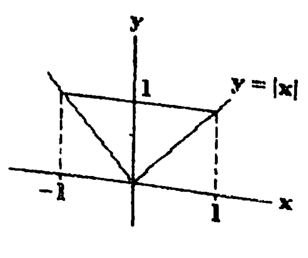


figura 17

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Puesto que debemos determinar la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto x=0, tenemos que calcular el cociente de incrementos para ambas ramas de la función.

a) Para los valores de $x \geq 0$, esto es, para $f(x) = x$ resulta:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

b) Para los valores de $x < 0$, es decir, para $f(x) = -x$ se tiene:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{-(x + \Delta x) - (-x)}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

Estos resultados nos dicen que cuando calculamos la pendiente en el punto $x = 0$ acercándonos por su lado derecho, ésta es igual a 1. En cambio cuando calculamos la pendiente en $x = 0$ acercándonos por su lado izquierdo, es igual a $-1$. De esta contradicción inferimos que la función $f(x) = |x|$ no tiene tangente en $x = 0$ y por lo tanto no es derivable allí.

**figura 18**

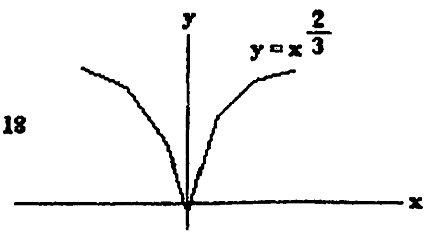
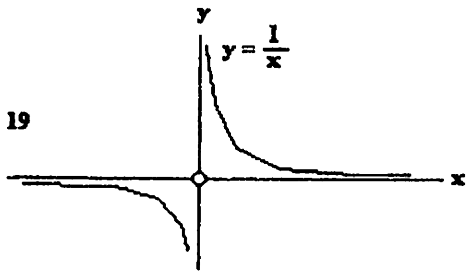



**figura 19**




La figura (18) muestra el gráfico de la función $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ a la cual no se le puede trazar una tangente vertical en $x = 0$, en consecuencia esta función no tiene derivada en $x = 0$.

La función $f(x) = \frac{1}{x}$, cuya gráfica es la de la de la figura (19), no tiene derivada en $x = 0$ porque es discontinua en ese punto. Estos ejemplos nos están sugiriendo que:

| |
|---|
| **No toda función continua en un punto es diferenciable en ese punto. Y por otra parte, toda función diferenciable en un punto es continua en dicho punto.** |

## 2.7 Ejercicios propuestos

1. Halle la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la normal a las curvas: a) $y = 2x^2 - 3x + 5$ en el punto $x = -1$. b) $y = (2x - 1)^2 - 4x$ en el punto $x = -1$. c) $y = -x^2 + x$ en el punto $x = 0$.

2. Encuentre el punto donde la parábola $y = -x^2 + 2x$ tiene una tangente horizontal. Halle las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a la curva en dicho punto.

3. Aplique la definición de derivada para hallar $f'(x)$ en cada una de las funciones siguientes: a) $y = (x - 1)^2$. b) $y = 4x^3 - 3x^2$. c) $y = \frac{x-1}{x}$. d) $y = x^4$.

4. El beneficio de un fabricante de ventas de radios viene dada por la función $f(x) = 400(15 - x)(x - 2)$, donde x es el precio al que se venden las radios. a) Hallar el precio óptimo de ventas. b) Trace el gráfico de la función y diga para que precios las ganancias son nulas.

5. Use la calculadora manual para investigar los límites siguientes y después compruebe los resultados algebraicamente. a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$. b) $\lim_{x\to 4} \frac{x^{2/3}-8}{x-4}$

6. Utilice las leyes de los límites para evaluar los límites que se indican. a) $\lim_{x\to 0}(3x^2 - 7x + 1)$ b) $\lim_{x\to 3} \frac{(x-1)^7}{(2x-5)^4}$ c) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-x-2}$ d) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$ e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ f) $\lim_{x\to 3} |1 - x|$ g) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ h) $\lim_{x\to 1} \sqrt{(x-2)^2}$

7. Considere cada una de las siguientes funciones y diga si son continuas en cada uno de los valores especificados. Justifique su respuesta. a) $f(x) = 4x^2 + 3x - 1$ en $x = 2$. b) $y = x^3 - 1$ en $x = 0$. c) $y = \frac{x+2}{x-1}$ en $x = 1$. d) $y = \frac{2x+1}{3x-6}$. e) $\frac{2x+1}{3x-6}$ en $x = 2$. f) $y = \frac{x+1}{x^2-1}$ en $x = -1$.

8. Considere las funciones siguientes y diga si son o no continuas. Justifique su respuesta.

   a) $f(x) = \begin{cases} \text{x+1} & \text{si } x \leq 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} \text{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \text{-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

# 2.8 El DERIVE

Al ejecutar EL DERIVE la pantalla aparece dividida en dos partes. La parte superior, en la cual se leen las especificaciones relativas al programa y la parte inferior en la cual se lee lo siguiente:

| |
|---|
| **Command:** Author, Build, Calculus, Declare, Expand, Factor, Help, Jump, Solve, Manage, Options, Plot, Jump, Remove, Simplify, Transfer, move, Window, Approx. |

Con la barra espaciadora usted puede mover el cursor sobre cada una de las funciones que aparecen a la derecha de **Command**. Para ejecutarlas, después que el cursor este sobre la función elejida, es suficiente presionar la tecla **Enter**.

**Ejemplo 11**

Dada la función $f(x) = x^2$, calcular la derivada de la función utilizando la definición.

1. En **Command** : ponga el cursor en **Author** y presione la tecla Enter.
2. Aparece **Author expression:** Escriba $f(x) := x^2$ y presione la tecla Enter. En la parte superior aparece $f(x) := x^2$ y en la inferior aparece Command. En Author presione la tecla Enter.
3. Aparece **Author expression:** Escriba $(f(x+h) - f(x))/h$ y presione la tecla Enter.
4. En la parte superior aparece $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. En la parte inferior ponga el cursor en Calculus y presione la tecla Enter.
5. Aparece Calculus: ponga el cursor en **Limit** y presione la tecla Enter.
6. Aparece **Calculus limit expression**: Presione la tecla Enter.
7. Aparece Calculus limit variable: Escriba h y presione la tecla Enter.
8. Aparece Calculus limit point 0. Presione la tecla Enter.
9. En la parte superior aparece $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

10. En la parte inferior aparece Command: Ponga el cursor en Simplify y presione la tecla Enter. En la parte superior aparece 2x que es la derivada de la función propuesta.

**Ejemplo 12**

Calcule $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$.

1. En **Command** : ponga el cursor en **Author** y presione la tecla Enter.
2. Aparece **Author expression:** Escriba $f(x) := (x^3-1)/(x-1)$ y presione la tecla Enter. En la parte superior aparece $f(x) := \frac{x^3-1}{x-1}$ y en la inferior aparece Command. ponga ponga el cursor en Calculus y presione la tecla Enter.
3. Aparece Calculus: ponga el cursor en **Limit** y presione la tecla Enter.
4. Aparece **Calculus limit expression**: Presione la tecla Enter.
5. Aparece Calculus limit variable x. Presione la tecla Enter.
6. Aparece Calculus limit point 0. Escriba 1 y presione la tecla Enter.
7. En la parte superior aparece $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$.
8. En la parte inferior aparece Command: Ponga el cursor en Simplify y presione la tecla Enter. En la parte superior aparece 3 que es el límite buscado.

## 2.9 Ejercicios propuestos

Utilice EL DERIVE para comprobar los resultados que obtuvo en los ejercicios propuestos de la página 39.

# Capítulo 3 La diferenciación

**Objetivos**

1. Aprender las reglas de derivación de las funciones algebraicas y **trascendentes**
2. Aplicar los conceptos de razón porcentual de cambio, razones relacionadas y regla de la cadena en la modelación de fenómenos de la naturaleza.
3. Utilizar EL DERIVE para resolver problemas que involucren el concepto de diferenciación .

## 3.1 Derivación de funciones algebraicas.

En el capítulo 1 vimos que para analizar y comprender muchos fenómenos de la naturaleza era necesario estudiar el concepto de derivada. En el capítulo precedente estudiamos el concepto de derivada por medio de los límites. Sin embargo resultaría demasiado engorroso tener que calcular un límite cada vez que estamos resolviendo un problema. Por esta razón, siguiendo el pensamiento de **Whitehead**, desarrollaremos reglas prácticas que nos permitirán calcular derivadas más fácilmente y posteriormente utilizaremos el DERIVE para calcular dichas derivadas "sin necesidad de pensar".

### 3.1.1 La derivada de una función constante

La derivada de una función constante es cero. En símbolos

$$\frac{d}{dx}[c] = 0 \text{ donde c es una constante}$$

Utilizando la definición de derivada se puede demostrar fácilmente la veracidad de la regla anterior. En efecto, si $f(x) = c$, resulta:

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x) = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{c-c}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

**Ejemplo 1**

a) Si $f(x) = 10$, entonces $f'(x) = 0$

b) Si $f(x) = \frac{3}{4}$, entonces, $f'(x) = 0$.

c) Si $f(x) = 0$, entonces, $f'(x) = 0$.

### 3.1.2 La derivada de una potencia

Para deducir la regla de derivación de una potencia necesitamos conocer el desarrollo de un binomio elevado a una potencia entera. Recordemos que el cuadrado de un binomio y el cubo de un binomio se escriben:

a) $(x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

b) $(x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

Estos resultados nos sugieren la siguiente expresión para el cuadrado de un binomio elevado a un exponente entero positivo.

c) $(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{2\cdot 3}(\Delta x)^3 + \cdots + (\Delta x)^n$

En lo que sigue utilizaremos este resultado para demostrar la regla de derivación de una función potencial

La derivada de la función potencial $y = x^n$ es:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

donde "n" es un número entero positivo.

Para demostrar esta regla debemos calcular el $\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, donde $f(x) = x^n$. En efecto:

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Es decir:

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + [\frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}](\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Al sumar términos semejantes y factorizar por $\Delta x$ se obtiene:

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)[nx^{n-1} + [\frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}](\Delta x) + \cdots + (\Delta x)^{n-1}}{\Delta x}$$

De esto resulta que:

$$\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \left( nx^{n-1} + \left[ \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2} \right] (\Delta x) + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right)$$

Por lo tanto $\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1} + 0 \cdots + 0 = nx^{n-1}$

En consecuencia si $f(x) = x^n$, entonces, $f'(x) = nx^{n-1}$.

### 3.1.3 La derivada de una función por un escalar.

Otra regla de derivación se refiere a la derivada de una función por un escalar.

Si "c" es una constante entonces, la derivada del producto de una función por un escalar es:

$$\frac{d[c \cdot f(x)]}{dx} = c \cdot f'(x)$$

La demostración de esta afirmación es relativamente sencilla, En efecto:

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0}$$

Es decir:
$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\left[\lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right] = cf'(x)$$

Cuando las constantes figura en el denominador de una función no hay una variación esencial. En este caso escribimos:
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{c}\right] = \frac{d}{dx}\left[(\frac{1}{c})f(x)\right] = \frac{1}{c}\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{c}f'(x)$$

**Ejemplo 2**

a) La derivada de $f(x) = x^5$ es $f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$

b) La derivada[1] de $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ es $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

c) Si $f(x) = 4x^7$, entonces, $f'(x) = 28x^6$

d) Si $f(t) = 5t^{-\frac{3}{5}}$, entonces, $f'(t) = -\frac{3}{5}\cdot 5t^{-\frac{3}{5}-1} = -3t^{-\frac{8}{5}}$

e) Si $y = \frac{5x^2}{7}$, entonces, se escribe $y = \frac{5}{7}x^2$, luego, $y' = 2\cdot\frac{5}{7}x^{2-1} = \frac{10}{7}x$

f) Si $g(p) = 4p$, entonces, $g'(p) = 1\cdot 4p^{1-1} = 4p^0 = 4$

g) Si $y = 120x$, entonces $y' = 120$.

### 3.1.4 La derivada de una suma (resta) de funciones.

¿Pero, que hacer si tuvieramos que derivar una función formada por sumas, restas, cocientes o productos de otras funciones? La proxima regla establece que una suma (o resta) de funciones puede ser diferenciada función por función.

> La derivada de una suma (o resta) de dos o más funciones es igual a la suma (o resta) de sus derivadas.
>
> $$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

[1]Cuando se demostró la regla para derivar la función potencial se usó el teorema del binomio; válido solamente para exponentes naturales. Sin embargo se puede demostrar que la regla de derivación de una potencia funciona para un exponente "real" cualquiera

**Ejemplo 3**

a) La derivada de $f(x) = x^4 - \frac{4x^3}{5} + 6$ es, $f'(x) = 4x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 0 = 4x^3 - \frac{12}{5}x^2$

b) Si $f(x) = 4ax^7 + bx^2 - 3a$, entonces, $f'(x) = 28ax^6 + 2bx - 0 = 28ax^6 + 2bx$

c) Si $f(h) = 2a + 3b^2$, entonces $f'(h) = 0$

Cuando se deriva una función debe tenerse muy claro cual es la "variable de derivación". Así por ejemplo, en las funciones:

a) $f(x) = 5x^3 + 2a + z$, la variable es "x" y las demás letras son constantes, en consecuencia $f'(x) = 15x^2 + 0 + 0 = 15x^2$

b) $f(p) = p^2 - 3p + 12xa$, la variable es "p" las demás letras son constantes, por lo tanto $f'(p) = 2p - 3 + 0 = 2p - 3$

### 3.1.5 La derivada de un producto de funciones.

Supongamos que se nos pide derivar el producto $y = x^3(x^4 + 4x)$. El lector podría caer en la tentación de derivar cada uno de los factores por separados y después multiplicar las funciones derivadas. Esta fue la primera impresión que tuvo **Newton** antes de descubrir la regla correcta para derivar el producto de dos o más funciones.

> La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda, más la segunda función por la derivada de la primera.
>
> $$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$$

**Ejemplo 4**

a) Hallar las derivadas de a) $f(x) = x^3(x^2 + 4x)$ b) $s(x) = (1 + 2x)(x^{12} + 2)$ c) $f(x) = xy$

SOLUCIÓN. Aplicando la regla de derivación del producto de dos funciones resulta:

a) Si $f(x) = x^3(x^2+4x)$, entonces, $f'(x) = x^3(2x+4) + 3x^2(x^2+4x)$

b) Si $s(x) = (1+2x)(x^{12}+2)$, entonces, $s'(x) = (1+2x)(12x^{11}) + 2(x^{12}+2)$

c) Observe que la función propuesta es una función de x, por lo tanto "y" es una constante. En consecuencia $f'(x) = y$.

### 3.1.6 La derivada de un cociente de funciones.

La regla para derivar un cociente de dos funciones es algo más complicada. Los inventores del cálculo cayeron en la tentación de suponer que la regla consistía en la derivada del numerador dividida por la derivada del denominador, sin embargo, pronto se dieron cuenta de que esto no era así.

La derivada del cociente de dos funciones es igual a producto de la derivada del numerador por el denominador menos el producto del numerador por la derivada del denominador, dividido todo por el denominador al cuadrado.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad \text{donde } g(x) \neq 0$$

**Ejemplo 5**

Calcule la derivada de la función $y = \frac{x^4+3x^2-4}{x^3-1}$

SOLUCIÓN. De acuerdo a la regla se tiene:

$$y' = \frac{(4x^3+6x)(x^3-1) - (x^4+3x^2-4)(3x^2)}{[x^3-1]^2}$$

**Ejemplo 6**

Calcule la derivada de $f(x) = \frac{4x^3+12x+1}{15a}$

SOLUCIÓN. No es imprescindible derivar todo cociente mediante la regla del cociente. Observe que el denominador de la función propuesta es una constante, en consecuencia podemos escribir dicha función en la forma $y = \frac{1}{15a}(4x^3 + 12x - 1)$ y derivarla con la regla de la suma de funciones

$$\text{Si } y = \frac{1}{15a}(4x^3 + 12x + 1), \text{ entonces, } y' = \frac{1}{15a}(12x^2 + 12)$$

Con frecuencia cuando se pide calcular la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ tiende a utilizarse la fórmula de derivación de un cociente de funciones. En este caso conviene, más bien, expresar la función como una potencia, es decir, en la forma $f(x) = x^{-1}$ y derivarla de acuerdo a dicha regla.

**Ejemplo 7**

Cuando la sangre sale del corazón por la arterias mayores hacia los capilares y volver por las venas, la presión sistólica baja continuamente. Si la presión viene dada por la función

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, \quad 0 \leq t \leq 10$$

donde P se mide en milímetros de mercurio y "t" en segundos. ¿A qué razón está bajando la presión 5 segundos después de que la sangre sale del corazón?

SOLUCIÓN. La razón instantanea de cambio de la función P es:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{(t^2 + 1)(50t) - (25t^2 + 125)(2t)}{(t^2 + 1)^2}$$

Multiplicando los términos del numerador y sumando términos semajantes se obtiene:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{200t}{(t^2 + 1)^2}$$

En consecuencia cuando $t = 5$ la presión está bajando a razón de

$$\frac{dP}{dt}(5) = -\frac{200(5)}{26^2} = -1,48 \; [\frac{mm}{seg}]$$

**Ejemplo 8**

Se estima que dentro de "t" meses la población de una cierta comunidad será $N(t) = t^2 + 20t + 8\,000$ personas. a) A qué ritmo cambiará la población dentro de 15 meses. b) ¿Cuánto cambiará realmente la población durante el decimo sexto mes?

Solución. a) El ritmo de cambio de la población es igual a la derivada de la función. Esto es, $N'(t) = 2t + 20$. Puesto que $N'(15) = 50$, se sigue que dentro de 15 meses la población habrá crecido a razón de 50 personas por mes. b) El cambio real en la población durante el decimosexto mes, es la diferencia entre la población que había entre el decimo sexto y decimo quinto mes, luego la población cambia realmente en: $N(16) - N(15) = 8\,576 - 8\,525 = 51$ personas

## 3.2 Razón porcentual de cambio

En muchas situaciones prácticas, la razón de cambio de una cantidad no es tan significativa como su **razón porcentual de cambio**. Supongamos, por ejemplo, que un ritmo de cambio anual en una población es de 500 personas, en una ciudad de 5 000 000 de personas sería despreciable, mientras que el mismo ritmo de cambio podría tener un impacto enorme en un pueblo de 2 000 personas.

La razón porcentual de cambio compara el ritmo de cambio de una cantidad con el tamaño de esa cantidad. Si notamos la razón porcentual de cambio de la cantidad Q, como $R_p$ de Q, entonces,

$$R_p \text{ de Q} = 100 \, \frac{\text{ritmo de cambio de Q}}{Q}$$

**Ejemplo 9**

El producto nacional bruto de un cierto país era de $P(t) = t^2 + 5t + 100$ billones de dolares t años después de 1970. a) ¿A qué ritmo estaba cambiando el PNB en el año 1975?. b) A qué razón porcentual de cambio estaba variando el PNB en el mismo año?.

Solución. El ritmo de cambio del PNB es la derivada $P'(t) = 2t + 5$. Por lo tanto el ritmo de cambio en 1975 es:

$$P'(5) = 2(5) + 5 = 15 \text{ billones de dolares por año}$$

b) la razón porcentual de cambio del PNB en 1975 es de:

$$R_p = 100 \, \frac{P'(5)}{P(5)} = 100 \, \frac{15}{150} = 10 \text{ por ciento por año}$$

En consecuencia el PNB cambió en un 10 por ciento en 1975.

## 3.3 Razones relacionadas.

Existen muchas aplicaciones de la derivada, en que una cierta cantidad viene dada como una función de una variable, la cual, a su vez, puede ser pensada como una función de una segunda variable. En tales casos, la razón de cambio de la cantidad con respecto a la segunda variable es igual a la razón de cambio de la cantidad con respecto a la primera variable, multiplicada por la razón de cambio de la primera variable con respecto a la segunda.

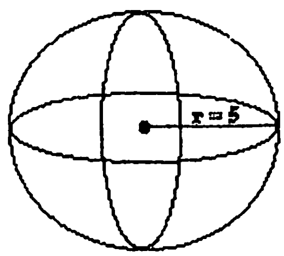



**figura 1**

**Ejemplo 10**

Supongamos que estamos inflando un globo esférico y su radio crece a razón de $0,2\ [\frac{cm}{seg}]$ cuando $r = 5cm$. ¿A que razón crece el volumen V de la pelota en ese mismo instante?

SOLUCIÓN. Observe que para hallar la razón de cambio del volumen del globo con respecto al tiempo, debemos hallar $\frac{dV}{dt}$. Sabemos que el volumen de una esfera es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Utilizando el principio de las razones relacionadas escribimos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}$$

Puesto que $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$ y $\frac{dr}{dt} = 0,2$ en $r = 5$ resulta :

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(5)^2(0,2) \approx 62,83\ [\frac{cm^3}{seg}]$$

Por lo tanto el volumen del globo crece a razón de $62,83\ cm^3$ por cada segundo en el instante mencionado.

**Ejemplo 11**

El costo total de la producción de una cierta fábrica es función del número de unidades producidas; el cual a su vez es función del número de horas durante el cual la fábrica ha estado operando. Sea $C$ el costo en dolares, q el número de unidades producidas y t el número de horas respectivamente. Entonces:

$$\frac{dC}{dq}$$

es la razón de cambio del costo con respecto al número de unidades producidas; en dolares por unidad.

$$\frac{dq}{dt}$$

es la razón de cambio de la producción con respecto al tiempo; dolares por hora.

El producto de estas dos razones es igual a la razón de cambio del costo de producción con respecto al tiempo y se escribe:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$$

Al principio de las razones relacionadas se le llama también **Regla de la cadena**.

**Ejemplo 12**

Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $y = u^3 - 3u^2 + 1$, y por otra parte, $u = x^2 + 2$.

SOLUCIÓN. Puesto que $\frac{dy}{du} = 3u^2 - 6u$, y además, $\frac{du}{dx} = 2x$, se sigue que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{dy}{dx} = (3u^2 - 6u)(2x)$$

Observe que esta derivada está expresada en términos de las variables $x$ y $u$, cuando lo ideal sería expresar la derivada de $y$ como una función de $x$ únicamente. Puesto que $u = x^2 + 2$, sustituimos este valor de $u$ en la expresión $\frac{dy}{dx}$ y obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = [3(x^2 + 2)^2 - 6(x^2 + 2)](2x) = 6x^3(x^2 + 2)$$

## 3.4 La regla de la cadena.

Si $y = f(u)$ es una función diferenciable de u, y $u = g(x)$ es una función diferenciable de x, entonces $y = f(g(x))$ es una función diferenciable de x, y entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \quad \text{o equivalentemente} \quad \frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(u)g'(x)$$

La regla de cadena sirve para calcular la derivada de una gran variedad de funciones, por ejemplo, funciones del tipo $y = [u(x)]^n$.

### 3.5 La derivada de una potencia.

Si $y = [u(x)]^n$, donde $u$ es una función diferenciable de $x$, y $n$ es un número real, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx} \quad \text{o equivalentemente} \quad \frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$$

**Ejemplo 13**

Hallar la derivada de $f(x) = (x^4 + 2x)^6$.

SOLUCIÓN. Aplicando la regla de la cadena, se obtiene:

$$f'(x) = 6(x^4 + 2x)^5 \cdot (4x^3 + 2)$$

**Ejemplo 14**

Hallar la derivada $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 2)^2}$

SOLUCIÓN. Podemos reescribir la ecuación dada en la forma $f(x) = [(x^2+2)^2]^{\frac{1}{3}} = (x^2+2)^{\frac{2}{3}}$. Por lo tanto:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2+2)^{\frac{2}{3}-1}\cdot(2x) = \frac{2}{3}(x^2+2)^{-\frac{1}{3}}(2x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2+2}}$$

**Ejemplo 15**

Calcular la derivada de $f(x) = \sqrt{\frac{(x+1}{x-1}}$

SOLUCIÓN. Observe que podemos escribir $f(x) = (\frac{x+1}{x-1})^{\frac{1}{2}}$. Aplicando la regla de la cadena resulta:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Ahora usamos la regla para derivar el cociente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación de $f'(x)$, se obtiene finalmente:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[-\frac{2}{(x-1)^2}\right] = -\frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{3}{2}}}$$

Los problemas en los cuales una cantidad viene dada como una función de una variable, que a su vez puede ser escrita como una función de una segunda variable, y el objetivo es hallar la razón de cambio de la cantidad original con respecto a la segunda variable, se llaman **problemas de razones relacionadas**. Hemos visto que, en realidad, estamos utilizando la regla de la cadena. Veamos otros ejemplos.

**Ejemplo 16**

Un estudio ambiental hecho por la Municipalidad de Copiapó dejó en evidencia que el nivel medio diario de gases sulfurosos en el aire, emanados por la Fundición de Paipote, será de

$$c(p) = \sqrt{0,5p^2+17} \text{ partes por millón}$$

cuando la población sea de $p$ miles de habitantes. Se estima que dentro de $t$ años la población de la ciudad será de $p(t) = 3,1 + 0,1t^2$ miles de habitantes.

¿A qué ritmo estará cambiando el nivel de los gases sulfurosos con respecto al tiempo dentro de 3 años?

Solución. Parece claro que el objetivo es hallar $\frac{dc}{dt}$ cuando $t = 3$. Calculamos primero las derivadas $\frac{dc}{dp}$ y $\frac{dp}{dt}$

$$\frac{dc}{dp} = \frac{1}{2}p(0,5p^2 + 17)^{-\frac{1}{2}} \quad y \quad \frac{dp}{dt} = 0,2t$$

Por otra parte cuando $t = 3$, $p(3) = 3,1 + 0,1(3)^2 = 4$

De esta forma

$$\frac{dc}{dp} = \frac{1}{2}(4)\,[0,5(16) + 17]^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{2\sqrt{25}} = 0,4$$

y

$$\frac{dp}{dt} = 0,2(3) = 0,6$$

Y usando la regla de la cadena concluimos finalmente que:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc}{dp}\frac{dp}{dt} = (0,4)(0,6) = 0,24 \text{ partes por millón}$$

# 3.6 Ejercicios propuestos

1. Hallar las derivadas de las siguientes funciones. [1]. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 6x$ [2]. $f(s) = s^3 + 2s - 1$ [3]. $y = \frac{x^5}{5} - \frac{1}{x} - 1$ [4]. $f(t) = \frac{t}{3} - t^3 + 4t + 1$ [5]. $m(r) = 3r - 1$ [6]. $p(a) = a^7 - 3a + 13$ [7]. $y(x) = x - \frac{x^4}{9} - 122$ [8]. $p(v) = v - \frac{v}{3} - v^7$ [9]. $s(t) = 2t - \frac{t}{9} - t^4 - 12a + b$ [10]. $3y = x^5 - x^4 + x^{-3} - 4x^{-2} - x^0 - x^{-1} + 2$

2. Derive las funciones y calcule cada una de ellas en los puntos que se indica. [1]. $y = \frac{2}{x}$, $x = 1$ [2]. $y = -\frac{x^3}{4} + \frac{x}{9} - 1$, $x = 0$ [3]. $s(t) = t^3 - 2t + a$, $t = 1$ [4]. $g(s) = 4s^3(s-3)^2$, $s = 0$ [5]. $y = \frac{x-1}{x}$, $x = \frac{1}{4}$ [6]. $y = \frac{\sqrt{x^3 - x^2 - x}}{\sqrt{x}}$ $x = 1$ [7]. $g = 4x^3(1 - x^2 - 2x - 2)$, $x = \frac{1}{2}$ [8]. $h = \frac{x}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{4} + 2a - 1$, $x = 0$ [9]. $x = \frac{y-2}{5-y}$, $y = -2$ [10]. $f(x) = \sqrt{x - \frac{x}{7}}$, $x = 0$ [11]. $m(s) = \frac{2s}{s-1}$, $s = -1$.

3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 - 3x^2 + 2$, en el punto $x = 0$.

4. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3$, en el punto $x = 1$.
5. ¿En qué puntos, si los hay, tiene la curva $y = x^4 - 3x^2 + 2$ tangentes horizontales?
6. Represente la gráfica de $y = -x^2 + 6x - 5$ y halle las rectas tangentes a los puntos donde la curva corta al eje X y donde la tangente es paralela a dicho eje.
7. El área de un cuadrado de lado x es $A = x^2$. Hallar la razón de cambio del área respecto del lado cuando $x = 4$. Interprete el resultado.
8. El volumen de un cubo de arista x es $V = x^3$. Hallar la razón de cambio del volumen respecto de la arista cuando x=2. Interprete el resultado.
9. Cuando se pulsa una cuerda de guitarra vibra con una frecuencia $F = 200\sqrt{T}$, donde F se mide en vibraciones por segundos y T se mide en kilos. ¿Cómo varía la frecuencia al tensar la cuerda cuando la tensión es de 2 kilos?
10. Halle las ecuaciones de las rectas tangentes al gráfico de la función $y = x^2 - 4x + 25$ que pasan por el origen.
11. Halle los valores de a, b y c tales que el gráfico de la función $y = ax^2 + bx + c$ intersecte al eje X en los puntos $A(0,0)$ y $B(5,0)$ y tenga una tangente con pendiente 1 cuando $x = 2$.
12. Halle los valores de a y b tales que el punto más bajo del gráfico de la función $f(x) = ax^2 + bx$ sea $P(3,8)$.
13. Se estima que dentro de t años la tirada de un periódico local será de $C(t) = 100t^2 + 400t + 5\,000$. a) Obtenga una expresión para el ritmo al que estará cambiando la tirada dentro de t años. b) ¿A qué ritmo estará cambiando la tirada dentro de 5 años? c) ¿En cuánto cambiará realmente la tirada durante el sexto año?.
14. Un objeto se mueve sobre una linea recta de forma que después de t minutos su distancia a un punto fijo de referencia es

$$d(t) = 10t + \frac{5}{t+1}, \text{ metros}$$

a) Obtenga una fórmula para el ritmo al que estará cambiando la población con respecto al tiempo. b) ¿A qué ritmo estará creciendo la población dentro de 1 año? c) ¿Cuánto crecerá realmente la población durante el segundo año? d) ¿A qué ritmo estará cambiando la población dentro de 9 años? e) ¿Qué sucederá a la larga con el ritmo de crecimiento de la población?

15. Las ganancias anuales brutas de una cierta compañla eran de $G(t) = 0,1t^2 + 10t + 20$ en miles de dólares, t años después de su constitución en 1975. a) ¿A qué ritmo estaban creciendo las ganancias anuales brutas de la compañía en 1979? b) ¿A qué razón porcentual estaban creciendo las ganancias en ese mismo año?

16. Los registros de bienes raíces indican que t años después de 1973, el impuesto medio sobre la propiedad de una casa de tres dormitorios en la ciudad de Copiapó era de $I(t) = 20t^2 + 40t + 600$ dólares. a) ¿A qué ritmo estará creciendo el impuesto sobre la propiedad en el año 1993? b) ¿A qué razón porcentual estará creciendo el impuesto sobre la propiedad en este mismo año?

17. Suponga que el costo total de producción $C$ de una cierta fábrica es función del número $q$ de unidades producidas, el cual, a su vez, es función del número $t$ de horas durante las cuales ha estado operando la fábrica. a) ¿Qué cantidad estará representada por la derivada $\frac{dC}{dq}$ y en que unidades está medida esta cantidad. b) ¿Qué cantidad está representada por la derivada $\frac{dq}{dt}$ y en que unidades está medida esta cantidad? c) ¿Qué cantidad está representada por $\frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$ y en que unidades está medida esta cantidad?

18. Determine la razón a la que aumenta el área de un círculo cuando su radio mide 10 cm y está aumentando a razón de $2\pi\,[\frac{cm}{seg}]$

19. ¿A qué razón decrece el radio de un círculo con respecto al tiempo, cuando su área mide $75\pi\,cm^2$ y disminuye a razón de $2\pi\,[\frac{cm^2}{seg}]$

20. ¿ A qué razón disminuye el área de un triángulo equilátero cuando su arista mide 10 cm y disminuye a razón de $2\,[\frac{cm}{seg}]$?

21. Se está bombeando aire a un balón esférico de modo que su radio aumenta a razón de $\frac{dr}{dt} = 1\,[\frac{cm}{seg}]$. ¿Cuál es la razón de cambio con el tiempo, en $\frac{cm^3}{seg}$, del volumen del balón, cuando su radio $r$ mide 10 cm?

22. Utilice el DERIVE para verificar las derivadas de los ejercicios propuestos 1, 2 y 3.

23. Utilice el DERIVE para trazar los gráficos de las funciones y las tangentes de los ejercicios 4, 5 y 6.

24. Utilice el DERIVE para graficar las funciones que modelan los fenómenos de los problemas 13, 14, 15 y 16 e interprete los resultados obtenidos algebraicamente.

# La derivada de las funciones trascendentes

Muchos fenómenos de la naturaleza son modelados mediante funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y combinaciones de ellas. De esto se deriva la importancia de poder calcular la derivada de estas funciones, que en lo sucesivo llamaremos **funciones trascendentes**.

## 3.7 La derivada de la función logaritmo

La función logaritmo natural $y = ln\, x$ tiene una derivada sencilla y está basada en el hecho de que

$$(i) \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Formemos el cociente $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ y usemos las propiedades de los logaritmos, tal como se muestra a continuación

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{ln(x+\Delta x) - ln\, x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

En consecuencia se tiene que

$$(ii) \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{n \longrightarrow \infty} ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

Efectuando el cambio de variable

$$n = \frac{x}{\Delta x}, \text{ es decir, } \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n} \text{ y al mismo tiempo, } \frac{1}{\Delta x} = \frac{n}{x}$$

y reemplazándolas en la expresión (ii) resulta

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{x}} = ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{x}}$$

Utilizando ahora el límite (i), se obtiene

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = ln\, e^{\frac{1}{x}}$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos resulta que

$$ln\, e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot ln\, e = \frac{1}{x}$$

En consecuencia la derivada de la función logaritmo natural es

$$\boxed{\frac{d}{dx}(ln\, x) = \frac{1}{x}}$$

**Ejemplo 17**

Calcule la derivada de la función $y = 3x\, ln\, x$

SOLUCIÓN. Aplicando la derivada de un producto se tiene

$$y' = 3x \cdot (\frac{1}{x}) + 3\, ln\, x = 3(1 + ln\, x)$$

Para derivar la función logaritmo natural, cuando el argumento es otra función, se recurre a la regla de la cadena.

Si $u$ es una función diferenciable de $x$, entonces

$$\frac{d}{du}[ln\, u] = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

**Ejemplo 18**

Derive la funcón $y = ln\, \sqrt{x^2+3}$

SOLUCIÓN. Aplicando la regla de derivación de la función logaritmo natural, se tiene

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\right)\frac{d}{dx}[\sqrt{x^2+3}] = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\right)\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}(2x) = \frac{x}{x^2+3}$$

Con frecuencia conviene, antes de derivar, reescribir la función utlizando las propiedades de los logaritmos. Esto es particularmente útil cuando la función que se quiere derivar es muy complicada. En relación con el ejemplo anterior, podemos reescribir la función en la forma siguiente

$$y = ln\sqrt{x^2+3} \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2} ln\,(x^2+3)$$

La derivada de esta última función es más fácil de realizar. En efecto:

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+3}\,\frac{d}{dx}[x^2] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+3}(2x) = \frac{x}{x^2+3}$$

Se puede demostrar en forma análoga, a la demostración de la derivada de la función logaritmo natural, que la derivada de la función logaritmo, con una base cualesquiera es la siguiente

$$\boxed{\frac{d}{dx}[log_a x] = (log_a e)\frac{1}{x}}$$

**Ejemplo 19**

Halle la derivada de la función $f(x) = log_a(x)x^5$

SOLUCIÓN Observe que la función $f(x)$ es un producto de dos funciones. Aplicando la derivada de un producto se tiene

$$f'(x) = (log_a e\frac{1}{x})\cdot x^5 + log_a x\cdot 5x^4$$

Cuando el argumento del logaritmo es otra función debemos derivar utilizando la regla de la cadena.

$$\boxed{\frac{d}{dx}[log_a u] = \frac{log_a e}{u}\cdot\frac{du}{dx}}$$

**Ejemplo 20**

Hallar el valor mínimo de la función $f(x) = log_2(x^2 + 2x + 3)$.

SOLUCIÓN. Para hallar el mínimo de la función debemos resolver la ecuación $f'(x) = 0$. En efecto

$$f'(x) = (log_2 e)\left(\frac{1}{x^2 + 2x + 3}\right)(2x + 2) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

Usted puede verificar fácilmente, utlizando el signo de la primera derivada, que en $x = 1$ hay un mínimo y que dicho punto de mínimo es $P(-1, 1)$.

## 3.8 Derivada de la función exponencial

Para hallar la fórmula de la derivada de la función $y = e^x$ escribimos la igualdad

$$ln\, e^x = x$$

y derivamos con respecto a la variable x. Usando la reglá de la cadena se obtiene

$$\frac{d}{dx}[ln\, e^x] = \frac{d}{dx}[x] \Longleftrightarrow \frac{1}{e^x} \cdot \frac{d}{dx}[e^x] = 1$$

Despejando la expresión $\frac{d}{dx}[e^x]$ de la segunda equivalencia, resulta

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

Las derivadas de las otras funciones exponenciales son las siguientes

| | |
|---|---|
| *a)* $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$ | *b)* $\frac{d}{dx}[a^x] = (ln\, a)a^x$ |
| *c)* $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u \cdot u'$ | *d)* $\frac{d}{dx}[a^u] = (ln\, a)a^u \cdot u'$ |

**Ejemplo 21**

Halle las derivadas de las funciones siguientes: a) $y = e^{4x^2+6}$. b) $y = 2^{7x^2-1}$

SOLUCIÓN. Aplicando las fórmulas correspondientes, resulta:

a) $y' = e^{4x^2+6} \cdot (8x) = 8xe^{4x^2+6}$

b) $y' = (ln\,2) \cdot 2^{(7x^2-1)}(14x) = 14x\,(ln\,2)2^{7x^2-1}$

**Ejemplo 22**

Derive **la función de distribución normal de probabilidad**

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

SOLUCIÓN. Aplicando la fórmula correspondiente se tiene:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) = -\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

**El crecimiento exponencial.** Hemos visto que una cantidad $Q(t)$ que crece de acuerdo con una ley de la forma $Q(t) = Q_0e^{kt}$, donde $Q_0$ y $k$ son constantes positivas, se dice que experimenta un crecimiento exponencial. En el siguiente ejemplo mostraremos que si una cantidad crece exponencialmente, su ritmo de crecimiento es proporcional a su tamaño.

**Ejemplo 23**

Si $Q(t) = Q_0e^{kt}$, halle expresiones para la razón instantanea de cambio de $Q$ con respecto a $t$.

La razón instantanea de cambio de $Q$ con respecto a $t$ es la derivada

$$Q'(t) = k\,Q_0e^{kt} = k\,Q(t)$$

Esto nos dice que la razón instantanea de cambio $Q'(t)$ es proporcional al tamaño de la población.

> Si una cantidad crece exponencialmente, su ritmo de crecimiento es prorcional al tamaño de la cantidad. Esto es, si $Q(t) = Q_0e^{kt}$, entonces
>
> $$Q'(t) = kQ(t)$$
>
> donde $k$ es la constante de proporcionalidad

## 3.9 Derivadas de las funciones trigonométricas

En lo que sigue deduciremos la fórmula de la derivada de la función $y = sen\, x$ utilizando la definición. De acuerdo a esto se tiene sucesivamente que:

$$f(x + \Delta x) = sen\,(x + \Delta x) = sen\, x \cos \Delta x + \cos x\, sen\, \Delta x$$

luego

$$f(x + \Delta x) - f(x) = sen\, x \cos \Delta x + \cos x\, sen\, \Delta x - sen\, x$$

es decir

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \cos x\, sen\, \Delta x - sen\, x(1 - \cos x \Delta x)$$

En consecuencia

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \cos\,(\frac{sen\, \Delta x}{\Delta x}) - sen\, x\,(\frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x})$$

por lo tanto

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [\cos x(\frac{sen \Delta x}{\Delta x}) - sen\,(\frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x})]$$

de lo cual se desprende que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = (\cos x)(1) - (sen\, x)(0) = \cos x$$

En consecuencia

$$\frac{d}{dx}[sen\, x] = \cos x$$

Observe que hemos usado los hechos siguientes:

$$a)\ \lim_{\Delta x \to 0}(\frac{sen\, \Delta x)}{\Delta x}) = 1 \qquad b)\ \lim_{\Delta x \to 0}(\frac{1 - \cos \Delta x)}{\Delta x}) = 0$$

Sería interesante que usted verificara estos límites teoricamente y a continuación los calculara con EL DERIVE haciendo, al mismo tiempo, un gráfico de las funciones. Por lo tanto

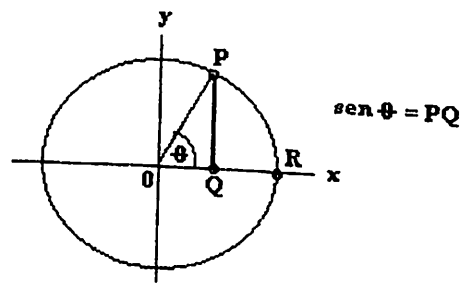
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \cos x$$

y en consecuencia:

$$\frac{d}{dx}[sen\, x] = \cos x$$

Justificaremos intuitivamente que $\lim_{\Delta x \to 0}(\frac{sen\,\Delta x}{\Delta x}) = 1$ y el lector puede hacer lo mismo con $\lim_{\Delta x \to 0}(\frac{1-cos\,\Delta x}{\Delta x}) = 0$. En efecto, recordemos que la medida en radianes de un ángulo es la longitud del arco subtendido en un círculo unitario, cuando el vértice del ángulo está en el centro del círculo.

figura 3




La figura sugiere que cuando $\theta$ tiende a cero la longitud del segmento PQ y la del arco PR se harán más y más iguales el uno al otro y por lo tanto su razón tenderá a la unidad. Esto es:

$$\frac{sen\,\theta}{\theta} = \frac{\text{longitud de PQ}}{\text{longitud de PR}} \to 1 \quad \text{cuando } \theta \to 0$$

Tal como lo hicimos con las funciones algebraicas, podemos generalizar esta fórmula con la regla de la cadena. Si consideramos la función $y = sen\,u$, donde u es una función de x resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = cos\,u\ \frac{du}{dx}$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dx}[sen\,u] = cos\,u\ \frac{du}{dx}$$

La obtención de la derivada del resto de las funciones trigonométricas no varía sustancialmente. Sin embargo resulta más sencillo utilizar las identidades trigonométricas para llegar al mismo resultado. Así, por ejemplo:

$$\frac{d}{dx}[cos\,u] = \frac{d}{dx}[sen\,(\frac{\pi}{2} - u)] = cos(\frac{\pi}{2} - u)(-\frac{du}{dx})$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dx}[cos\,u] = -sen\,u\ \frac{du}{dx}$$

Si consideramos la indentidad $tg\,u = \frac{sen}{cos\,u}$ podemos aplicar la regla para derivar un cociente y obtener:

$$\frac{d}{dx}[tg\,u] = \frac{(cos\,u)(cos\,u)\,u' - (sen\,u)(-sen\,u)u'}{cos^2 u}$$

De lo cual se desprende de inmediato que

$$\frac{d}{dx}[tg\,u] = \frac{(cos^2 u + sen^2 u)u'}{cos^2 u} = (\frac{1}{cos^2 u})u' = sec^2 u\,\frac{du}{dx}$$

A continuación se da, sin demostración, un resumen de las fórmulas de las derivadas de las funciones trigonométricas.

| | |
|---|---|
| a) $\frac{d}{dx}[sen\,u] = cos\,u\,\frac{du}{dx}$ | b) $\frac{d}{dx}[cos\,u] = -sen\,u\,\frac{du}{dx}$ |
| c) $\frac{d}{dx}[tg\,u] = sec^2 u\,\frac{du}{dx}$ | d) $\frac{d}{dx}[ctg\,u] = -csc^2 u\,\frac{du}{dx}$ |
| e) $\frac{d}{dx}[sec\,u] = sec\,u\;tg\,u\,\frac{du}{dx}$ | f) $\frac{d}{dx}[csc\,u] = -csc\,u\;ctg\,u\,\frac{du}{dx}$ |

**Ejemplo 24**

Hallar la derivada de las siguientes funciones: a) $y = cos\,2x^2$ b) $y = tg^3 2x$ c) $y = csc(\frac{x}{3})$ d) $y = e^{-2x}\,ctg\,x$

Solución a) Supongamos que $u = 2x^2$. Aplicando la fórmula correspondiente resulta:

$$y' = -sen\,u\,\frac{du}{dx} = -sen\,2x^2\,\frac{d}{dx}[2x^2] = -(sen\,2x^2)(4x) = -4x sen\,2x^2$$

b) Si hacemos $u = 2x$, resulta: potencia, resulta:

$$y' = 3\,tg^2\,u\,\frac{du}{dx} = 3tg^2\,2x\,\frac{d}{dx}[2x] = 3\,tg^2\,2x\,(2) = 6\,tg^2\,2x$$

c) Suponiendo que $u = \frac{x}{3}$, resulta:

$$y' = -csc\,u\,cotg\,u\,\frac{du}{dx} = -csc\,\frac{x}{3}\,cotg\,\frac{x}{3}\,\frac{d}{dx}[\frac{x}{3}] = -\frac{1}{3}\,csc\,\frac{x}{3}\,cotg\,\frac{x}{3}$$

d) Aplicando la regla del producto de dos funciones, se tiene:

$$y'(x) = e^{-2x}(-csc^2 x) + (ctg\,x)(e^{-2x})(-2) = -e^{-2x}(csc^2 x + 2ctg\,x)$$

# 3.10 Ejercicios propuestos

1. Hallar las derivadas de las siguientes funciones.

   a) $y = 2cos\,\frac{2x}{5}$

   b) $y = x\,sen\,x$

   c) $y = sen\,x\,cos\,x$

   d) $y = \sqrt{sen\,x\,tg\,x}$

   e) $y = \frac{ctg\,x\,tg\,x}{3x}$

   f) $y = x\,sen\,\frac{1}{x}$

   g) $y = sec^3 4x$

   h) $y = \frac{1}{2}x\,4\,tg\,x$

   i) $y = \frac{tg\,x^2 - x^2}{sen\,x}$

2. Hallar la derivada de cada una de las funciones siguientes.

   a) $y = t^2 sen\,t$

   b) $y = -x - tg\,x$

   c) $y = \frac{cos\,t}{t}$

   d) $y = \frac{sen\,x}{x}$

   e) $y = (\theta + 1)cos\theta$

   f) $y = x + ctg\,x$

   g) $y = \frac{sec\,x}{x}$

   h) $y = -csc\,x + ctg\,x$

   i) $y = \frac{tg\,x - x}{sen\,x}$

3. Hallar la derivada de cada una de las funciones siguientes.

   a) $y = \frac{1 + csc\,4x}{1 - csc\,7x}$

   b) $y = -x - tg\,(sen\,x)$

   c) $y = \frac{cos\,x}{x-1}$

   d) $y = \frac{sen\,x - cos\,x}{sen\,\sqrt{x}}$

   e) $y = (\theta + csc\,\theta)\sqrt{3\theta}$

   f) $y = \frac{\sqrt{sen\,x} + ctg\,x}{x}$

   g) $y = \frac{tg\,x}{x}$

   h) $y = tg\,x + \frac{1}{sen\,x}$

   i) $y = \frac{ctg\,x - 1}{cos\,x}$

4. Hallar la ecuación de una recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto que se indica.

   d) $y = tg\,x - 1$ 1. en $x = \frac{\pi}{4}$

   e) $y = 1 - sec\,\theta$ 2. en $\theta = \frac{\pi}{3}$

5. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el intervalo $[0, \pi]$

   a) $y = sen^2 x(x-1)$, en $x = 0.3$ b) $y = t^2 sen\,t$, en $t = 0$,

6. Trace, con el DERIVE, el gráfico de las funciones del problema 5 y grafique las tangentes.

# 3.11 El DERIVE

Al ejecutar EL DERIVE la pantalla aparece dividida en dos partes. La parte superior, en la cual se leen las especificaciones relativas al programa y la parte inferior en la cual se lee lo siguiente:

| |
|---|
| **Command:** Author, Build, Calculus, Declare, Expand, Factor, Help, Jump, Solve, Manage, Options, Plot, Jump, Remove, Simplify, Transfer, move, Window, Approx. |

Con la barra espaciadora usted puede mover el cursor sobre cada una de las funciones que aparecen a la derecha de **Command.** Para ejecutarlas, después que el cursor este sobre la función elejida, es suficiente presionar la tecla **Enter.**

**Ejemplo 25**

Calcular la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x-1}$.

1. En **Command :** ponga el cursor en **Author** y presione la tecla Enter.
2. Aparece **Author expression:** Escriba sqrt($x - 1$) y presione la tecla Enter. En la parte superior aparece $\sqrt{x-1}$ y en la inferior aparece Command. Ponga el cursor en **Calculus** y presione la tecla Enter.
3. Aparece **Calculus:** Ponga el cursoe en Differentiate y presione la tecla Enter.
4. Aparece Calculus Diffrentiate espression #1. Presione la tecla Enter
5. Aparece Calculus Differentiate variable x. Si su variable es x presione la tecla Enter. Si no es así, cambiela por "su variable" y presione la tecla Enter.
6. Aparece **Calculus Differentiate order 1:** Si calcula la primera derivada presione la tecla Enter.
7. En la parte superior de las pantalla aparece $\frac{d}{dx}\sqrt{x-1}$ Ponga el cursor en Simplify y presione la tecla Enter.
8. En la parte superior de la pantalla aparece $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$, que es la derivada de la función propuesta.

# 3.12 Ejercicios propuestos

Utilice EL DERIVE para resolver los siguientes ejercicios.

1. Trace el gráfico de la función $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2}$ y determine los intervalos donde la función tiene derivada positva o negativa.

2. Calcule la derivada de la función $f(x) = \frac{x^3-3x-2}{x-1}$ en los puntos $x = 0$ y $x = 2$. Analice el gráfico de la función y diga en que puntos la pendiente de la recta tangente es cero.

3. Un estudio de productividad sobre el turno matinal en una cierta fábrica indica que un trabajador medio que llega al trabajo a las 8 a.m. habrá montado $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$ radio transistores x horas después. Trace un gráfico de la función y halle la hora en que el trabajador alcanza su máximo ritmo de producción.

4. Con EL DERIVE, trace los gráficos de las funciones 2a), 2b) y 2c) de los ejercicios propuestos 3.10 y halle, en cada uno, un intervalo en el cual la pendiente de las rectas tangentes a la curva en dicho intervalo sea positiva.

5. Trace con el DERIVE la función $y = e^{x^2-1}$ y determine (si lo hay) un intervalo donde la pendiente de las rectas tangentes a la curva sean negativas.

6. Considere el gráfico de la función $y = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 2x - 5$ y halle los intervalos donde la función tiene derivada positiva. Usted puede

7. Para cada uno de los siguientes polinomios, trace un gráfico de la función y de su derivada y explique la conexión entre ellas. a) $y = -6 + 11x - 6x^2 + x^3$ b) $y = 8 - 4x - 10x^2 + x^3 + 4x^4 + x^5$

8. Considere la función $y = x^2 + 2$ y trace (a mano) el gráfico de su derivada en el intervalo $[0, 5]$. Verifique su gráfico utilizando el DERIVE.

# Capítulo 4 La optimización

**Objetivos**

1. Comprender el concepto de optimización y construir y optimizar modelos matemáticos sencillos, continuos y discretos.
2. Aprender a trazar curvas utilizando el aparato matemático diferencial.
3. Aplicar los conceptos de primera y segunda derivada a problemas de velocidad, aceleración y de otra naturaleza.
4. Aprender a derivar implicitamente y aplicar este concepto a problemas de razones relacionadas.
5. Estudiar el concepto de aproximación por medio de diferenciales, su interpretación geométrica y sus aplicaciones.
6. Estudiar el concepto de derivación de funciones paramétricas y sus aplicaciones
7. Utilizar EL DERIVE para estudiar los conceptos de la optimización.

## 4.1 Introducción

Hasta ahora hemos construido y optimizado algunos modelos matemáticos sencillos; aquellos posibles de construir y optimizar con las herramientas del álgebra clásica. En este capítulo aprenderemos técnicas de construcción y de optimización de modelos utilizándo las herramientas del Cálculo Diferencial. En general trabajaremos con dos tipos de problemas: aquellos que ya están dados en forma de una función y sólo debemos aplicarles las técnicas de solución; y otros que no están formulados mediante una función y se precisa una etapa adicional que consiste precisamente en llegar a formular la ecuación que deberá optimizarse.

**Ejemplo 1**

La Municipalidad de Copiapó está planeando construir un área de parqueo de camiones de carga a lo largo de la carretera en la entrada norte de la ciudad. El parqueo ha de ser rectangular con un área de 5 000 metros cuadrados y cercado por los tres lados no adyacentes a la carretera. ¿Cuál es la menor cantidad de cerca que se necesita para construir dicho parqueo ?

**La primera etapa** en la resolución del problema es precisar lo que se quiere optimizar. Identificado esto, se debe elegir una letra para representarla. En general se usan letras que estén relacionadas con la cantidad que se quiere optimizar. Por ejemplo, si se quiere optimizar el perímetro, que es nuestro caso, parece natural usar la letra **P**.

El objetivo es representar la cantidad que se quiere optimizar con una función de una variable a la cual podamos aplicar las técnicas del Cálculo Diferencial. A veces la cantidad a ser optimizada se expresa en forma más natural en términos de dos variables; si esto es así, se debe resolver el problema de escribir una de las variables en función de la otra.

En nuestro ejemplo la cantidad que debe ser optimizada se expresa más naturalmente con dos variables. Sin embargo con información adicional se puede escribir una de las variables en función de la otra. Para visualizar mejor nuestro problema dibujamos un diagrama como el de la figura (1).

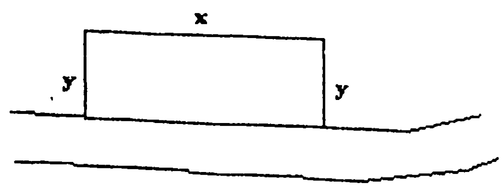



**figura 1**

Los lados menores del rectángulo se notaron con la letra $y$, en cambio el lado mayor se notó con la letra $x$. Y la letra $P$ nos indicará la cantidad que deberá ser optimizada, es decir, la cantidad de cerca que se requerirá.

De la figura se desprende que el perímetro es:

$$P = x + 2y$$

Por otra parte el hecho de que el área sea igual a 5 000 nos está diciendo que

$$(i) \quad xy = 5\,000, \quad \text{o bien} \quad (ii) \quad y = \frac{5\,000}{x}$$

La cantidad $P$ que queremos optimizar está escrita en función de dos variables y debemos expresarla sólamente el función de una. Parece natural entonces reemplazar la expresión (ii) en la función $P$. Esto nos conduce a la expresión:

$$P = x + 2\left(\frac{5\,000}{x}\right), \quad \text{es decir} \quad P = x + \frac{10\,000}{x}$$

Para la función $P(x)$, que expresa el perímetro del rectángulo, debe existir un valor de $x$ que haga que dicho perímetro sea mínimo. Un gráfico aproximado de la función $P(x)$ es el siguiente:

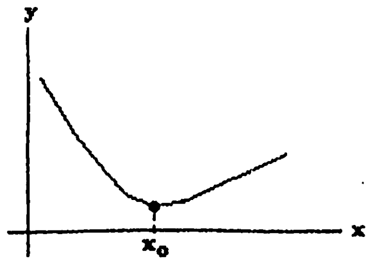



figura 2

La figura (2) muestra que en $x_0$ la función $P(x)$ alcanza su valor mínimo. ¿ Cómo hallar dicho valor utilizando las técnicas del Cálculo Diferencial ? Observemos que la pendiente de la recta tangente en $x_0$ es igual a cero, por lo tanto si derivamos la función y le imponemos a dicha derivada la condición de ser igual a cero, podemos hallar dicho valor. En efecto:

$$P'(x) = 1 - \frac{10\,000}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{x^2 - 10\,000}{x^2} = 0$$

Pero

$$\frac{x^2 - 10\,000}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow x^2 - 10\,000 = 0$$

Las soluciones de la última ecuación son $x = \pm 100$

En la mayoría de los problemas de optimización la variable independiente está sujeta a restricciones, es decir, el problema tiene una interpretación práctica sólo cuando dicha variable pertenece a un cierto intervalo. En nuestro caso la variable $x$ debe ser mayor que cero, es decir, $x \in ]0, +\infty[$. En consecuencia debemos descartar la posibilidad de que $x = -100$ sea el punto donde las función alcanza su valor mínimo. Por lo tanto el valor buscado es $x_0 = 100$.

Estamos en condiciones de hallar las dimensiones del rectángulo cuya área es igual a 5 000 metros cuadrados. De la expresión (ii) resulta:

$$y = \frac{5\,000}{100} = 50$$

Por lo tanto el parqueo debe tener 100 metros de largo por 50 metros de ancho.

El ejemplo anterior es bastante representativo de una aplicación de **máximos y mínimos**, capítulo de la matemática que resuelve el problema de determinar el valor **máximo o mínimo** que alcanza una función en un intervalo de números reales. Note que hemos resuelto el problema basándonos en la suposición (motivada geometricamente) de que la función $P(x)$ alcanza su valor mínimo en el punto donde ésta tiene una tangente horizontal. En lo que sigue analizaremos este hecho en una forma más rigurosa.

## 4.2 Máximos y mínimos relativos

En esta sección aprenderemos un procedimiento sistemático para localizar e identificar máximos y mínimos de funciones y como utilizar el concepto de derivada para esbozar sus gráficos.

En lo que sigue diremos que el valor $f(c)$ es un valor **máximo local** de la función f si $f(c) \geq f(x)$ para cualquier x suficientemente próximo a **c**. Decimos también que el valor $f(c)$ es un **mínimo local** de f si $f(c) \leq f(x)$ para cualquier x suficientemente cerca de **c**

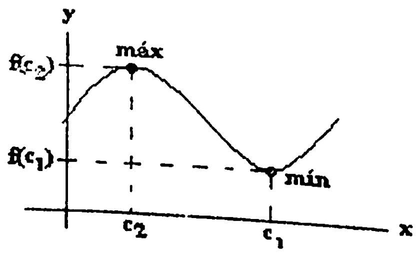
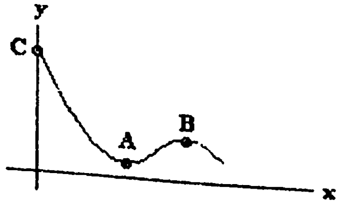



figura 3

La figura (3) muestra que un mínimo local se presenta como el punto más bajo de la curva en un intervalo. Y el máximo local se presenta como el punto más alto que cualquier otro próximo en el intervalo. Con frecuencia a los puntos de máximo y mínimo local se les llama puntos de **máximo y mínimo relativos**. Esto porque un máximo o mínimo relativo (locales) no son necesariamente el punto más alto o más bajo de un gráfico de la función. La figura (4) muestra este hecho.

figura 4




C es un máximo absoluto
A es un mínimo relativo
B es un máximo relativo

## 4.3 Crecimiento y decrecimiento de una función

Una función se dice que es creciente si su gráfico **sube** cuando x crece. Y se dice que es decreciente si su gráfico **baja** cuando x crece. Dicho en términos más formales:

Se dice que la función f es **creciente** en un intervalo si para dos números cualesquiera $x_1$ y $x_2$ en el intervalo, resulta,

$$x_1 < x_2, \text{ entonces } f(x_1) < f(x_2)$$

Se dice que la función f es **decreciente** en un intervalo si para dos números cualesquiera $x_1$ y $x_2$ en el intervalo, resulta,

$$x_1 < x_2, \text{ entonces } f(x_1) > f(x_2)$$

La figura (5) muestra que la función es creciente para $a < x < b$ y para $x > c$. En cambio es decreciente para $x < a$ y $b < x < c$. Si se conocen los intervalos en los que una función es creciente y decreciente, se pueden identificar fácilmente sus máximos y sus mínimos relativos. Un mínimo relativo aparece cuando la función deja de decrecer y empieza a crecer. En cambio un máximo relativo aparece cuando la función deja de crecer y empieza a decrecer. En la figura (5) se ve que el gráfico de f decrece hasta que $x = a$. A partir de este punto el gráfico empieza a crecer hasta que $x = b$. la función decrece nuevamente hasta $x = c$ y luego empieza a crecer. En los puntos "a" y "c" hay mínimos relativos, en cambio en "b" hay un máximo relativo.

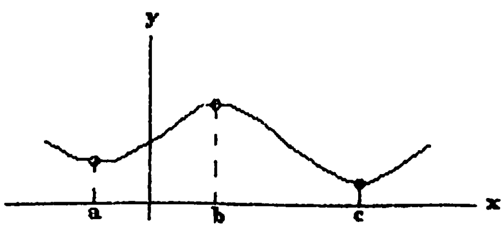
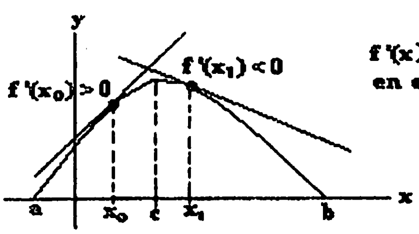



figura 5

## 4.4 El signo de la derivada

Con frecuencia es necesario averiguar los intervalo donde la función es creciente o decreciente. Puesto que la derivada no es otra cosa que la **pendiente** de la recta tangente, si la derivada es positiva en un determinado intervalo, la función es creciente en ese intervalo. En cambio si la derivada es negativa en un intervalo, la función es decreciente en dicho intervalo. La situación se ilustra en figura (6).

f '(x) > 0 para todo x en el intervalo ]a,c[




f '(x) < 0 para todo x en el intervalo ]c,b[

figura 6

Dicho más formalmente

a) Si $f'(x) > 0$ cuando $a < x < b$, entonces, **f** es creciente para $a < x < b$.

b) Si $f'(x) < 0$ cuando $a < x < b$, entonces, f es decreciente para $a < x < b$.

**Ejemplo 2**.

¿Donde es creciente y donde es decreciente la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$?

SOLUCIÓN. Puesto que la derivada de la función es $f'(x) = 2x - 4$, para determinar los intervalos pedidos debemos imponerle la condición a la ecuación $2x - 4$ que sea mayor o menor que cero, según que queramos saber donde la función es creciente o decreciente respectivamente. En efecto: a) De $f'(x) > 0$ resulta que $2x - 4 > 0$, en consecuencia $x > 2$ y por lo tanto la función es creciente en el intervalo $]2, +\infty[$. b) De $f'(x) < 0$, resula que $2x - 4 < 0$, en consecuencia $x < 2$ y por lo tanto la función es decreciente en el intervalo $]-\infty, 2[$

## 4.5 Los puntos críticos

Puesto que una función es creciente cuando su derivada es positiva y decreciente cuando su derivada es negativa, los únicos puntos en que dicha función puede tener un máximo o mínimo relativo son aquellos en que su derivada es cero, o su derivada no está definida.

> Un número **c** que está en el dominio de una función se llama **valor crítico** de f si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe. Y el punto $(c, f(c))$ se llama **punto crítico** de f

Observemos que no todo **punto crítico** corresponde necesariamente a un punto de máximo o de mínimo. En efecto, la figura (8) muestra que para $x = 0$ resulta que $f'(0) = 0$ sin embargo el punto $(0, 0)$ no es un punto de extremo.

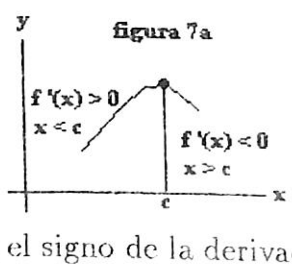


figura 7a

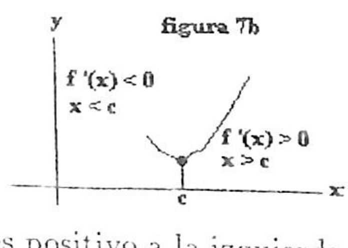


figura 7b

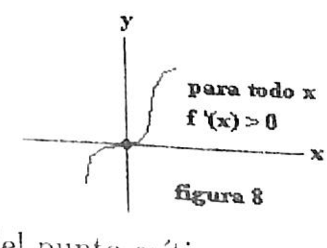


figura 8

Si el signo de la derivada es positivo a la izquierda del punto crítico y negativo a la derecha del punto crítico entonces el punto crítico es un máximo relativo. Por otra parte, si el signo de la derivada es negativo a la izquierda del punto crítico y positivo a la derecha, el punto crítico es un mínimo relativo. Si el signo de la derivada es el mismo a los dos lados del punto crítico, el punto no es de máximo ni de mínimo relativo. El siguiente ejemplo ilustra esta aseveración.

**Ejemplo 3**

Demuestre que la función $f(x) = 2 - x^3$ tiene un punto crítico pero no es un máximo ni mínimo relativo.

SOLUCIÓN. La derivada de f es $f'(x) = -3x^2$. Imponiéndole la condición de que $f'(x) = 0$ resulta la ecuación $3x^2 = 0$. Cuya solución es $x = 0$. En consecuencia $x = 0$ es un valor crítico y el punto $P(0,2)$ es un punto crítico. Sin embargo observe que:

$$f'(x) < 0 \text{ para } x < 0$$

y

$$f'(x) < 0 \text{ para } x > 0$$

En consecuencia el punto $P(0,2)$ no es un punto de extremo. La figura (9) nos muestra la situación.

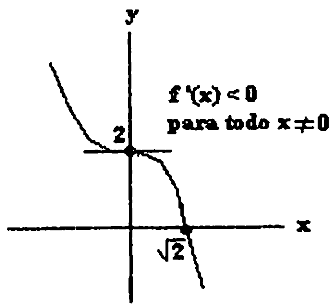



figura 9

**Ejemplo 4**

Las figuras (10) y (11) muestran dos funciones con extremos donde la derivada no está definida.

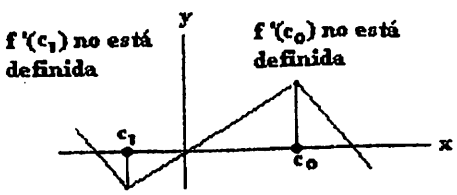



figura 10

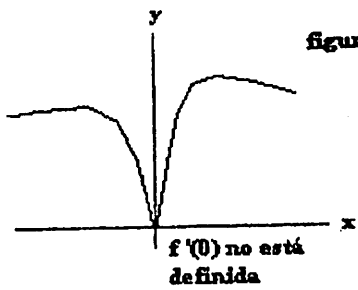



figura 11

## 4.6 Esbozo de curvas

Hemos visto la importancia de tener un gráfico aproximado de la función que estamos estudiando. Todas las observaciones precedentes nos sugieren un método general que podemos usar para trazar gráficos aproximados de las funciones que deseamos optimizar. El siguiente cuadro nos da una serie de reglas que podemos seguir cada vez que queremos trazar el gráfico aproximado de una función.

1. Halle la derivada de la función y resuelva la ecuación $f'(x) = 0$ para la variable $x$. Sustituya los valores de $x$ en la función $f$ para obtener las coordenadas de los puntos críticos. Incluya los valores de $x$ para los cuales la derivada no exista o no esté definida.
2. Marque los puntos críticos en el gráfico. Estos son los únicos puntos en los que pueden aparecer extremos relativos.
3. Determine donde la función es creciente o decreciente verificando el signo de la derivada en un pequeño intervalo que contenga los valores críticos.
4. Trace el gráfico de forma que crezca en los intervalos en los que la derivada es positiva, decrezca en los intervalos en los que la derivada es negativa y sea horizontal donde $f'(x) = 0$.

**Ejemplo 5**

Considere la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ y determine los intervalos donde la función es creciente y decreciente. Halle sus extremos relativos y trace su gráfico.

SOLCUIÓN. 1) Calculamos la derivada $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$ y resolvemos la ecuación $6x^2 + 6x - 12 = 0$. Resulta que:

$$6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1) = 0$$

Por lo tanto los valores críticos son $x = -2$ y $x = 1$. En consecuencia los puntos críticos son $P_1(-2, f(-2)) = (-2, 13)$ y $P_2(1, f(1)) = (1, -14)$

2) Empezamos el gráfico de la función dibujando los puntos $P_1$ y $P_2$ en el sistema cartesiano de coordenadas. No olvide que en estos puntos la función tiene tangentes horizontales. Dibuje pequeños segmentos sobre los puntos críticos para recordar este hecho.

3) Para determinar donde la curva es creciente o decreciente verificamos el signo de la derivada en torno a valores cercanos de $-2$ y de 1, tanto a su derecha como a su izquierda. Observamos lo siguiente:

i) $f'(-2,1) > 0$ y $f'(-1,9) < 0$. Esto nos dice que la función es creciente a la izquierda $-2$ y decreciente a su derecha. Por lo tanto $P_1$ es un máximo relativo de la función.

ii) $f'(0,9) < 0$ y $f'(1,1) > 0$. Esto nos dice que la función es decreciente a la izquierda de 1 y creciente a su derecha. Por lo tanto $P_2$ es un mínimo relativo de la función.

El siguiente **cuadro de variación** muestra el comportamiento de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ en su dominio.

| $x$ | $]-\infty,-2[$ | $-2$ | $]-2,1[$ | $1$ | $]1,+\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signo de $f'(x)$ | $+$ | | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

La tabla muestra claramente que los valores críticos son $x = -2$ y $x = 1$ y que la función crece ( $\nearrow$ ) en los intervalos $]-\infty,2[$ y $]1,+\infty[$, decreciendo ( $\searrow$ ) en el intervalo $]-2,1[$. La figura (12) muestra el gráfico aproximado de la función f.

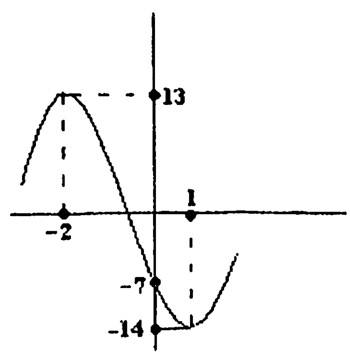



figura 12

**Ejemplo 6**

Trace el gráfico de la función $f(x) = 2 + (x-1)^3$.

1) La derivada de la función f es $f'(x) = 3(1-x)^2$. La solución de la ecuación $3(1-x)^2 = 0$ es x=1. En consecuencia el único punto crítico es $P(1, f(1)) = (1,2)$.

2) Empezamos el gráfico de la función dibujando el punto crítico en un sistema cartesiano de coordenadas.

3) Para determinar donde la función es creciente o decreciente analizamos el signo de la derivada para valores muy cercanos al valor crítico, tanto a su derecha como a su izquierda.

Observe que $f'(0,9) > 0$ y $f'(1,1) > 0$, por lo tanto la función es siempre creciente. Esto significa que el punto crítico no es punto de máximo ni de mínimo.

El siguiente es el cuadro de variación de la función $f(x) = 2 + (x-1)^3$.

| $x$ | $]-\infty, 1[$ | $1$ | $]1, +\infty[$ |
|---|---|---|---|
| signo de $f'(x)$ | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ |

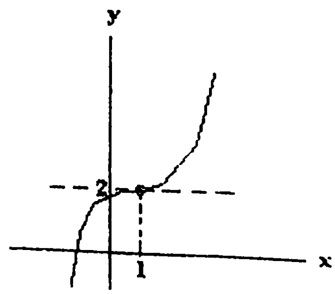



figura 13

La figura (13) muestra el gráfico aproximado de la función $f(x) = 2 + (x-1)^3$.

## 4.7 Máximos y mínimos absolutos

En la mayoría de los problemas prácticos de optimización el objetivo es hallar el mínimo absoluto o máximo absoluto de una función particular en algún intervalo, más que un máximo o mínimo relativos.

El máximo absoluto de una función sobre un intervalo es el mayor valor de la función en ese intervalo. Y el mínimo absoluto sobre un intervalo es el menor valor de la función sobre dicho intervalo.

> Supóngase que $f(c)$ es el valor máximo o mínimo absoluto de la función $f$ en el intervalo $[a, b]$. Entonces **c** es o bien un punto crítico de $f$ o uno de los extremos **a** o **b**

La observación anterior sugiere el siguiente procedimiento simple para localizar e identificar los extremos absolutos de funciones continuas sobre intervalos cerrados.

1. Halle los valores críticos $x$ de $f$, en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. Calcule $f(x)$ en esos valores críticos y además en los extremos $x = a$ y $x = b$.
3. Seleccione los valores mayor y menor de $f(x)$ obtenidos en el paso 2. Estos son los **máximos** y **mínimos absolutos respectivamente.**

Las figuras (14), (15), (16) y (17) muestran gráficos de funciones que ilustran los conceptos de máximos y mínimos absolutos.

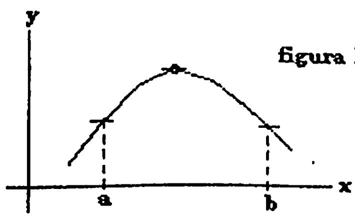


**figura 14**

**el máximo absoluto coincide con el máximo relativo**

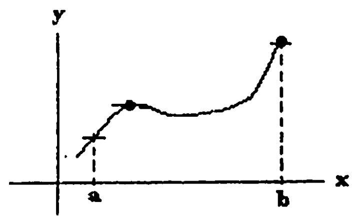


**figura 15**

**el máximo absoluto está en un extremo**

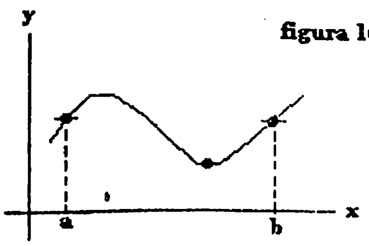


**figura 16**

**el mínimo absoluto coincide con el mínimo relativo**

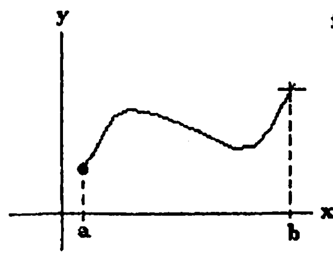


**figura 17**

**el mínimo absoluto está en un extremo**

## Ejemplo 7

Halle el máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ sobre el intervalo cerrado $[-3, 0]$.

SOLUCIÓN. Calculando la derivada y haciéndola igual a cero se obtiene

$$f'(x) = 6(x^2 + 6x - 12) = 6(x + 2)(x - 1) = 0$$

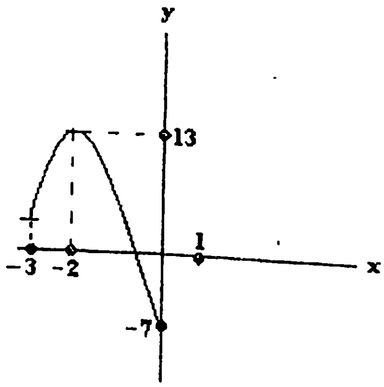
Las soluciones de la ecuación anterior (valores críticos) son $x = -2$ y $x = 1$.

Observe que de estos dos valores, solamente $x = -2$ pertenece al intervalo cerrado $[-3, 0]$. Calculando $f(x)$ en $x = -2$ y en los puntos extremos $x = -3$ y

$x = 0$ se obtiene:

$$f(-2) = 13, \qquad f(-3) = 2, \qquad f(0) = -7$$

Comparando estos tres valores, se puede concluir que el máximo absoluto de f en el intervalo $-3 \leq x \leq 0$ es $f(-2) = 13$ y el mínimo absoluto es $f(0) = -7$. La figura muestra (18) este hecho.




**Ejemplo 8**

Durante varias semanas el Departamento de Carreteras del Ministerio de Transporte ha estado registrando la velocidad del tráfico en una de las salidas de Santiago a la carretera norte. Los datos sugieren que entre la 1;00 y las 6;00 p.m. en un día normal de la semana la velocidad del tráfico en la salida es aproximadamente de $s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 40$ $[\frac{km}{hr}]$ donde t es el número de horas desde mediodía. ¿ En que momento entre la 1;00 y las 6;00 p.m. el tráfico es más rápido y en que momento es mas lento ?

SOLUCIÓN. El objetivo es hallar el máximo y el mínimo absolutos de la función $s(t)$ en el intervalo $0 \leq x \leq 6$. A partir de la derivada

$$s'(t) = 6t^2 - 42t + 60 = 6(t-2)(t-5)$$

Resolviendo la ecuación $6(t-2)(t-5) = 0$, se obtienen los valores críticos

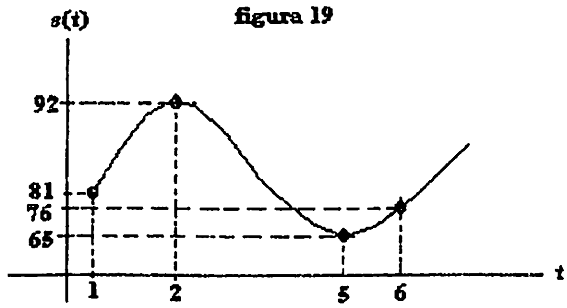
$$t = 2 \quad y \quad t = 5$$

ambos pertenecientes al intervalo cerrado $[1, 6]$.

Calculamos ahora $s(t)$ para estos valores de t y además en los extremos $t = 1$ y $t = 6$ del intervalo. Se obtiene que

$$s(1) = 81 \quad s(2) = 92 \quad s(5) = 65 \quad s(6) = 76$$

Como el mayor de esos valores es $s(2) = 92$ y el menor es $s(5) = 65$ podemos concluir que el tráfico se mueve más rápidamente a las 2;00 p.m, cuando su velocidad es de 92 $\frac{km}{hr}$ y más lentamente a las 5;00 p.m, cuando su velocidad es de 65 $\frac{km}{hr}$. La figura (19) muestra el gráfico de la función $s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 40$




**Ejemplo 9**

Cuando usted tose, el radio $r$ de la traquea decrece afectando la velocidad del aire en ella. Si $r_0$ es el radio normal de la traquea, la relación entre la velocidad $v$ del aire y el radio $r$ de la traquea durante un estornudo viene dada por una función de la forma

$$v(r) = ar^2(r_0 - r)$$

donde $a$ es una constante positiva. Determine el radio $r$ de la traquea para el cual la velocidad del aire es mayor.

SOLUCIÓN. Debemos determinar el intervalo en donde el fenómeno de contracción de la traquea tiene sentido. Observe que el radio $r$ de la traque contraida no puede ser mayor que el radio normal $r_0$; es decir, debe ocurrir que $0 \leq r \leq r_0$. En consecuencia debemos determinar el máximo absoluto en el intervalo cerrado $[0, r_0]$

Diferenciando la función $s(r)$ e igualándola a cero, se obtiene

$$s'(r) = -ar^2 + (r_0 - r)(2ar) = ar(2r_0 - 3r) = 0$$

De esto resulta que

$$ar(2r_0 - 3r) = 0 \Longleftrightarrow r = 0 \quad o \quad r = \frac{2}{3}r_0$$

Ambos valores de $r$ están en el intervalo $[0, r_0]$ y uno de ellos (el cero) es al mismo tiempo un extremo del intervalo. Sin embargo sólo uno de ellos es el máximo absoluto. Calculando $s(r)$ para esos valores de $r$, y también en el extremo $r = r_0$ se obtiene

$$s(0) = 0, \qquad s(\frac{2}{3}r_0) = \frac{4a}{27}r_0^3, \qquad s(r_0) = 0$$

Comparando estos valores se puede concluir que la velocidad del aire es máxima cuando el radio de la traquea contraida es $\frac{2}{3}r_0$, esto es, cuando es igual a $\frac{2}{3}$ del radio de la traquea sin contraer. En la figura (20) se esboza un gráfico de la función. Observe que las intersecciones con el eje $r$ son evidentes a partir de la ecuación

$$ar^2(r_0 - r) = 0$$

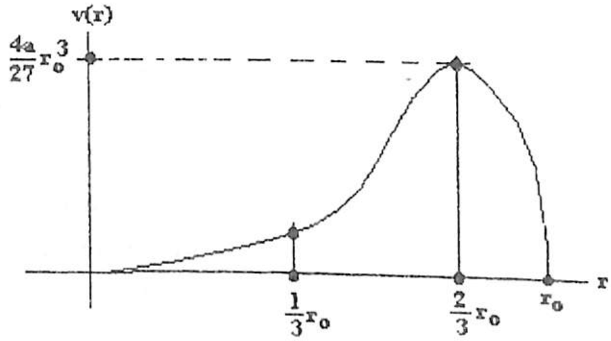



figura 20

**Ejemplo 10**

Una caja abierta de base cuadrada debe tener 108 centímetros cuadrados de superficie. ¿ Cuáles deben ser las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo ?

SOLUCIÓN Debemos precisar, en primer lugar, lo que queremos optimizar. En este caso deseamos optimizar el volumen de una caja de base cuadrada, (fig. 21), es decir, optimizar la función

(i) $\quad V(x) = x^2h$

Observemos que la caja esa abierta y que su superficie es igual a 108 $cm^2$. Expresamos esta idea mediante la ecuación

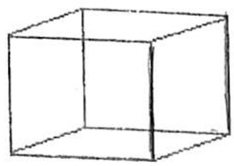


figura 21

(ii) $\quad S = x^2 + 4xh = 108$

$S = 108\ cm^2$

Notemos que hemos logrado expresar las condiciones del problema mediante dos ecuaciones con dos variables. El siguiente paso es expresar el volumen mediante una ecuación de una única variable. Para ello despejamos $h$ en función de $x$ en la ecuación (ii). Es decir

$$4xh = 108 - x^2 \Longleftrightarrow h = \frac{108 - x^2}{4x}$$

Sustituyendo este valor de $h$ en la ecuación (i) se obtiene

$$V(x) = x^2\left(\frac{108 - x^2}{4x}\right) = 27x - \frac{x^3}{4}$$

De acuerdo a las condiciones del problema la variable $x$ está sujeta a la restricción

$$0 < x \leq \sqrt{108}$$

En consecuencia los valores críticos de la función $V(x)$ deben pertenecer a dicho intervalo. Calculando la derivada y haciéndola igual a cero, se obtiene

$$\frac{dV}{dx} = 27 - \frac{3x^2}{4} = 0 \Longleftrightarrow \frac{108 - 3x^2}{4} = 0 \Longleftrightarrow 108 - 3x^2 = 0$$

De la ecuación $3x^2 = 108$ se desprende que $x = 6$.

Para determinar si el valor crítico hallado corresponde a un punto de máximo debemos verificar el signo de la derivada, tanto a la izquierda como a la derecha de $x = 6$. Se puede verificar fácilmente que

$$f'(x) > 0 \text{ si } x < 6 \text{ y que } f'(x) < 0 \text{ si } x > 6$$

En consecuencia el punto de máximo lo alcanza la función cuando $x = 6$. Esto significa que los lados de la base de la caja miden 6 cm. Para determinar su altura reemplazamos este valor en la ecuación

$$h = \frac{108 - x^2}{4x}$$

De donde resulta que

$$h = \frac{108 - 36}{24} = \frac{72}{24} = 3 \text{ cm.}$$

Por lo tanto la caja de base cuadrada mide 6 centímetros de lado por 3 centímetros de alto.

## 4.8 Optimización de funciones discretas

El próximo ejemplo es una aplicación del Cálculo a un problema práctico que requiere de una análisis adicional para obtener una solución satisfactoria.

**Ejemplo 11**

Una compañía de buses de la ciudad de Mendoza (Argentina) desea promover el turismo hacia Copiapó y para ello alquila buses de 50 plazas a grupos de 35 o más personas en las siguientes condiciones:

a) Si el grupo contiene exactamente 35 personas, cada persona paga 60 dolares por pasaje.

b) En grupos mayores la tarifa de todos se reduce en 1 dolar por cada persona que sobrepase las 35.

¿ Cuál es el tamaños del grupo para el cual los ingresos de la compañía sean máximos ?

Solución. Parece claro que la cantidad que debemos optimizar es el **ingreso** de la compañía. Si llamamos $I$ al ingreso, tenemos lo siguiente

$$I = (\text{número de personas del grupo})(\text{tarifa por persona})$$

Si representamos por $x$ el número de personas que exceden de 35, entonces tenemos las siguientes igualdades:

a) Número de personas en el grupo $= 35 + x$
b) Tarifa por persona $= 60 - x$
En consecuencia la función ingreso es $I(x) = (35+x)(60-x)$. Como $x$ representa el número de personas que exceden de 35, y el tamaño total del grupo debe estar entre 35 y 50, se sigue que

$$35 \leq x \leq 50$$

En consecuencia el objetivo es hallar el máximo absoluto de la función $I(x)$ en el intervalo cerrado $[0,15]$. Resulta entonces que

$$I'(x) = 25 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{25}{2} = 12,5$$

Puesto $x = 12,5$ es un valor crítico, analizamos este valor junto con $x = 0$ y $x = 15$

$$R(0) = 2\,100, \quad R(12,5) = 2\,256,25 \quad R(15) = 2\,250$$

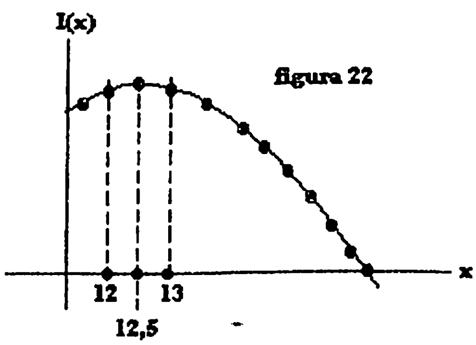
De esto se sigue que el máximo absoluto de $I(x)$ en el intervalo $[0,15]$ aparece cuando $x = 12,5$. Pero es obvio que la solución debe ser un número entero. Por lo tanto $x = 12,5$ no puede ser la solución al problema de optimización. Observe que $I(x)$ es creciente en el intervalo $0 < x < 12,5$, y decreciente para $x > 12,5$, como se ve en la figura (22)

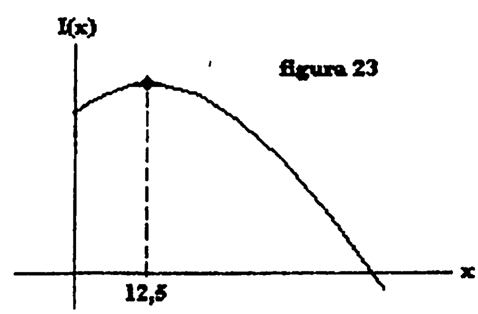
En consecuencia se sigue que $x = 12$, o bien $x = 13$, es el valor óptimo de $x$ que se está buscando. Finalmente, como

$$I(12) = 2\,256 \quad y \quad I(13) = 2\,256$$

se puede concluir que el ingreso de la compañía de autobuses será mayor cuando el grupo contenga 12 ó 13 personas por encima de 35; esto es, para grupos de 47 o 48 personas.

Una cuestión importante de hacer notar es que el gráfico de la función $I(x)$ es realmente **una colección discreta de puntos** correspondientes a los valores enteros de $x$ tal como muestra la figura (22). Pero, como no puede usarse el Cálculo Diferencial con una función de naturaleza discontinua, se supuso que se trataba de una función diferenciable que estaba definida para todos los valores de $x$ en el intervalo $[0, 15]$ y unimos los puntos de acuerdo a la figura (23). Después de aplicar las técnicas del **Cálculo**, al modelo continuo, se obtuvo una solución matemática que no era la solución del **problema práctico discreto**, pero que nos sugirió donde buscar la solución práctica.




# 4.9 Ejercicios propuestos

1. En los siguientes ejercicios determine los intervalos donde la función dada es creciente y decreciente. Halle sus extremos relativos y dibuje el gráfico.

   a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ c) $f(x) = x^3 - 3x - 4$ d) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 9x - 2$ e) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 100$ f) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 5$ g) $f(x) = 10x^6 + 24x^5 + 15x^4 + 3$ h) $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ i) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ j) $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$ k) $f(x) = 6x^2 + \frac{12\,000}{x}$ l) $y = 1 + x^{\frac{1}{3}}$ m) $y = x^{\frac{3}{5}}$

2. Esboce el gráfico de una función que tenga las propiedades siguientes a) $f'(x) > 0$ cuando $x < -5$ y cuando $x > 1$. b) $f'(x) < 0$ cuando $-5 < x < 1$. c)$f(-5) = 4$ y $f(1) = -1$

3. Esboce el gráfico de una función que tenga las propiedades siguientes a) $f'(x) < 0$ cuando $x < -1$ b) $f'(x) > 0$ cuando $-1 < x < 3$ y cuando $x > 3$. c) $f'(-1) = 0$ y $f''(3) = 0$.

4. Esboce el gráfico de una función que tenga las propiedades siguientes a) $f'(x) > 0$ cuando $-1 < x < 3$ y cuando $x > 6$. b) $f'(x) < 0$ cuando $x < -1$ y cuando $3 < x < 6$. c) $f'(-1) = 0$ y $f'(6) = 0$ d) $f'(x)$ no está definida en $x = 3$.

5. Demuestre, usando las técnicas del Cálculo, que el extremo relativo de la función $y = ax^2 + bx + c$ se encuentra en $-\frac{b}{2a}$.

6. Cuando se producen $q$ unidades de un cierto artículo, el costo total de la fabricación es de $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$ pesos. ¿ A que nivel de producción será menor el costo medio por unidad ?. Considere que el costo medio por unidad $A(q)$, es igual al costo total dividido por el número de unidades producidas.

7. En las siguientes funciones halle el máximo y el mínimo absolutos (si los hay) de la función dada en el intervalo especificado.

   a) $f(x) = x^2 + 4x + 5$; en $-3 \leq x \leq 1$. b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$; en $-3 \leq x \leq 2$ c) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 1$; en $0 \leq x \leq 5$. d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; en $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$ e) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; en $x > 0$. f) $f(x) = \frac{1}{x+1}$; en $x \geq 0$.

8. Un fabricante puede producir radios a transistores a un costo de 5 dolares cada una y estima que si se venden a $x$ dolares, los consumidores comprarán $20 - x$ radios por día. ? A qué precio debe vender las radios el fabricante para maximizar los beneficios ?

9. Suponga que $x$ años después de su fundación en 1960, una cierta organización de derechos humanos tiene un número de miembros igual a $f(x) = 100(2x^3 - 45x^2 + 264x)$. a) ¿ En qué momento entre 1960 y 1974 fue mayor el número de miembros ? b) ¿ En que momento entre 1961 y 1974 fue menor el número de miembros ?

10. La emisora Radio Universidad ha hecho un estudio de los hábitos de escucha de los habitantes de la ciudad de Copiapó entre las 5 p.m. y la medianoche. El estudio indica que el porcentaje de población adulta local que ha sintonizado Radio Universidad $x$ horas después de las 5 p.m. es $f(x) = \frac{1}{8}(-2x^3 + 27x^2 - 108x + 240)$. a) ¿ En qué momento, entre las 5 p.m. y medianoche está escuchando la radio el mayor número de gente ? b) ¿ En qué momento entre las 5 p.m. y medianoche está escuchando el menor número ?

11. Hay 320 metros de valla disponibles para encerrar un campo rectangular. ¿ Cómo debería usarse esta valla para que el área encerrada sea máxima ?.

12. Demuestre que de todos los rectángulos con un perímetro dado, el cuadrado es el que tiene mayor área.

13. Pruebe que de todos los rectángulos con área dada, el cuadrado es el que tiene el menor perímetro.

14. Se ha solicitado a un carpintero que construya una caja abierta de base cuadrada. Los lados de la caja costarán 300 pesos por metro cuadrado, y la base costará 400 pesos por metro cuadrado. ¿ Cuáles son las dimensiones dre la caja de mayor volumen que puede ser construida por 24 000 pesos ?

15. La concentración de oxígeno en un estanque contaminado con un residuo orgánico esta dada por la ecuación

$$f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}, \quad 0 \leq t \leq +\infty$$

donde $t$ es el tiempo en semanas. a) ¿ Cuándo se alcanza la concentración más baja de oxígeno ? b) ¿ Cuándo se alcanza la concentración más alta de oxígeno ?

16. Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba desde el suelo, de modo que su altura $h$ en el instante $t$ está dada por $h = -16t^2 + 144t$, donde $h$ se mide en metros y $t$ en segundos. ¿ Cuál es la máxima altura que alcanza el objeto ?

17. Se ha determinado que la concentración C de una cierta sustancia química en la sangre, tras $t$ horas de ser inyectada en el tejido está dada por la función

$$C = \frac{3t}{27 + t^3}$$

Determine el momento en que la concentración de la sustancia es máxima.

18. Determine dos números reales cuya diferencia sea 20 y su producto sea mínimo

19. Encuentre el punto $(x, y)$ de la recta $2x + y = 3$ que está más cerca del punto $(3, 2)$.

20. Considere la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 3ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$ y halle los intervalos donde la función es creciente y decreciente.

21. Dada la derivada de una cierta función, trace el gráfico de f.

$$f'(x) = \frac{x+3}{\sqrt{2x^2+x+1}}$$

22. ¿ En que punto la función dada no tiene derivada ?

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$$

23. Use el DERIVE para graficar la función dada y estime su dominio y rango. ¿ Es creciente la función ?, ¿ es decreciente ?

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$$

24. Use el DERIVE para graficar la función dada y estime su dominio y rango. ¿ Es creciente la función ?, ¿ es decreciente ?, ¿ en que puntos la función no es derivable ?

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$$

25. Utilice el DERIVE para graficar la función dada y determine los puntos en que la función no es derivable.

$$f(x) = \sqrt{\frac{|1-x^2|}{x}}$$

26. Utilice el DERIVE para graficar la función dada y determine los puntos en que la función no es derivable.

$$f(x) = \sqrt{\frac{|1-x^4|}{x}}$$

27. Utilice el DERIVE para graficar las funciones dadas y determine los puntos en que no son derivables.

*a)* $f(x) = x\, ln\, x(1+|x|)$ *b)* $g(x) = \dfrac{|lnx|}{x}$ c) $h(x) = \dfrac{1}{x + ln\,|x|}$

## Sir Isaac newton (1642-1727)

Los años 1685 y 1686 fueron de gran importancia para la humanidad. Newton a los 44 años de edad, había concluido casi la totalidad de su obra. El gran astrónomo y amigo de Newton, **Edmund Halley** leyó, en abril de 1686 ante la **Royal Society** un discurso sobre la gravedad y sus propiedades, en el cual destacaba que: "Isaac Newton ha encontrado la explicación de los movimientos celestes, tan fácil y natural, que la verdad se impone sin discusión alguna". La extraordinaria obra que contenía estos hechos apareció con el título de *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, (Principios Matemáticos de la Filosofía Natural ) en la cual desarrolla su teoría de la gravitación universal. El siguiente es un resumen, escrito por Newton, del prefacio de dicha obra.

### Prefacio de Newton a la Primera Edición de Philosophie Naturali Principia Mathematica

Según cuenta Pappus, los antiguos consideraban de la mayor importancia la mecánica para la investigación de las cosas naturales, y como los modernos — rechazando formas sustanciales y cualidades ocultas — intentan reducir los fenómenos de la naturaleza a leyes matemáticas, he querido en este trabajo cultivar la matemática en tanto se relaciona con la filosofía. Los antiguos consideraban dos aspectos en la mecánica: el racional, que procede con exactitud mediante demostraciones, y el práctico. Pertenecen a la mecánica práctica todas las artes manuales, de las que tomó la mecánica su nombre. Pero como los artífices no trabajan con absoluta exactitud, llega a ocurrir que lo perfectamente exacto se llama geométrico, y mecánico aquello que no es exacto. Sin embargo, los errores no deben ser atribuidos al arte, sino a los artífices.

Pero yo considero la filosofía más que las artes y no escribo sobre potencias manuales, sino naturales, tomando ante todo en cuenta las cosas que se relacionan con gravedad, levedad, fuerza elástica, resistencia de fluidos y fuerzas semejantes, tanto atractivas como impulsivas; por consiguiente, ofrezco esta obra como principios matemáticos de la filosofía, pues toda la dificultad de la filosofía parece consistir en pasar de los fenómenos de movimiento a la investigación de las fuerzas naturales, y luego demostrar los otros fenómenos a partir de esas fuerzas.

A eso apuntan las proposiciones generales de los dos primeros libros. En el tercero proporciono un ejemplo de esto en la explicación del Sistema de Mundo, pues mediante las proposiciones demostradas matemáticamente en los libros precedentes deduzco en el tercero de los fenómenos celestes la fuerza de gravedad con las cuales los cuerpos tienden hacia el sol y los diversos planetas.

Luego, a partir de esas fuerzas, mediante otras proposiciones igualmente matemáticas deduzco los movimientos de los planetas, los cometas, la luna y el mar. Me gustaría que pudiésemos deducir el resto de los fenómenos de la naturaleza siguiendo el mismo tipo de razonamiento a partir de principios mecánicos.

En efecto, muchas razones me inducen a sospechar que todos ellos pueden depender de ciertas fuerzas en cuya virtud las partículas de los cuerpos – por causas hasta hoy desconocidas – se ven mutuamente impelidas unas hacia otras y se unen en figuras regulares, o son repelidas y se alejan unas de otras.

Siendo desconocidas estas fuerzas, los filósofos han investigado en vano la naturaleza hasta hoy; pero espero que los principios aquí expuestos arrojarán cierta luz sobre este método de filosofar, o sobre alguno más veraz.

En la publicación de esta obra, el excepcionalmente perpicaz y eruditísimo señor Edmund Halley me ayudó no sólo a corregir los errores de imprenta y a preparar las figuras geométricas, sino que además el libro ha llegado a aparecer unicamente debido a su insistencia; cuando obtuvo de mi las demostraciones sobre la figura de las orbitas celestes, continuamente me urgió a comunicarlo a la Royal Society, la que más tarde – debido a su amable estímulo y a sus ruegos – me comprometió a la publicación.

Pero después de empezar a considerar las desigualdades de los movimientos lunares, y entrar en algunos otros problemas relacionados con las leyes y medidas de la gravedad y otras fuerzas y las figuras que describirían cuerpos atraidos de acuerdo con leyes dadas, y el movimiento de cuerpos pluarales entre si: el movimiento de cuerpos en medios resistentes; las fuerzas, densidades y movimientos de los medios; las órbitas de los cometas y cosas semejantes, pospuse la publicación hasta haber investigado esas materias y poder enunciar todo el conjunto.

Lo relacionado con los movimientos lunares (imperfectos como son) está reunido en los corolarios de la proposición LXVI, para evitar verme obligado a proponer y demostrar nitidamente las diversas cosas allí contenidas con un método más prolijo de lo que el tema merecía, interrumpiendo la serie de las otras proposiciones. Preferí insertar en lugares menos idoneos algunas cosas descubiertas después del resto, antes que cambiar el número de las proposiciones y las citas. Suplico de corazón que lo expuesto aquí pueda ser leido con indulgencia; y que mis trabajos en tema tan difícil puedan examinarse no tanto desde la perspectiva de la censura cuanto para remediar sus defectos.

Isaac Newton.

Cambridge, Trinity College, mayo 8, 1686.

## 4.10 La segunda derivada

En muchos problemas prácticos se busca determinar cuando el ritmo de cambio de una cantidad es máxima o mínima. Por ejemplo, el propietario de una fábrica puede querer determinar cuando un empleado está trabajando con máxima eficiencia, es decir, cuando el ritmo de producción del empleado es máximo. Un ingeniero de tráfico puede querer saber cuando se mueve más lentamente o más rapidamente el tráfico de una carretera, un economista puede querer predecir cuando crecerá el ritmo de la inflación, un físico puede querer saber el ritmo de cambio de la velocidad de una partícula con respecto al tiempo; es decir, puede -querer saber **cuál es la aceleración de la partícula.**

Si queremos saber cuándo es máximo o mínimo el ritmo de cambio de una función debemos calcular la derivada de su derivada, es decir, la segunda derivada de la función y a continuación maximizar o minimizar ese ritmo de cambio usando las técnicas de optimización.

| |
|---|
| **La segunda derivada de $f$ es la derivada de su derivada $f'$ y se representa con el símbolo $f''$.** |

La segunda derivada se representa con frecuencia mediante el símbolo $\frac{d^2y}{d^2x}$, en vez de $f''$.

**Ejemplo 13**

Calcule la segunda derivada de $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 8$.

SOLUCIÓN. Calculamos la primera derivada

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2$$

a continuación derivamos la función $f'(x)$

$$f''(x) = 12x^2 - 18x$$

**Ejemplo 14**

Calcule la segunda derivada de la función $y = (5x^4 - 4x)^4$

SOLUCIÓN. La primera derivada de la función $y$ es $\frac{dy}{dx} = 4(5x^4 - 4x)^3(20x^3 - 4)$. La segunda derivada es la derivada de un producto de funciones. Por lo tanto

$$\frac{d^2y}{d^2x} = 12(5x^4 - 4x)^2(20x^3 - 4)(20x^3 - 4) + 4(5x^4 - 4x)^3(60x^2)$$

## 4.11 La segunda derivada y la productividad máxima de un trabajador

El número de unidades que puede producir un trabajador industrial en $x$ horas viene dada por la función cuyo gráfico es el de la figura (29)

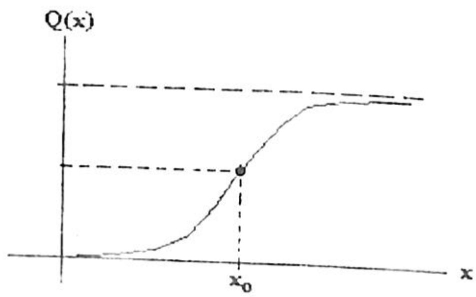



**figura 29**

El gráfico muestra que al principio el ritmo de producción es bajo, pero aumenta a medida que el trabajador se afirma en su rutina. Llega un momento en que el trabajador opera con eficiencia máxima, después de lo cual aparece la fatiga y el ritmo de producción decrece.

El momento de eficiencia máxima, llamado a veces **punto de los beneficios crecientes**, es el momento en que el ritmo de producción es mayor. Desde el punto de vista geométrico es el punto donde cambia la **concavidad** de la curva.

$\boxed{\text{Ejemplo 15}}$

Un estudio de productividad del turno matinal en una fábrica indica que un trabajador medio que llega al trabajo a las 8:00 a.m habrá producido

$$Q(t) = -t^3 + 9t^2 + 12t \text{ unidades, } t \text{ horas después}$$

¿ En qué momento de la mañana el trabajador está operando más eficientemente ?

SOLUCIÓN. El ritmo de producción del trabajador está dado por la primera derivada $Q'(t) = R(t) = -3t^2 + 18t + 12$ unidades por hora. Suponiendo que el turno matinal va de 8:00 a.m hasta mediodía el objetivo es maximizar la función $R(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 4$.

La derivada de $R(t)$ es

$$R'(t) = Q''(t) = -6t + 18 = 0 \Longleftrightarrow t = 3$$

Recordemos que el máximo de $R(t)$ se halla en el punto en que $R'(t) = 0$

Comparando los valores extremos del intervalo $[0,4]$ y el valor crítico $t = 3$, resulta

$$R(0) = 12, \quad R(3) = 39, \quad R(4) = 36$$

se puede concluir que el ritmo de producción será mayor y el trabajador estará operando más eficientemente cuando $t = 3$; esto es, a las 11:00 a.m. La figura (30) muestra el gráfico de la producción $Q(t)$ y la figura (31) muestra el gráfico del ritmo de producción $R(t)$. Observe que el ritmo de producción es máximo cuando $t = 3$

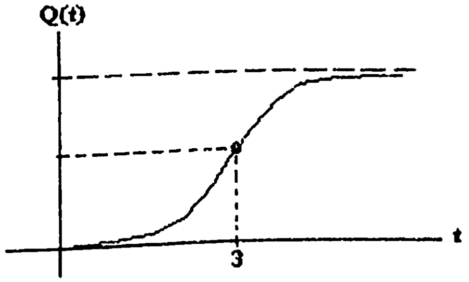



figura 30

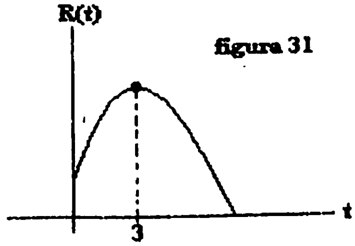



figura 31

## 4.12 La segunda derivada y la aceleración

Conviene precisar que a veces existe confusión entre el módulo (valor absoluto) de la velocidad y la **velocidad**. El módulo de la velocidad lo definimos como el valor absoluto de la velocidad y como tal es siempre no negativo. Esto significa que el módulo de la velocidad indica simplemente lo **deprisa** que se mueve un objeto, es decir **la rapidéz con que se mueve un objeto**. En cambio la velocidad indica también el sentido del movimiento.

**Ejemplo 16**

Un objeto se mueve a lo largo de una recta de acuerdo con la ecuación

$$s(t) = 2t^2 - 12t + 10$$

donde $s$ se mide en metros y $t$ en segundos. Calcular su velocidad cuando $t = 2$ y cuando $t = 4$. ¿ Cuándo la velocidad es igual a cero ?

SOLUCIÓN. El gráfico de la figura (32) se usa para representar la trayectoria del objeto que se mueve primero hacia atrás y después hacia adelante a lo largo de una recta. La parte redondeada de la trayectoria en realidad no existe e indica sólamente, que en ese instante, el objeto invierte el sentido del movimiento.

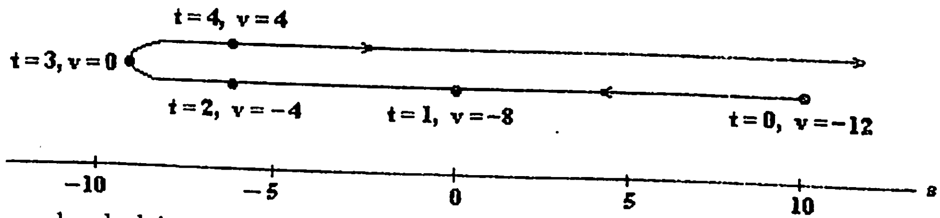



**figura 32**

En nuestro ejemplo el objeto se mueve primero en sentido negativo y según muestra el gráfico en $t = 0$ la velocidad es de $-12$ $[\frac{m}{s}]$.

Para hallar la velocidad del objeto derivamos la función $s(t)$. En efecto:

$$v(t) = s'(t) = 4t - 12$$

Por lo tanto cuando $t = 2$

$$v(2) = s'(2) = -4 \; [\frac{m}{s}]$$

lo que significa que la velocidad del objeto es igual a 4 $[\frac{m}{s}]$ y está moviéndose hacia la izquierda. Cuando $t = 4$ resulta

$$v(4) = s'(4) = 4 \; [\frac{m}{s}]$$

lo que significa que la velocidad del objeto es igual a 4 $[\frac{m}{s}]$ y está moviéndose hacia la derecha. Finalmente la velocidad es cero cuando

$$4t - 12 = 0, \text{ es decir, cuando, } t = 3 \text{ segundos}$$

**Si la velocidad es la razón de cambio de la posición del objeto con respecto al tiempo, ¿ cuál es la razón de cambio de la velocidad ?**

Al definir la velocidad como la primera derivada de $s(t)$, es decir

$$v(t) = s'(t)$$

la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo no es otra cosa que

$$v'(t) = s''(t)$$

A esta segunda derivada $s''(t)$ la llamamos **la aceleración** del objeto en el instante $t$ e indica la rapidéz con que el objeto cambia la velocidad.

| |
|---|
| Si $s = s(t)$ es la ecuación de posición de un objeto que se mueve a lo largo de una recta, la aceleración del objeto en el instante $t$ está dada por $$a(t) = v'(t) = s''(t)$$ donde $v(t)$ es la velocidad del objeto en el tiempo $t$ |

En el caso de un cuerpo que se lanza verticalmente hacia arriba, consideraremos la velocidad como positiva mientras el cuerpo se está elevando, cero en su altura máxima y como negativa cuando está cayendo.

**Ejemplo 17**

Conteste las siguientes preguntas de acuerdo a la figura (33). a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?. b) ¿Cuándo y con que velocidad choca la pelota con el suelo?. c) ¿Cuál es la aceleración de la pelota en $t = 3$ ?.

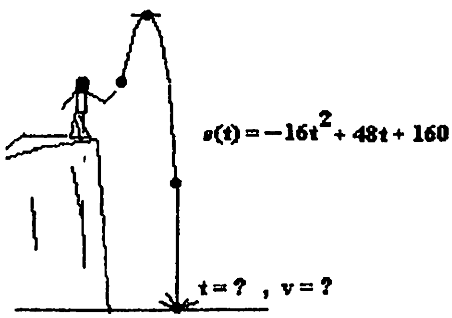



figura 33

SOLUCIÓN. a) La altura máxima la alcanza la pelota en el instante en que la velocidad pasa de positiva a negativa, es decir cuando $v(t) = 0$. Por lo tanto, si $v(t) = s'(t) = 0$, entonces, $-32t + 48 = 0$ y por lo tanto $t = \frac{3}{2}$.
En consecuencia la altura máxima de la pelota es

$$s(\frac{3}{2}) = -16(\frac{3}{2})^2 + 48(\frac{3}{2}) + 160 = 196 \text{ metros}$$

b) Puesto que el objeto alcanza el suelo cuando $s = 0$ se tiene que $s = -16t^2 + 48t + 160 = 0$. Resolviendo esta ecuación resulta

$$t^2 - 3t - 10 = (t-5)(t+2) = 0 \Longleftrightarrow t = 5 \quad o \quad t = -2$$

Considerando solamente la solución positiva, la pelota choca con el suelo después de 5 segundos y su velocidad es

$$v(5) = s'(5) = -32(5) + 48 = -112 \; [\frac{m}{s}]$$

c) La aceleración de la pelota es igual a la derivada de la velocidad, por lo tanto, si $v'(t) = -32$, resulta que

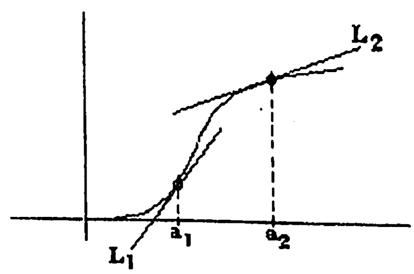
$$v'(3) = -32 \; [\frac{m}{seg^2}]$$

lo que significa que el ritmo de cambio de la velocidad con respecto al tiempo es de 32 metros por segundo cuando la pelota viene cayendo.

## 4.13 La segunda derivada y la concavidad

**El punto de los beneficios decrecientes** para la curva de producción de la figura (30) aparece cuanto $t = 3$. Antes de ese punto el ritmo de producción del trabajador estaba creciendo y después de dicho punto el ritmo de producción empezó a decrecer. La figura (34) muestra que una característica importante de este tipo de función es que **antes** del punto de los beneficios decrecientes las tangentes pasan por debajo de la curva y a partir de dicho punto las tangentes pasan por encima de la curva. Esta característica nos permite definir la noción de concavidad.

figura 34




Supóngase que la función $f$ es diferenciable en el punto **a** y que la recta $L$ sea tangente a la función $f$ en el punto (a,f(a)). Entonces decimos que la función f es:

a) **Cóncava hacia arriba** en **a** si en algún intervalo abierto que contenga a **a**, la gráfica de la función $f$ está sobre la tangente $L$.

b) **Cóncava hacia abajo** en **a** si en algún intervalo abierto que contenga a **a**, la gráfica de la función $f$ está bajo la tangente $L$

Observe que cuando una curva es cóncava hacia arriba, como en la figura (35), la pendiente de su tangente **crece cuando x crece**. Cuando una curva es cóncava hacia abajo, como en la figura (36), la pendiente de su tangente **decrece cuando x crece**. En lo que sigue analizaremos con más detalle este hecho.

figura 35

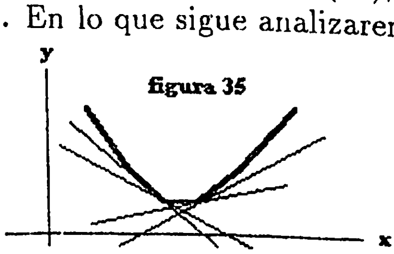
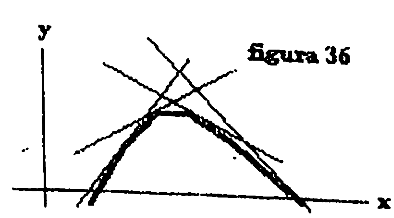



figura 36




## 4.14 El signo de la segunda derivada

La relación entre la concavidad y la pendiente de la tangente lleva a una caracterización simple de la concavidad en términos del signo de la segunda derivada. Supongamos que la segunda derivada $f''$ es positiva en un cierto intervalo. Lo anterior significa que **la primera derivada $f'$ debe ser creciente en el intervalo.** Pero $f'$ es la pendiente de la tangente, por lo tanto la pendiente de la tangente es creciente y así el gráfico de $f$ es cóncavo hacia arriba en en intervalo. Fig (35).

Por otra parte si $f''$ es negativa en un cierto intervalo, entonces, $f'$ es decreciente. Esto implica que la pendiente de la tangente es decreciente y así el gráfico de $f$ es cóncavo hacia abajo en el intervalo. Fig (36).-

De acuerdo a las observaciones anteriores, el siguiente es el significado geométrico de la segunda derivada.

| |
|---|
| a) Si $f''(x) > 0$ cuando $a < x < b$, entonces $f$ es concava hacia arriba en el intervalo $]a, b[$. |
| b) Si $f''(x) < 0$ cuando $a < x < b$, entonces, $f$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $]a, b[$. |

**Ejemplo 18**

Determine los intervalos de concavidad de la función $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8$

SOLUCIÓN. De acuerdo al criterio enunciado en el párrafo anterior debemos calcular la segunda derivada de $f$ e imponerle la condición de ser mayor que cero para determinar la concavidad hacia arriba y menor que cero para determinar la concavidad hacia abajo. En efecto, puesto que $f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 36x$, entonces

$$f''(x) = 12x^2 + 48x + 36 = 12(x+3)(x+1)$$

a) Si $f''(x) > 0$, entonces, $(x+3)(x+1) > 0$. Nuestro problema se reduce ahora a determinar los intervalos donde se satisface la inecuación anterior. Usted puede verificar fácilmente que el conjunto de todos los $x$ que satisfacen dicha inecuación se hallan en el intervalo

$$]-\infty, -3[ \cup ]-1, +\infty[$$

En consecuencia la función $f$ es cóncava hacia arriba en este intervalo.

b) Si $f''(x) < 0$, entonces $(x+3)(x+1) < 0$. Y el problema se reduce a determinar el intervalo donde se satisface esta inecuación. Sin embargo cuando usted resolvió la inecuación anterior halló que $f''(x) > 0$ en el intervalo

$$]-3,-1[$$

Por lo tanto la curva es concava hacia abajo en el intervalo $]-3,-1[$.

## 4.15 Puntos de inflexión

Un punto en el que cambia la concavidad se llama **punto de inflexión**. Si la gráfica de una función continua posee una tangente en un punto en que la concavidad cambia de arriba hacia abajo, o de abajo hacia arriba, llamamos al punto **un punto de inflexión**. Las figuras (37), (38) y (39) muestran puntos de inflexión.

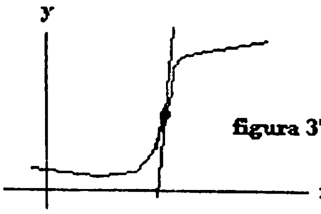


figura 37

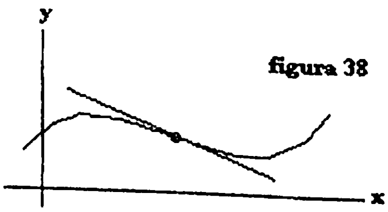


figura 38

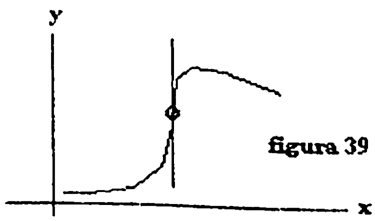


figura 39

Para localizar los puntos de inflexión necesitamos tan sólo calcular los valores de $x$ para los cuales $f''(x)$ es igual a cero o para los que $f''(x)$ no existe. Los puntos en los que la segunda derivada de la función es cero o no está definida se llaman a veces **puntos críticos de segundo orden**. Los puntos críticos de segundo orden son a los puntos de inflexión lo que los puntos críticos de primer orden son a los extremos relativos. En particular cada punto de inflexión es un punto crítico de segundo orden, pero no todo punto crítico de segundo orden es necesariamente un punto de inflexión.

> Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la función $f$, entonces o bien $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe

**Ejemplo 19**

Determine los puntos de inflexión de la curva $y = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8$

SOLUCIÓN. De acuerdo al criterio enunciado, debemos calcular la segunda derivada de $f$ y resolver la ecuación $f''(x) = 0$. En efecto:

$$f''(x) = 12(x+3)(x+1) = 0 \Longleftrightarrow x = -3 \quad y \quad x = -1$$

En consecuencia los puntos $P(-3, f(-3)) = (-3, 19)$ y $Q(-1, f(-1)) = (-1, 3)$ son puntos de inflexión.

## 4.16 Criterio de la segunda derivada para extremos relativos

Si existe la segunda derivada podemos usarla habitualmente como un criterio sencillo para determinar los máximos y mínimos relativos. El criterio se basa en la idea de que si $f(c)$ es un máximo relativo de una función diferenciable $f$, su gráfica es cóncava hacia abajo en algún intervalo que contiene a $c$. De forma análoga, si $f(c)$ es un mínimo relativo, su gráfica es cóncava hacia arriba en algún intervalo que contiene a $c$. Las figuras (40) y (41) muestran esta idea.

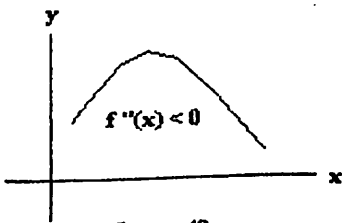


figura 40

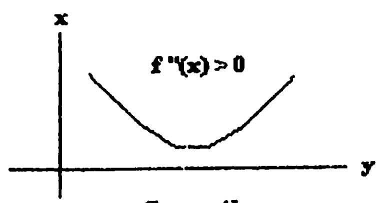


figura 41

Esto nos da el siguiente criterio para determinar si los puntos críticos son de máximo o de mínimo relativos.

Si existe $f''$ de $f$ en algún intervalo $]a, b[$ que contiene a $c$, y tal que $f'(c) = 0$.

a) Si $f''(c) > 0$, entonces, $f(c)$ es un mínimo relativo

b) Si $f''(c) < 0$, entonces, $f(c)$ es un máximo relativo

**Ejemplo 20**

Halle los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8$ utilizando el criterio de la segunda derivada.

SOLUCIÓN. Calculamos la deriva de la función $f$, la igualamos a cero y después resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 36x = 0 \Longleftrightarrow 4x(x+3)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \;\; y \;\; x = -3$$

En consecuencias los valores críticos son $x = 0$ y $x = -3$

La segunda derivada de la función $f$ es $f''(x) = 12x^2 + 48x + 36$, de tal modo que a) $f''(0) = 36 > 0$, por lo tanto en $x = 0$ hay un mínimo. b) $f''(-3) = 0$, en consecuencia en $x = -3$ no hay ni máximo ni mínimo. De hecho anteriormente determinamos que para $x = -3$ hay un punto de inflexión.

## 4.17 Esbozo de curvas usando la primera y segunda derivadas

Las observaciones anteriores pueden combinarse con las técnicas desarrolladas en las secciones precedentes con el fin de obtener procedimientos más poderosos para construir gráficos más detallados de funciones. Las siguientes reglas nos muestran como trazar el gráfico de una función.

1. Resuelva la ecuación $f'(x) = 0$ y halle los valores críticos. Con estos valores críticos halle los puntos críticos y represéntelos en el sistema cartesiano de coordenadas. Utilizando el signo de la primera derivada, determine si los puntos críticos corresponden a puntos de máximos o de mínimos. (Usted puede evitarse este último paso si utiliza el criterio de la segunda derivada)

2. Usando el criterio de la segunda derivada para extremos relativos determine si los valores críticos corresponden a puntos de máximos o mínimos.

3. Resuelva la ecuación $f''(x) = 0$ y halle los puntos de inflexión. Calcule las coordenadas de dichos puntos y representelos en el sistema cartesiano de coordenadas.

4. Resuelva las inecuaciones $f''(x) > 0$ y $f''(x) < 0$ para hallar los intervalos de concavidad.

5. Coloque esta información en el **cuadro de variación** y trace el gráfico de la función.

**Ejemplo 21**

Trace el gráfico de la función $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8$.

SOLUCIÓN. 1) Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 36x = 4x(x+3)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \quad x = -3$$

Las coordenadas de los puntos críticos son

$$P(0, f(0)) = (0, -8) \text{ y } Q(-3, f(-3)) = (-3, 19)$$

Estudiando el signo de la primera derivada en torno a cada uno de los valores críticos podemos saber si corresponden a puntos de extremo. Podemos ver que

$$f'(-4) < 0 \text{ y } f'(-1) < 0$$

En consecuencia el punto $P(-3, 19)$ no es de máximo ni de mínimo.

$$f'(-1) < 0 \text{ y } f'(1) > 0$$

Por lo tanto el punto $Q(0, -8)$ es un punto de mínimo.

2) Utilizando el criterio de la segunda derivada se podía llegar al mismo resultado, en efecto:

i) $f''(0) = 36 > 0$, en consecuencia $P(0, f(0)) = (0, -8)$ es un mínimo.

ii) $f''(-3) = 0$. En este caso el criterio de la segunda derivada no entrega información. Esto se debe a que este valor no corresponde ni a un máximo ni a un mínimo.

3) Determinamos los puntos de inflexión. En efecto:

$$f''(x) = 12x^2 + 48x + 36 = 12(x+3)(x+1) = 0 \Longleftrightarrow x = -3 \text{ y } x = -1$$

Hemos comprobado que el punto $P(-3, 19)$ corresponde a un punto de inflexión. El otro punto de inflexión es $Q(-1, 3)$.

4) Para determinar los intervalos de concavidad resolvemos las inecuaciones

$$f''(x) = 12(x+3)(x+1) > 0 \text{ y } f''(x) = (12(x+3)(x+1) < 0$$

En el ejemplo (17) hallamos que:

$$12(x+3)(x+1) > 0 \text{ en el intervalo } ]-\infty, -3[ \cup ]-1, +\infty[$$

y por otra parte

$$12(x+3)(x+1) < 0 \text{ en el intervalo } ]-3, -1[$$

5) Finalmente colocamos toda esta información en el cuadro de variación

| x | $]-\infty,-3[$ | $-3$ | $]-3,-1[$ | $-1$ | $]-1,0[$ | $0$ | $]0,+\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | 19 | | 3 | | $-8$ | |
| $f'(x)$ | $(-)\ \searrow$ | | $(-)\ \searrow$ | | $(-)\ \searrow$ | | $(+)\ \nearrow$ |
| $f''(x)$ | $(+)\ \cup$ | | $(-)\ \cap$ | | $(-)\ \cup$ | | $(+)\ \cup$ |

Finalmente, el gráfico de la función es el siguiente

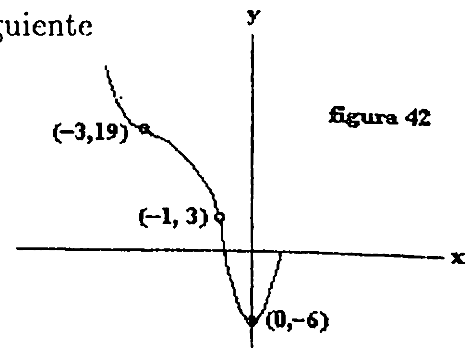



figura 42

# 4.18 Ejercicios propuestos

1. En las siguientes funciones determine donde es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo la función dada. Halle los extremos relativos y los puntos de inflexión y trace el gráfico de ellas.

   a) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$. b) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 26$. c) $x^4 - 4x^3 + 2$. d) $y = x^3 + 1$. e) $2x^4 - 8x + 3$. f) $f(x) = (x^2 - 5)^3$. g) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ h) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$. i) $(x+1)^{\frac{1}{3}}$

2. Esboce el gráfico de una función que tenga las propiedades siguientes:

   a) $f'(x) > 0$ cuando $x < -1$ y cuando $x > 3$. b) $f'(x) < 0$ cuando $-1 < x < 3$. c) $f''(x) < 0$ cuando $x < 2$. d) $f''(x) > 0$ cuando $x > 2$.

3. Esboce el gráfico de una función que tenga las propiedades siguientes:

   a) $f'(x) > 0$ cuando $x < 2$ y cuando $2 < x < 5$. b) $f'(x) < 0$ cuando $x > 5$. c) $f'(2) = 0$ d) $f''(x) < 0$ cuando $x < 2$ y cuando $4 < x < 7$. e) $f''(x) > 0$ cuando $2 < x < 4$ y cuando $x > 7$.

4. La derivada de una cierta función es$f'(x) = x^2 - 4x$. a) ¿En qué intervalo es $f$ creciente, decreciente?. b) ¿En qué intervalo es $f$ cóncava hacia arriba, hacia abajo ?. c) Halle las coordenadas de los extremos relativos y de los puntos de inflexión de $f$.

5. Un estudio de productividad en el turno matinal de una cierta fábrica indica que un trabajador medio que llega al trabajo a las 8:00 a.m. habrá ensamblado $Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$ radio transistores $t$ horas después. ¿En qué momento de la mañana está actuando el trabajador con la máxima eficacia.

6. Un estudiante del curso de Cálculo se demoró 1 semana en resolver los ejercicios del capítulo de optimización y 4 horas en escribirlos en su cuaderno. Después de $t$ horas de escribir el estudiante a completado $P(t) = \frac{-t^3}{3} + 2t^2 + 2t$ ejercicios escritos. ¿En qué momento el estudiante escribió más eficazmente?

7. ¿En qué punto tiene la tangente a la curva $y = 2x^3 - 3x^2 + 6x$ la menor pendiente? ¿Cuál es la pendiente de la tangente en ese punto?

8. Un objeto se mueve a lo largo de una linea recta de forma que después de $t$ segundos su distancia a un punto de referencia fijo es de $D(t) = t^3 - 12t^2 + 100t + 12$ metros. Halle la aceleración del objeto después de 3 segundos. ¿Está el objeto frenando o acelerando en ese momento?

9. Si un objeto es dejado caer o lanzado verticalmente, su altura en metros, después de $t$ segundos es $H(t) = -16t^2 + S_0t + H_0$, donde $S_0$ es la velocidad inicial del objeto y $H_0$ es su altura inicial. a) Obtenga una expresión para la aceleración del objeto. b) ¿Cómo varía la aceleración con el tiempo?. c) ¿Cuál es el significado del hecho de que la respuesta a la parte a) es negativa?

10. Pasadas $t$ horas de un viaje de 8 horas, un automovil en una autopista de Sur de Chile, ha recorrido $D(t) = 64t + \frac{10}{3}t^2 - \frac{2}{9}t^3$ kilómetros. a) Obtenga una fórmula expresando la aceleración del auto como una función del tiempo. b) ¿A qué ritmo está cambiando la velocidad del coche al cabo de 6 horas? ¿Está creciendo o decreciendo? c) ¿En cuanto cambia realmente la velocidad del coche durante la septima hora? d) ¿En qué momento está viajando más rapidamente el coche durante las 8 horas del viaje?.

11. Utilice el DERIVE para estudiar el gráfico de la función

$$f(x) = x\ln ax + x^2$$

donde "a" es un parámetro, $a \in I\!R$ . ¿ Qué ocurre cuando $0 < a < 1$, $a = 1$ y $a > 1$ ?

12. Utilice el DERIVE para estudiar el gráfico de la función

$$f(x) = \sqrt{1 + x^n n} \quad \text{para} x \in I\!R \quad y \quad n \geq 2$$

¿ Cómo varía gráfico al variar el parámetro "n" ?

## 4.19 Diferenciación Implícita

Hemos aprendido a usar la regla de la cadena para resolver ciertos problemas de razones relacionadas. En todos ellos una variable venía dada como una función de una segunda variable, la cual a su vez podía ser escrita como una función de una tercera variable. Algunas veces los problemas dan información sobre el ritmo de cambio de algunas de las variables en lugar de fórmulas explícitas relacionando todas las variables.

**Ejemplo 22**

Un estudio ambiental de la ciudad de Copiapó indica que habrá $Q(p) = p^2 + 3p + 1\,200$ unidades de polución nociva en el aire cuando la población sea de $p$ miles de habitantes; sin considerar la polución provocada por la chimenea de Paipote. La población es actualmente de 120 000 personas y está creciendo a un ritmo de 2 000 por año. ¿A qué ritmo está creciendo el nivel de polución en el aire?

SOLUCIÓN. Observe que si $t$ representa el tiempo, medido en años, el ritmo de cambio del nivel de polución con respecto al tiempo es

$$\frac{dQ}{dt}$$

y el problema nos está diciendo que el ritmo de cambio (expresado en miles) de la población respecto al tiempo es

$$\frac{dp}{dt} = 2$$

El objetivo del problema es hallar $\frac{dQ}{dt}$ cuando $p = 120$ (en miles). Para hallar $\frac{dQ}{dt}$ debemos diferenciar ambos lados de la ecuación

$$Q = p^2 + 3p + 1\,200$$

con respecto al tiempo $t$. No debemos olvidar que $p$ es una función de $t$, de tal modo que podemos escribir

$$Q = p(t)^2 + 3p(t) + 1\,200$$

Para hallar $\frac{dQ}{dt}$ diferenciamos ambos lados de la ecuación con respecto a $t$ usando la regla de la cadena para potencias. En efecto:

$$\frac{dQ}{dt} = 2p(t)\frac{dp}{dt} + 3\frac{dp}{dt}$$

que podemos escribir también en la forma siguiente:

$$\frac{dQ}{dt} = 2p\frac{dp}{dt} + 3\frac{dp}{dt}$$

Ahora sustituimos la información de que $p = 120$ y $\frac{dp}{dt} = 2$, en la ecuación anterior y obtenemos

$$\frac{dQ}{dt} = 2(120)(2) + 3(2) = 486$$

Lo que nos dice que el nivel de polución del aire está creciendo actualmente a un ritmo de 486 unidades por año.

Observemos que hemos diferenciado una ecuación que relaciona dos variables que a su vez dependen de otra variable. Este proceso de diferenciación se conoce como **Diferenciación Implícita**. Esto nos conduce a tener que aclarar el concepto de función implícita.

### ¿Qué diferencia hay entre una función implícita y una explícita?

Siempre hemos expresado las funciones de dos variables en la forma explícita

$$y = f(x)$$

Es decir, una de las dos variables se daba explicitamente en términos de la otra. Por ejemplo, las funciones

$$q = 3x + x^2, \quad p = 4t^3 - 6t - 3, \quad \text{o bien,} \quad z = 3w^5 - 1$$

son funciones expresadas explicitamente, donde $q$, $p$, $z$, son funciones de $x$, $t$, $w$, respectivamente. Sin embargo muchas relaciones funcionales no están dadas explicitamente. Por ejemplo, las ecuaciones

$$(i)\ 3x + 2 - y = 0, \quad (ii) z^2x + 6xz - 9 = 0, \quad (iii) x^3y - xy^3 + 12xy - 1 = 0$$

están dadas en forma explícita. Algunas veces es posible cambiar la forma de la ecuación de implícita a explícita. Por ejemplo la ecuación (i) puede escribirse explícitamente en la forma

$$y = 3x + 2$$

A veces encontramos ecuaciones cuya conversión a la forma explícita es imposible, este es, por ejemplo, el caso de la ecuación (iii); es prácticamente imposible despejar $y$ en función de $x$. Sin embargo hemos visto que no siempre es necesario despejar una variable en función de la otra para derivarla. Para **derivar implícitamente** una ecuación, debe derivarse cada término por separado y utilizar la regla de la cadena cuando corresponda.

**Ejemplo 23**

Hallar $\frac{dy}{dx}$ para la función $y = x^2 + xy^3$.

SOLUCIÓN. Para derivar implícitamente la función dada consideramos la variable $y$ como una función de $x$. De tal modo que el término $xy^2$ debe derivarse como un producto de dos funciones. Se tiene entonces

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y^3 + x(3y^2)\frac{dy}{dx}$$

A continuación reunimos en el primer miembro los términos que contienen $\frac{dy}{dx}$ y factorizamos por $\frac{dy}{dx}$ en la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dx} - x(3y^2)\frac{dy}{dx} = 2x + y^3 \iff \frac{dy}{dx}(1 - 3xy^2) = 2x + y^3$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$ se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y^3}{1 - 3xy^2}$$

**Ejemplo 24**

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $3x^2 - 2xy + xy^3 = 7$, en el punto $P(1,2)$.

SOLUCIÓN. Derivando implícitamente la ecuación dada, considerando la variable $y$ como función de $x$, se tiene:

$$6x - 2y - 2x\frac{dy}{dx} + y^3 + x(3y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

Factorizando por $\frac{dy}{dx}$ y despejando resulta

$$\frac{dy}{dx}(3xy^2 - 2x) = 2y - 6x - y^3 \iff \frac{dy}{dx} = \frac{2y - 6x - y^3}{3xy^2 - 2x}$$

Para hallar la pendiente en el punto $P(1,2)$ reemplazamos las coordenadas del punto en la ecuación anterior:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4-6-8}{12-2} = -\frac{10}{10} = -1$$

Puesto que tenemos un punto y la pendiente, podemos hallar la ecuación de la recta tangente. Efectuados los cálculos se obtiene que:

$$y = -x + 3$$

**Ejemplo 25**

Calcule la segunda derivada de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUCIÓN. Derivando cada término respecto a la variable $x$, resulta:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$ se obtiene la expresión:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Para derivar por segunda vez la expresión anterior debemos hacerlo mediante la derivada del cociente. En cxonsecuencia se tiene:

$$(*) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(1)y - x\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

Debemos ahora eliminar la expresión $\frac{dy}{dx}$ que está entre los términos de la segunda derivada. Para ello reemplazamos $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ en (*). En efecto:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y - x(-\frac{x}{y})}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}$$

Pero como $x^2 + y^2 = 1$, por lo tanto

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{y^3}$$

## 4.20 Aproximación por medio de diferenciales

Hemos visto que la derivada de una función es **su ritmo instantaneo de cambio** y se usa, con frecuencia, como una estimación del cambio en el valor de la función producido por el aumento de una unidad en el tamaño de la variable independiente. En lo que sigue veremos como varía la función cuando la variable independiente sufre **un cambio pequeño**, no necesariamente en una unidad.

Recordemos que hemos definido la derivada en la forma siguiente

$$(i) \qquad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si $\Delta x$ es muy pequeño y representa el cambio en la variable $x$, y $\Delta y$ representa el cambio en la variable $y$, y además representamos el ritmo de cambio de $y$ con respecto a $x$ por la derivada $\frac{dy}{dx}$, podemos escribir la siguiente fórmula de aproximación:

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x$$

Observe que de la expresión

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx f'(x)$$

podemos escribir, siempre que $\Delta x$ sea pequeño, que:

$$(ii) \qquad f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

Se ve que las expresiones (i) y (ii) representan la misma fórmula de aproximación escritas en forma distinta.

En el siguiente ejemplo se utiliza la fórmula de aproximación anterior para estimar el error que se produce cuando las mediciones que se efectúan son imperfectas.

**Ejemplo 26**

Encuentre el cambio aproximado en el volumen de un cubo de lado $x$ centímetros causado por el incremento en un 1% de sus lados.

SOLUCIÓN. Puesto que $V = x^3$ y $dV = 3x^2\Delta x$, resulta que

$$dV = 3x^2 \cdot (0,01x) = 0,03x^3 \ cm^3$$

Por lo tanto cuando los lados varían en un 1%, el volumen varía en $0,03\ cm^3$. Así, por ejemplo, si $x = 8cm$ y sus lados varían en un 1%, la variación en el volumen es de

$$dV = 3(8)^2 \cdot (0,01 \cdot 8) = 512 \cdot 0,03 = 15,36\ cm^3$$

**Ejemplo 27**

La medida de la circunferencia de una esfera sólida dio un valor aproximado +de 30 centímetros. Sin embargo la medida puede tener un error de $\pm 0,1cm$ Si se calcula el volumen de la esfera usando 30 centímetros como longitud de la circunferencia, utilice el concepto de diferencial para estimar el máximo error posible en el volumen calculado.

SOLUCIÓN. Recordemos que el volumen de la esfera es

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Debemos escribir dicho volumen en función de su largo. En efecto, si $x$ es la longitud de la circunferencia de la esfera, entonces $x = 2\pi r$, y por lo tanto

$$r = \frac{x}{2\pi}$$

De tal modo que el volumen de la esfera en función del largo "x" está dado por

$$V = \left(\frac{4}{3}\pi\right)\left(\frac{x}{2\pi}\right)^3$$

Separando la variable independiente $x$ con más claridad se tiene:

$$V = \left(\frac{4}{3}\pi\right)\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 (x^3)$$

A continuación estimamos el error $\Delta V$ por $dV$ y obtenemos

$$dV = \left(\frac{4}{3}\pi\right)\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 (3x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2\pi^2}\right) dx$$

Si $x = 30\ cm$ y $dx = \pm 0,1$, entonces el error estimado para el volumen es

$$dV = \left[\frac{(30)^2}{2\pi^2}\right](\pm 0,1) \approx \pm 4,56\ cm^3$$

En consecuencia la variación del volumen cuando se comete un error de $\pm 0,1\ cm$ es de $\pm 4,56\ cm^3$. Sin embargo, ¿ cuál es la variación "real" del volumen de la esfera (calculada con dos decimales) cuando el largo de la circunferencia varía de 30 a 30,10 centímetros ? Para determinar esto es suficiente calcular la diferencia $V(30,1) - V(30)$. En efecto:

$$V(30,1) - V(30) = (\frac{4}{3}\pi)(\frac{1}{2\pi})^3(30,1^3 - 30^3) \approx 4,57\ cm^3$$

**Ejemplo 28**

Si $y = x^2 + x + 1$, y la variable $x$ cambia de $x = 2$ a $x = 2,01$, ¿Cuál es el cambio en la variable $y$?

SOLUCIÓN. La diferencial de y es

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 1)dx, \quad \text{es decir,} \quad dy = (2x + 1)dx$$

En consecuencia, puesto que $dx = 0,01$, resulta

$$dy = (2 \cdot 2 + 1) \cdot (0,01) = 0,05$$

En consecuencia, cuando la variable independiente "x" varía en 0,01 unidades, la variable dependiente "y" varía en 0,05 unidades.

## 4.21 Interpretación geométrica de la diferencial

La expresión $f'(x)\Delta x$ del lado derecho de la fórmula de aproximación

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

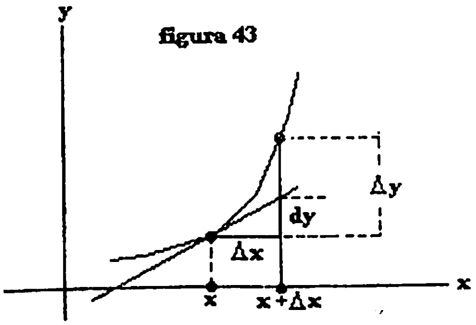
se llama con frecuencia **la diferencial de f** y se representa por $df$, es decir

$$df = f'(x)\Delta x$$

De forma similar la expresión $\frac{dy}{dx}\Delta x$ de la fórmula de aproximación $\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x$ se denomina **la diferencial de y** y se representa por **dy**, por lo tanto, si $\Delta x$ es pequeño

$$\Delta y \approx dy, \quad \text{donde} \quad dy \approx \frac{dy}{dx}\Delta x$$

La aproximación de $\Delta y$ por su diferencial $dy$ tiene una interpretación geométrica simple.




La figura muestra como la pendiente de la tangente es $\frac{dy}{dx}$ y como la diferencial

$$dy \approx \frac{dy}{dx}\Delta x$$

es el cambio en altura de la tangente, correspondiente al cambio de $x$ a $x+\Delta x$. Por otra parte, $\Delta y$ es el cambio en altura en la curva correspondiente a este cambio en $x$. Por lo tanto, aproximar $\Delta y$ por la diferencial $dy$ es lo mismo que aproximar el cambio en altura de una curva por el cambio en altura de su tangente. Si $\Delta x$ es pequeño la aproximación es bastante buena

**Ejemplo 29**

Un estanque de agua tiene la forma de un cono invertido de 20 metros de altura con una base circular de 5 metros de radio. El agua está saliendo por el fondo del estanque a un ritmo constante de 2 metros cúbicos por minuto. ¿Cuán rápidamente está bajando el nivel del agua (altura) cuando el agua tiene 8 metros de profundidad ?, o lo que es lo mismo, a ¿ a qué ritmo está bajando la altura cuándo cuando el agua tiene 8 metros de profundidad ?

SOLUCIÓN. Supongamos que V es e volumen del agua después de $t$ minutos, sea $h$ el nivel del agua y sea $r$ el radio de la superficie del agua, tal como muestra la figura siguiente.

El objetivo es hallar $\frac{dh}{dt}$, es decir, el ritmo al cual está "bajando" $h$ a medida que transcurre el tiempo $t$.

Sabemos que $\frac{dV}{dt} = -2$ (el signo menos indica que el volumen está bajando), y el objetivo es hallar

$$\frac{dh}{dt}, \text{ cuando } h = 8$$

Recordemos que el volumen de un cono se calcula con la expresión

$$(*) \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$\frac{5}{20} = \frac{r}{h}$

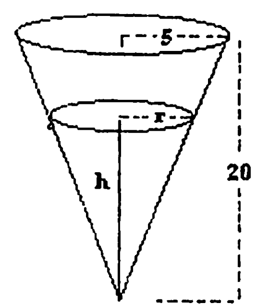



figura 44

El volumen, según la fórmula anterior, está dado en función de las variables $r$ y $h$. Pero debemos expresarlo en función sólamente de $h$. La figura nos muestra que se puede expresar $r$ en función de $h$ usando propiedades de semejanza de triángulos. en efecto:

$$\frac{5}{20} = \frac{r}{h} \Longleftrightarrow r = \frac{h}{4}$$

Reemplazando este valor de $r$ en la expresión (*), resulta

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{1}{48}\pi h^3$$

Diferenciando implicitamente ambos lados de esta ecuación con respecto al tiempo $t$, resulta

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{16}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

Pero $\frac{dV}{dt} = -2$ y también $h = 8$, en consecuencia

$$-2 = \frac{1}{16}\pi(64)\frac{dh}{dt} \Longleftrightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{1}{2\pi}$$

Cuestión que significa que cuando el agua tiene una profundidad de 8 metros, el nivel de agua está bajando a un ritmo de

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{m}{min}\right] \approx 0,16 \left[\frac{m}{min}\right]$$

# 4.22 Ejercicios propuestos

1. Derive implícitamente las siguientes ecuaciones a) $x^2 - y^2 = 1$. b) $16x^2 + 16y^2 = 400$. c) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$. d) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$. e) $x^2(x-y) = y^2(x+y)$. f) $xy = 1$. g) $x^3 + y^3 = 1$. h) $x^2 + xy + y^2 = 1$. i) $(x-1)y^2 = x+1$. j) $(x^2+y^2)^2 = 4xy$

2. En los siguientes ejercicios encuentre primero $\frac{dy}{dx}$ por diferenciación implícita y luego encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva, en el punto que se indica.

   (a) $x^2 + y^2 = 25$ en $P(3,4)$
   (b) $x^2y = x+2$ en P(2,1)
   (c) $x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} = 4$ en $P(16,16)$
   (d) $xy^2 + x^2y = 2$ en $P(1,-2)$
   (e) $12(x^2+y^2) = 25xy$ en $P(3,4)$
   (f) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = 1$ en $P(1,1)$

3. Halle la segunda derivada implícita de las siguientes funciones: a) $x^2y^2 = 1$. b) $x^2 = y^3$. c) $xy = y^2 + 1$.

4. Demuestre que la gráfica $xy^5 + x^5y = 1$ no tiene tangentes horizontales.

5. Encuentre todos los puntos de la gráfica de la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy - 1$ en los que la tangente es horizontal.

6. Se estima que el ingreso anual del Diario Atacama por publicidad será de $R(x) = 0{,}5x^2 + 3x + 160$ miles de pesos cuando su circulación sea de $x$ miles. La circulación del periódico es actualmente de 10 000 y está creciendo a un ritmo de 2 000 por año. ¿A qué ritmo está creciendo el ingreso anual por publicidad?

7. Los funcionarios del Hospital de Copiapó estiman que aproximadamente $N(p) = p^2 + 5p + 900$ personas buscarán tratamiento en el servicio de urgencia cada año si la población de la ciudad es de $p$ miles. La población es actualmente de 120 000 personas y está aumentando a un ritmo de 1 200 por año. ¿A qué ritmo está creciendo el números de personas que buscan tratamiento en el servicio de urgencia?

8. El volumen de un globo esférico está creciendo a un ritmo de 3 $cm^3$ por segundo. ¿A qué ritmo está creciendo el radio del globo cuando el radio es de 2 cm?. (El volumen de la esfera es $V\frac{4}{3}\pi r^3$).

9. Se ha proyectado que dentro de $t$ año, la población de Pueblo Hundido será de $P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$ miles. ¿Cuánto crecerá aproximadamente la población durante el próximo trimestre?

10. La velocidad del flujo sanguinco a lo largo del eje central de una cierta arteria es de $S(r) = 1,8 \cdot 10^5 r^2$ centímetros por segundo, donde $r$ es el radio de la arteria. Un investigador médico mide el radio de la arteria y obtiene $1,2 \cdot 10^{-2}$ centímetros, sabiendo que comete un error de $5 \cdot 10^{-4cm}$. Estime la cantidad en que diferirá el valor calculado de la velocidad de la sangre del verdadero valor, usando el valor incorrecto del radio de la arteria.

11. La medida del radio de un círculo es de 12 centímetros. ¿En cuánto varía su área, si su radio es medido con un 3% de error?

12. El radio de una esfera es de 6 cm y es medido con un 1% de error. ¿Cuán preciso es aproximadamente su volumen?

13. Estime que le sucederá al volumen de un cubo si la longitud de cada una de sus aristas disminuye en 1%.

14. De acuerdo con la ley de Poiseuille, la velocidad de la sangre que fluye a lo largo del eje central de una arteria de radio $r$ es $S(r) = cr^2$, donde $c$ es una constante. ¿Qué tanto por ciento de error se cometerá en el cálculo de $S(r)$ a partir de esta fórmula si se comete un 1% de error en la medida de $r$?.

15. Una pelota hueca, hecha de cuero de 2 milímetro de espesor, tiene un diámetro interno de 24 centímetros. Estime el volumen de la capa de cuero.

16. Se sabe que el radio de una esfera es 6 centímetros, con un error posible de 0,02 centímetros. Empleando diferenciales, aproximar el máximo error posible al calcular: a) El volumen de la esfera. b) El área de la superficie de la esfera. c) ¿Cuál es el error porcentual en cada una los casos.

**Ejemplo 30**

Trace el gráfico de la función de densidad de probabilidad normal estándar

$$f(x) = f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Esta función es una de las más importantes en probabilidad y estadística. Como verá su gráfico tiene forma de campana. Determinaremos en primer lugar los valores críticos. En efecto:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) = -\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) xe^{-\frac{x^2}{2}} \Longleftrightarrow x = 0$$

En consecuencia el único valor crítico es el cero y el punto crítico es

$$P_1(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$$

Estudiando el signo de la derivada en torno a cero, se ve $f'(x) > 0$ para los $x < 0$. Resulta entonces que la función es creciente en el intervalo $]-\infty, 0[$. Por otra parte $f'(x) < 0$ para los $x > 0$, luego la función es decreciente en el intervalo $]0, +\infty[$. De esto se deduce que la función tiene un punto de máximo para $x = 0$.

Para corroborar este hecho, calculamos la segunda derivada y la evaluamos en $x = 0$. Usando la derivada de un producto se obtiene

$$f''(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Se ve claramente que el $f''(0) < 0$, en consecuencia $P_1$ es un punto de máximo.

para determinar los puntos de inflexión resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1$$

En consecuencia los correspondientes puntos de inflexión son

$$(1, \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}) \quad y \quad (-1, \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}})$$

Finalmente para determinar los intervalos de concavidad debemos resolver la inecuación

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2 - 1) > 0$$

Observe que la expresión

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > 0$$

en consecuencia es suficiente estudiar la concavidad de la función mediante la inecuación $(x - 1)^2 > 0$. Usted puede verificar que

$$(x - 1)^2 > 0 \Longleftrightarrow x \in ] - \infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$$

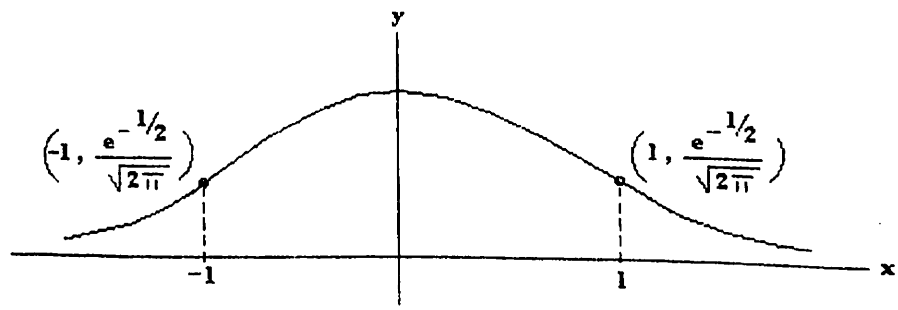
De esto se desprende que la curva es concava hacia arriba en dicho intervalo y, por lo tanto, es concava hacia abajo en el intervalo $]-1,1[$.

Anotaremos toda la información obtenida en el siguiente cuadro de variación.

| x | $]-\infty,-1[$ | $-1$ | $]-1,0[$ | $0$ | $]0,1[$ | $1$ | $]1,+\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $+$ | | $-$ | | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\searrow$ |
| $f''(x)$ | $+$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | $\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ | $\cap$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ | $\cap$ | $\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ | $\cup$ |

El gráfico de la función de densidad de probabilidad normal estandar es el siguiente:

**figura 45**




## Ejemplo 31

Trace el gráfico de la función $y = 2^x - ln\, 2^x$

SOLUCIÓN. Escribiendo la función en la forma $y = 2^x - x(ln\, 2)$ resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$. Resulta entonces que

$$y' = (ln\, 2)(2^x) - ln\, 2 = (ln\, 2)(2^x - 1) = 0 \Longleftrightarrow 2^x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Luego $x = 0$ es el único valor crítico. Analizando el signo de la derivada en torno a este valor crítico se tiene

$$y'(x) < 0 \quad \text{si } x < 0 \quad \text{y} \quad y'(x) > 0 \quad \text{si } x > 0 \,.$$

En consecuencia el punto $P(0,1)$ es un punto de mínimo. El criterio de la segunda derivada permite confirmar que dicho punto es un punto de mínimo. En efecto:

$$y''(x) = (ln\, 2)^2 2^x > 0 \;\text{ para } x = 0$$

Para determinar los puntos de inflexión debemos resolver la ecuación

$$f''(x) = (ln\,2)^2 2^x = 0$$

Observe que no existen valores de $x$ tales que $f''(x) = 0$. En consecuencia la curva no tiene puntos de inflexión. Esto significa que la curva es cóncava hacia arriba o es cóncava hacia abajo. Se puede ver fácilmente que

$$y''(x) = (ln\,2)^2 2^x > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto la curva es cóncava hacia arriba. Reunimos toda la información en el siguiente cuadro de variación.

| x | $]-\infty, 0[$ | 0 | $]0, +\infty[$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |
| $f''(x)$ | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | 1 | $\cup$ |

El gráfico de la función es el siguiente

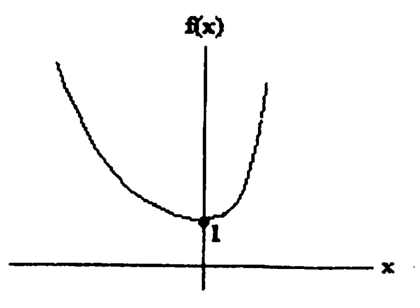



figura 46

**Ejemplo 32**

Un cultivo de bacterias crece de acuerdo a la función $N(t) = 2^t$ millones. ($t$ está dado en horas). ¿Cuál es el ritmo de crecimiento de la población al cabo de 5 horas?

SOLUCIÓN. Derivando la función $N(t)$, resulta

$$\frac{d}{dt}[N(t)] = (ln\,2)2^t$$

Puesto que $ln\,2 \approx 0,69315$, resulta que la razón de crecimiento de la población de bacterias cuando $t = 5$, es

$$N'(5) = 2^5 ln\,2 \approx (32)(0,69315) \approx 22,18$$

En consecuencia la razón de crecimiento de la población es de 22,18 millones de bacterias por hora.

# 4.23 Ejercicios propuestos

1. Encuentre la derivada de cada una de las funciones propuestas. a) $ln\,(3x-1)$. b) $ln\,\sqrt{1+2x}$. c) $ln\,\sqrt[3]{x^3-x}$. d) $ln\,\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. e) $y=\frac{\sqrt{4x-7}}{(3x-2)^2}$. f) $y=ln\,(x+3)^2$

2. Encuentre la derivada de las siguientes funciones a) $log_a(3x^2-5)$. b) $y=ln^2(x+3)$. c) $y=ln\,(x^3+2)(x^2+3)$. d) $f(x)=\frac{x^4}{(3x-4)^2}$. c) $y=e^{-\frac{1}{2}x}$. f) $y=ln\,(x+\sqrt{1+x^2})$. g) $y=e^{x^2}$. h) $f(x)=a^{3x^2}$. i) $y=\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}$.

3. Halle $\frac{d^2y}{dx^2}$ en las siguientes funciones a) $y=e^{-x}$. b) $y=e^{-2x}ln\,x$. c) $y=a^xe^{-2x}$. d) $y=2^{2x+1}ln\,(x-1)$. e) $y=ln\,(x-1)^2$. f) $3^{x+1}2^{x-1}$. g) $y=e^xln\,x$

4. Utilice las propiedades de los logaritmos para derivar las funciones propuestas. a) $y=\frac{(x^2+2)^3}{(1-x^3)^4}$. b) $\frac{x(1-x)^2}{(1-x)^3}$. c) $ln\,\frac{x-1}{x+1}$. d) $ln\,\frac{t^2}{t^2+1}$. e) $y=ln\,\sqrt{\frac{4-x^2}{9+x^3}}$

5. Derive las siguientes funciones a) $f(x)=\frac{2+3x}{e^{4x}}$. b) $f(t)=\frac{1-e^{-t}}{t}$. c) $y=e^{e^x}$. d) $f(x)=\frac{e^{-x}}{ln\,(x+1)}$. e) $y=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$. f) $y=\sqrt{e^t-e^{-t}}$. g) $y=\frac{1+e^x}{1-e^{-x}}$. h) $y=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$

6. Localice los máximos y los mínimos de las siguientes funciones a) $y=x^2e^x$. b) $y=ae^{-b^2x^2}$. c) $y=ln\,x^2(x+1)$. d) $y=(x+1)e^x$. e) $f(x)=log\,(x+1)e^x$

7. Halle los extremos relativos, puntos de inflexión, cuadro de variación y esboce el gráfico de las funciones siguientes: a) $y=x-ln\,x$. b) $y=\frac{ln\,x}{x}$. c) $y=\frac{x^2}{2}-ln\,x$. d) $y=x(ln\,x)$. e) $y=x^2(ln\,x)$

8. Se ha proyectado que dentro de $t$ años la población de un cierto país será de $P(t)=50e^{0{,}02t}$ millones. a) ¿A qué ritmo estará cambiando la población dentro de $t$ años. b) ¿ A qué razón porcentual estará cambiando la población dentro de $t$ años?

9. Se deposita dinero en un banco que ofrece interés a un tipo anual de 6 % compuesto continuamente. Halle la razón porcentual de cambio del saldo con respecto al tiempo.

10. Una cierta maquinaria industrial se deprecia hasta que su valor pasado $t$ años es de $Q(t) = 20\,000e^{-0,4t}$ dolares. a) ¿A qué ritmo se está depreciando la maquinaria después de 5 años? b) ¿A qué razón porcentual está cambiando el valor de la maquinaria después de $t$ años?

11. Los registros de salud pública indican que $t$ semanas depués del brote de una rara forma de gripe, aproximadamente $Q(t) = \frac{80}{4+76e^{-1,2t}}$ miles de personas habían contraido la enfermedad. ¿A qué ritmo se está propagando la enfermedad al final de la segunda semana?

12. De acuerdo con un modelo logístico basado en el supuesto de que la tierra no puede soportar más de 40 mil millones de personas, la población del mundo (en miles de millones) $t$ años después de 1960 será aproximadamente de

$$N(t) = \frac{40}{1 + 12e^{-0,08t}}$$

a) Si este modelo es correcto, ¿a qué ritmo estará creciendo la población mundial en 1985? a) Si este modelo es correcto, ¿ a qué razón porcentual estará creciendo la población mundial en 1985?

13. Se estima que dentro de $t$ años la población de un cierto país será de

$$N(t) = \frac{160}{1 + 8e^{0,02t}} \text{ millones}$$

¿Cuando estará creciendo más rapidamente la población?, justifique su respuesta trazando el gráfico de $N'(t)$.

14. Una epidemia se propaga a través de una comunidad de forma que $t$ semanas después de su brote, el número de residentes que han sido infectados viene dado por una función de la forma

$$f(t) = \frac{A}{1 + Ce^{-kt}}$$

Donde A es el número total de residentes susceptibles de contagio. Demostrar que la epidemia se propaga más rápidamente cuando la mitad de los residentes susceptibles de contagio han sido infectados.

# Las ecuaciones paramétricas

## 4.24 Las ecuaciones paramétricas

Hasta ahora hemos representado gráficos de funciones por medio de una ecuación que relaciona dos variables. En lo que sigue veremos que, con frecuencia, con el fin de obtener más información del fenómeno que estamos estudiando, conviene introducir una tercera variable.

**Ejemplo 33**

En la sección 1.3 de la página 14 vimos que la trayectoria de una pelota lanzada al aire, con un cierto ángulo, y una cierta velocidad inicial, estaba representada por la ecuación $y = -0,005x^2 + x$, cuyo gráfico es el de la figura (47).

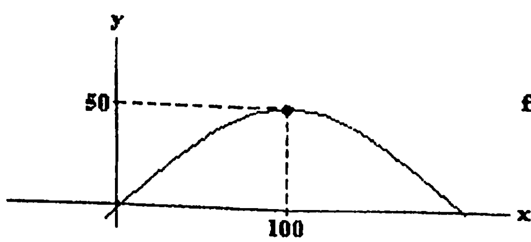



figura 47

Como puede verse, esta ecuación muestra sólamente la relación entre la altura alcanzada por el objeto en relación con la distancia horizontal. Así, por ejemplo, cuando el movil alcanza una altura de 18 metros su distancia horizontal es de 20 metros. Mientras que cuando la distancia horizontal es de 60 metros, su altura es de 42 metros. Sin embargo, esta ecuación no nos dice todo. No nos dice, por ejemplo, ecuanto tiempo ha estado el objeto en el aire o cuando ha alcanzado tales altura y distancia horizontal. En general no nos dice "en que tiempo" ha estado el objeto en un punto dado de la trayectoria $(x, y)$. Para determinar este instante es necesario introducir una nueva variable "t" que llamaremos parámetro.

**¿Cómo podemos determinar las ecuaciones paramétricas de una curva que nos permita, por ejemplo, describir una trayectoria como la del ejemplo 33?** En lo que sigue mostraremos un ejemplo que no ayudará a comprender esta cuestión.

**Ejemplo 34**

Hallar las ecuaciones paramétricas de la función $y = 1-x^2$ usando los parámetros siguientes: a) $t = x$ b) la pendiente $m = \frac{dy}{dx}$ en el punto $P(x, y)$

SOLUCIÓN. a) Haciendo $x = t$ obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$x = t \quad e \quad y = 1 - t^2$$

b) En cambio para expresar la misma función utilizando como parámetro la pendiente "m" de la curva en el punto $P(x, y)$ hacemos lo siguiente:

i) Derivando la función obtenemos la pendiente de la curva en el punto $P(x, y)$. En efecto:

$$m = \frac{dy}{dx} = -2x \ \ y \ \text{ despejando x resulta: } x = -\frac{m}{2}$$

Sustituyendo este valor de $x$ en la ecuación inicial obtenemos $y = 1 - x^2 = 1 - (-\frac{m}{2})^2 = 1 - \frac{m^2}{4}$. En consecuencia las ecuaciones paramétricas buscadas son:

$$x = -\frac{m}{2} \quad e \quad y = 1 - \frac{m^2}{4}$$

De lo anterior se puede colegir la existencia de tantas ecuaciones paramétricas como parámetros se puedan establecer.

Estamos en condición, ahora, de formular las ecuaciones paramétricas que describan la trayectoria del objeto del ejemplo 33 de modo que intervenga en ella la variable tiempo. Suponiendo que $x = t$, resulta que las ecuaciones paramétricas para la trayectoria descrita por la ecuación $y = -0,005x^2 + x$ son:

$$x = t \quad e \quad y = -0,005t^2 + t$$

Observemos que:

en el tiempo $t = 1 \ seg \quad x = 1m \quad e \quad y = 0,995m$

en el tiempo $t = 20 \ seg \quad x = 20m \quad e \quad y = 18m$

en el tiempo $t = 60 \ seg \quad x = 60m \quad e \quad y = 42m$

## 4.25 El gráfico de las ecuaciones paramétricas

Para graficar la curva descrita mediante ecuaciones paramétricas, los valores de $t$ conducen a los puntos $(x, y)$.

**Ejemplo 35**

Trazar la curva descrita por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 - 4 \quad e \quad y = \frac{t}{2}, \quad \text{si} \quad -2 \leq t \leq 3$$

Solución. Construiremos una tabla con algunos valores de $t$ en el intervalo considerado para obtener los correspondientes valores de x e y.

| t | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | $0$ | $-3$ | $-4$ | $-3$ | $0$ | $5$ |
| y | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $\frac{3}{2}$ |

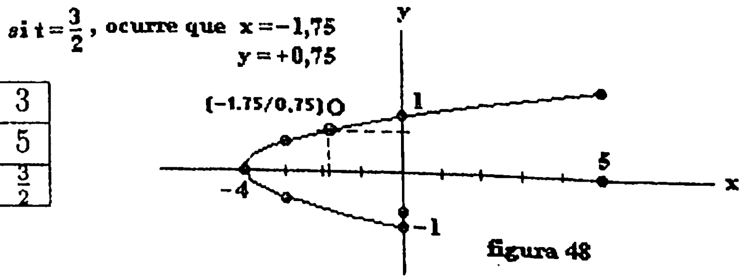


figura 48

Puesto que la función $f$ es continua podemos unir los puntos y obtener el gráfico de la figura (48). La flecha en la curva indica la orientación cuando $t$ crece desde $-2$ a 3.

Hemos dicho que una misma curva puede tener más de una representación paramétrica. El lector puede verificar que las ecuaciones paramétricas:

$$x = 4t^2 - 4 \quad e \quad y = t, \quad \text{con} \quad -1 \leq t \leq \frac{3}{2}$$

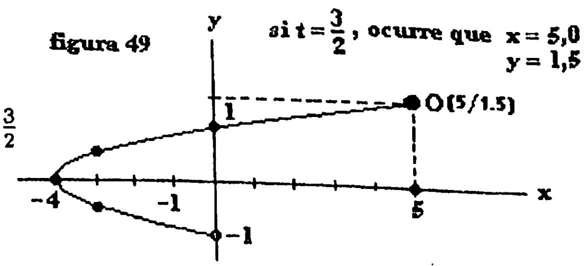


figura 49

representan la misma gráfica que la del ejemplo 35. Sin embargo comparando los valores de $t$ en las figuras correspondientes, se ve que la última gráfica se forma más rápidamente. La utilidad que esto tiene en las aplicaciones consiste en que pueden usarse representaciones paramétricas distintas para representar velocidades diferentes a las que un objeto puede viajar en una misma trayectoria.

Cuando se tiene una ecuación paramétrica y se quiere trazar su gráfica es más fácil hacerlo con la ecuación en coordenadas rectangulares. Así, entonces, dadas las ecuaciones paramétricas, debemos hallar la forma de "eliminar el parámetro".

Para eliminar el parámetro seguiremos el siguiente procedimiento:

a) Se despeja el parámetro en una de las ecuaciones.

b) Se sustituye el parámetro despejado en la otra ecuación.

**Ejemplo 36**

Elimine el parámetro de las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$

SOLUCIÓN. a) En primer lugar se despeja t en la primera ecuación, resulta: $t = x + 2$. b) A continuación se reemplaza este valor de t en la segunda ecuación, resulta:

$$y = (x+2)^2 + 1 \Longleftrightarrow y = x^2 + 4x + 5$$

La ecuación $y = x^2 + 4x + 5$, en coordenadas rectangulares, que estamos buscando.

**Ejemplo 37**

Dibujar la curva representada por las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = cos\,\theta \\ y = 4\,sen^2\theta \end{cases}$ mediante la eliminación del parámetro $\theta$

SOLUCIÓN. La eliminación del parámetro nos conducirá a una ecuación en coordenadas rectangulares. En efecto, elevando al cuadrado la primera ecuación resulta $x^2 = cos^2\theta$; escribiendo la segunda ecuación en la forma $\frac{y}{4} = sen^2\theta$ y sumando, ahora, ambas expresiones se tiene:

$$x^2 + \frac{y}{4} = cos^2\theta + sen^2\theta \Longleftrightarrow x^2 + \frac{y}{4} = 1 \Longleftrightarrow y = 4 - x^2$$

El gráfico de la parábola es el siguiente

Cuando se traza el gráfico de una curva dada en ecuaciones paramétricas y se hace lo mismo con su correspondiente ecuación rectangular, con frecuencia los dominios de ambas no se corresponden. En tal caso debemos "ajustar" o restringir dichos dominios para que representen la misma curva.

## 4.26 La diferenciación paramétrica

Si una curva $C$ viene dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \quad e \quad y = g(t)$$

entonces la pendiente de $C$ en el punto $(x, y)$ está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

Puesto que $\frac{dy}{dx}$ es función de $t$ podemos usar repetidamente la forma paramétrica de la derivada para hallar **derivadas de orden superior**. Así, por ejemplo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right]}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{segunda derivada}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right] = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{tercera derivada}$$

**Ejemplo 38**

Hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ de las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = \theta - sen\,\theta \\ y = 1 - cos\,\theta \end{cases}$

SOLUCIÓN. Derivando la primera y segunda ecuación con respecto al parámetro $\theta$ resulta:

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - cos\,\theta \quad e \quad \frac{dy}{d\theta} = sen\,\theta$$

Por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{sen\,\theta}{1 - cos\,\theta}$$

Para hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ debemos debemos calcular:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{sen\,\theta}{1-cos\,\theta}\right)\cdot}{\frac{dx}{d\theta}}$$

El lector puede comprobar fácilmente que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{sen\,\theta}{1-cos\,\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{(1-cos\,\theta)^2}$$

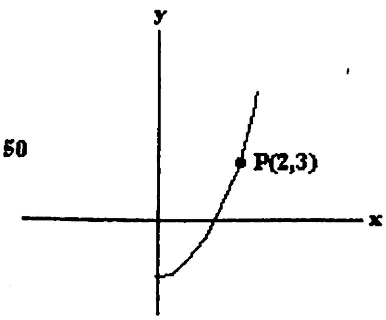
**Ejemplo 39**

Hallar la pendiente y la concavidad de la curva dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \frac{1}{4}(t^2-4) \end{cases}$$

en el punto $P(2,3)$

figura 50




SOLUCIÓN. Derivando parametricamente resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot t}{(\frac{1}{2})t^{-\frac{1}{2}}} = t^{\frac{3}{2}}$$

Calculando

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right]}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2})t^{-\frac{1}{2}}} = 3t$$

En el punto $(x,y) = (2,3)$ el valor de $t = 4$ y la pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = (4)^{\frac{3}{2}} = 8$$

Por otra parte, en $t = 4$ la segunda derivada es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3\cdot 4 = 12 > 0$$

de lo cual se desprende que la gráfica de la curva es cóncava hacia arriba en dicho punto. La figura (50) muestra el gráfico de la curva propuesta.

Puesto que en las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ no se define necesariamente $y$ en función de $x$, una curva paramétrica puede formar un lazo y cruzarse en el plano. En los puntos de "cruce" la curva en cuestión puede tener más de una tangente.

**Ejemplo 40**

Hallar los puntos de la elipse Nota. [1] definida por las ecuaciones (*)

$$(*)\begin{cases} x = 2t - \pi\, sen\, t \\ y = 2 - \pi\, cos\, t \end{cases}$$

en los cuales las tangentes sean horizontales.

SOLUCIÓN. La gráfica de la curva propuesta es la de la figura (51).

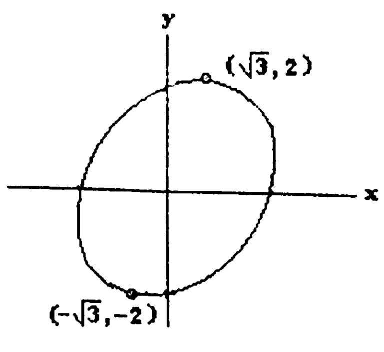



figura 51

La derivada de las ecuaciones paramétricas es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2sen\,(t-\frac{\pi}{3})}{2cos\,(t+\frac{\pi}{3})} = \frac{-sen\,(t-\frac{\pi}{3})}{cos\,(t+\frac{\pi}{3})}$$

Observe que $\frac{dy}{dx} = 0$ cuando $t = \frac{\pi}{3}$, o bien, cuando $t = \frac{4\pi}{3}$. Así, entonces, para hallar los puntos en los cuales la curva tiene tangentes horizontales sustituimos $t = \frac{\pi}{3}$ y $t = \frac{4\pi}{3}$ en las ecuaciones dadas. El lector puede verificar fácilmente que

[1] Conviene precisar que existen una gran cantidad de curvas que no están contempladas dentro de la definición clásica de función y que sirven también para modelar fenómenos de la naturaleza. En una relación entre variables la función está caracterizada por el hecho de que para cada valor de la variable independiente se obtiene un único valor de la variable dependiente. En cambio, en la elipse, como en muchas otras curvas, a un valor de la variable independiente le puede corresponder más de un valor de la variable dependiente.

los puntos que resultan de efectuar tales sustituciones son:

$$A(\sqrt{3},2) \ \ y \ \ B(-\sqrt{3},-2)$$

# Ejercicios propuestos 4.27

1. Hallar la primera y segunda derivada y evaluar en cada una de ellas el valor especificado.

   a) $x = 2t, \quad y = 3t - 1$ (a) $t = 2$

   b) $x = \sqrt{t}, \quad y = 3t - 1$ (b) $t = 1$

   c) $x = t + 1, \quad y = t^2 + 3t$ (c) $t = -1$

   d) $x = t^2 + 3t, \quad y = t + 1$ (d) $t = 0$

   e) $x = 2cos\,\theta, \quad y = 2sen\,\theta$ (e) $\theta = \frac{\pi}{4}$

   f) $x = cos\,\theta, \quad y = 3sen\,\theta$ (f) $\theta = 0$

   g) $x = \sqrt{t}, \quad y = \sqrt{t-1}$ (g) $t = 2$

   h) $x = \theta - sen\,\theta, \quad y = 1 - cos\,\theta$ (h) $\theta = \pi$

2. Hallar una recta tangente a la curva en el parámetro indicado.

   a) $x = 2t \quad y = t^2 - 1$ (a) $t = 2$

   b) $x = t - 1, \quad y = \frac{1}{t} + 1$ (b) $t = 1$

   c) $x = t^2 - t, \quad y = t^3 - 3t$ (c) $t = -1$

   d) $x = 4cos\,\theta, \quad y = 3sen\,\theta$ (d) $\theta = \frac{3\pi}{4}$

3. Hallar todos los puntos de tangencia horizontal a la curva indicada.

   a) $x = 1 - t, \quad y = t^2$

   b) $x = t + 1, \quad y = t^2 + 3t$

   c) $x = 1 - t, \quad y = t^3 - 3t$

   d) $x = t^2 - t + 2, \quad y = t^3 - 3t$

   e) $x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}$

# 4.28 Ejercicios propuestos.

Utilice EL DERIVE para efectuar los siguientes ejercicios.

1. Trace el gráfico de las funciones que se indican y utilice el cursor para estimar los intervalos donde $f'(x) > 0$. Estime aproximadamente los puntos de máximo y de mínimo si los hubiera.

   (a) $y = x^3 - 3x^2 + 3$

   (b) $y = \frac{1}{3}(x^3 - 3x + 2)$

   (c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

2. Trace el gráfico de las funciones siguientes y utilice el cursor para estimar el intervalo donde $f''(x) < 0$. Determine, aproximadamente, los valores de x en que la segunda derivada es igual a cero.

   (a) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$

   (b) $y = 3x^4 + 4x^3$

   (c) $y = x^4 - 4x^3 - 16x$

3. Trace el gráfico de las funciones que se indican y construya un cuadro de variación para cada una de ellas.

   (a) $y = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$

   (b) $y = x^5 - 5x$

   (c) $y = |2x - 3|$

4. Trace el gráfico de la función y estime en que puntos la segunda derivada es igual a cero.

   (a) $y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x$

   (b) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

   (c) $y = sen\, x - \frac{1}{18}\, sen\, 3x \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

5. Considere las ecuaciones paramétricas de los **ejercicios propuestos 4.27** de la página 125 y verifique sus resultados utilizando EL DERIVE.

6. Trace el gráfico de las siguientes curvas dadas en forma paramétrica y construya una recta tangente a ella en el punto que se indica.

   (a) $x = 2t, \quad y = t^2$, en el punto $t = 1$
   (b) $x = t^2 - t, \quad y = t^3 - 3t$, en el punto $t = 0$
   (c) $x = 1 - t, \quad y = t^2$, en el punto $t = 2$

**Ejemplo 1**

Utilizar EL DERIVE para calcular la segunda derivada paramétrica de las ecuaciones: $x = t^3$, $y = t - t^4$.

(a) En command: se pone el cursor en Transfer y se presiona la tecla Enter.
(b) En Transfer: se pone el cursor en Load y se presiona la tecla Enter.
(c) En Transfer Load: se pone el cursor en Utility y se presiona la tecla Enter.
(d) En T.L.U.F: se escribe DIF APPS.MTH y se presiona la tecla Enter.
(e) En command se pone el cursor en Author y se presiona la tecla Enter.
(f) En Author Expression: se escribe PARA DIF($[t^3, t - t^4], t, 2$). y se presiona la tecla Enter. Observe que las ecuaciones paramétricas se dan en la forma $[t^3, t - t^4]$; la $t$ indica la variable de derivación y el 2 indica el orden de la derivada.
(g) En la parte superior de la pantalla aparece PARA DIF$[t^3, t - t^4], t, 2]$
(h) En command ponga el cursor en simplify y presione la tecla Enter.
(i) En la parte superior de la pantalla aparece:

$$-\frac{2(2t^3 + 1)}{9t^5}$$

que es la segunda derivada de la ecuación propuesta.

# Capítulo 5 Las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

## Objetivos

1. Comprender el concepto de ecuación diferencial y estudiar fenómenos modelados por éstas.
2. Estudiar el concepto de primitiva de una función y las reglas básicas de integración.
4. Utilizar EL DERIVE para estudiar modelos en los cuales sea necesario integrar funciones y resolver ecuaciones diferenciales.

## 5.1 Introducción.

En el capítulo 1 dijimos que en su nacimiento, el Cálculo diferencial giró en torno a la necesidad de resolver el problema de hallar la distancia recorrida por un móvil cuando se conocía su velocidad. Dicho de otra manera, conocida la razón instantanea de cambio de un móvil, se podía hallar la distancia recorrida por él en un tiempo cualquiera.

Sin embargo este es uno de los numerosos problemas en los cuales se conoce la derivada de una función y el objetivo es hallar dicha función. Así, por ejemplo, un demógrafo sabe el ritmo al que está creciendo la población y puede desear usar esta información para predecir futuros niveles de población. Un físico que conoce la velocidad a la cual se mueve un cuerpo puede querer calcular la posición futura del cuerpo. Un economista que conoce el ritmo de inflación puede estimar la tendencia de los precios futuros, etc. En todos estos problemas interviene el concepto de derivada.

Toda ecuación que contenga una derivada se llama **Ecuación diferencial** y cuando esta ecuación modele un determinado fenómeno, hablaremos de ella como un modelo diferencial. Así, por ejemplo, el supuesto de que la población crece a un ritmo proporcional a su tamaño, puede expresarse por medio de la ecuación diferencial (o modelo diferencial)

$$(1) \qquad \frac{dP}{dt} = kP$$

donde P representa el tamaño de la población, $t$ es el tiempo y $k$ es la constante de proporcionalidad.

En general todos los fenómenos que hemos expresado por medio de ritmos pueden modelarse mediante ecuaciones diferenciales.

**Ejemplo 1**

Se estima que dentro de $t$ meses la población de un ciderto pueblo estará cambiando a un ritmo de $2 + \sqrt{t}$ personas por mes. Si la población actual es de 5 000 personas, ¿cuál será la población dentro de 9 meses?

Si representamos por $N(t)$ la población del pueblo dentro de $t$ meses, entonces, la derivada de $N(t)$ significará el ritmo de cambio de la población con respecto al tiempo $t$. Esto es:

$$(2) \qquad \frac{dN}{dt} = 2 + \sqrt{t}$$

En definitiva, ¿cómo hallar las funciones $P(t)$ y $N(t)$ que satisfarán las ecuaciones (1) y (2) que dan respuesta a los problemas propuestos? La respuesta a esta pregunta la dará el **Cálculo de Primitivas.**

## 5.2 El cálculo de primitivas.

El proceso de obtención de una función a partir de su derivada se llama **Cálculo de Primitivas o Integración.**

Una función $F$ cuya derivada es igual a $f$ se dice que es una primitiva de $f$. Dicho de otra forma, $F$ es una primitiva de $f$ si y sólo si

$$\frac{dF}{dx} = f \quad \text{para todo } x \text{ en el dominio de } f$$

Cada vez que hayamos encontrado lo que creemos es una primitiva de una función podemos comprobarlo por medio de la diferenciación.

**Ejemplo 2**

Comprobar que $F(x) = \frac{x^4}{4} + 3x + 1$ es una primitiva de $f(x) = x^3 + 3$.

SOLUCIÓN. Para comprobar que $F(x)$ es una primitiva de $f$ debemos verificar que $F' = f$. En efecto:

$$F'(x) = 4 \cdot \frac{x^3}{4} + 3 = x^3 + 3$$

El lector habrá notado que $f$ tiene más de una primitiva. Así, por ejemplo, $F(x) = \frac{x^4}{4} + 3x + 10$ es también una primitiva de $f$. En realidad, si $k \in I\!R$ , $F(x) = \frac{x^4}{4} + 3x + k$ son primnitivas de la función $f$.

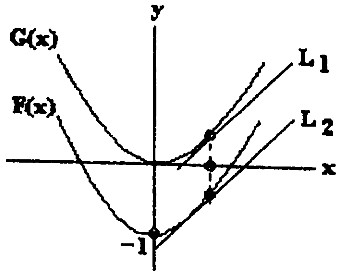
En general, si F es una primitiva de $f$, toda función obtenida por adición de una constante es también una primitiva de $f$. De hecho, resulta que todas las primitivas de $f$ se pueden hallar sumando constantes a una primitiva dada.

Si $F$ y $G$ son primitivas de la función $f$, entonces, existe una constante $C$ tal que:

$$G(x) = F(x) + C$$

Una explicación geométrica simple, para el hecho de que dos primitivas de una función difieren sólamente en una constante, se muestra en la figura (1) Considere las primitivas $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ y $G(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

figura 1




**Una primitiva de $f(x) = x$ es $G(x) = \frac{x^2}{2}$**

**Otra primitiva de $f(x) = x$ es $F(x) = \frac{x^2}{2} - 1$**

**$L_1$ es paralela a $L_2$**

Si $F$ y $G$ son ambas primitivas de $f(x) = x$, la pendiente de cada sus tangentes en el punto x es $f(x) = x$. Por lo tanto el gráfico de las rectas tangentes a las curvas de $F$ y de $G$ en el punto $x_0$, son paralelas, esto es, cada una se traslada verticalmente respecto de la otra. Dicho de otro modo, existe una constante $C$ para la cual $G(x) - F(x) = C$

Parece claro que el cálculo de la primitiva de una función no da una única función sino una familia de funciones y que difieren entre si por una constante. El proceso de cálculo, denominado integración, se denota por el símbolo $\int$ llamado **signo integral** e indica que se va a hallar la primitiva de la función que le sigue. El símbolo

$$\int f(x)\,dx$$

se llama **Integral Indefinida** de la función $f$ y denota la familia de primitivas de dicha función. El símbolo $dx$, aparecido misteriosamente, indica que $x$ es la variable con respecto a la cual va a realizarse la integración. Se usa una notación análoga si la función está expresada en función de otra variable. Por ejemplo, si $t$ o $p$ son variables de integración, escribimos:

$$\int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C, \quad o \quad \int p^2\,dp = \frac{p^3}{3} + C$$

Hemos visto que las operaciones de integración y derivación son inversas una de otra. Expresamos este hecho en la forma siguiente:

La derivación y la integración son operaciones inversas una de la otra. Es decir:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x) \quad y \quad \int \frac{d}{dx} f(x)\,dx = f(x) + C$$

Aunque hemos definido el proceso de integración, todavía no tenemos reglas prácticas que nos permita calcular primitivas fácilmente. Sin embargo el hecho de que la integración sea la operación inversa de la derivación nos facilitará el camino para obtenerlas.

## 5.3 Integración de la función potencia.

Recordemos que la regla para derivar la función potencia es la siguiente:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = n\,x^{n-1}$$

Si planteamos la regla a la inversa, esto es, como una regla de integración, debemos escribir:

$$\boxed{(1) \qquad \int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)}$$

Cuestión que significa que para integrar la función $x^n$ $(n \neq -1)$, aumentamos el exponente de $x$ en 1 y dividimos por el nuevo exponente. Si el lector quiere asegurarse de la validéz de esta regla debe derivar la función:

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

**Ejemplo 3**

Calcular las siguientes integrales: a) $\int x^{\frac{3}{5}}dx$ b) $\int dx$ c) $\int \sqrt{x}\,dx$

SOLUCIÓN. Aplicando la regla (1) se tiene:

a) $\int x^{\frac{3}{5}}dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + C = \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + C$

b) $\int 1\,dx = \int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C$

c) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

El lector puede comprobar fácilmente que la integral de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ no puede calcularse utilizando la regla (1). Observe que si escribimos $x^{-1}$ el denominador de la función resultante queda dividido por cero. Sin embargo también puede verificar fácilmente que

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = ln\,|x| + C \quad \text{puesto que:} \quad \frac{d}{dx}\left[ln\,|x| + C\right] = \frac{1}{x}}$$

Teniendo en cuenta que la función $e^x$ es su propia derivada, su integración es trivial. Escribimos:

$$\int e^x dx = e^x + C \text{ puesto que: } \frac{d}{dx}[e^x + C] = e^x$$

## 5.4 Reglas básicas de integración.

De las reglas de derivación para funciones que se suman, se restan, o que se multiplican por una constante, se pueden deducir las siguientes reglas para la integración de funciones.

a) $\int k\, f(x)\, dx = k\, \int f(x)\, dx$

b) $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

**Ejemplo 4**

Calcule las siguientes primitivas: a) $\int (3e^x - \frac{x^2}{2} - 1)\, dx$ b) $\int (\frac{2}{x} + e^x - x)\, dx$

SOLUCIÓN. Aplicando las reglas de integración se tiene:

a) $\int (3e^x - \frac{x^2}{2} - 1)\, dx = 3\int e^x dx - \int \frac{x^2}{2} dx - \int dx = 3e^x - \frac{x}{6}2 - x + C$

b) $\int (\frac{2}{x} + e^x - x)\, dx = 2\int \frac{1}{x} dx + \int e^x dx - \int x dx = 2\, ln\, x + e^x - \frac{x^2}{2} + C$

Una cuestión interesante de observar es que no existen reglas generales, tal como ocurre con la derivada, para la integración de productos y cocientes de funciones. Cuando tengamos que integrar productos o cocientes de funciones, debemos expresar dichos productos o cocientes de modo de poder integrarlos con las reglas que hemos deducido.

**Ejemplo 5**

Calcular las siguientes integrales: a) $\int \frac{2x - 4xe^x + x^7}{x} dx$ b) $\int 7(x+5)(x-1) dx$

Podemos expresar la función de integración como una suma de funciones y, a continuación, aplicar las reglas conocidas.

a) $\int \frac{2x-4xe^x+x^7}{x}dx = \int(\frac{2x}{x} - \frac{4xe^x}{x} + \frac{x^7}{x})dx = \int(2-4e^x+x^6)dx = 2x-4e^x+\frac{x^7}{7}+C$

b) $\int 7(x+5)(x-1)dx = 7\int(x^2+4x-5)dx = \frac{7}{3}x^3 + 14x^2 - 35x + C$

## 5.5 Método de integración por sustitución.

Para hallar la primitiva de funciones más complejas no es suficiente el método que hemos desarrollado. Así, por ejemplo, para calcular la integral de la función $f(x) = x^3e^{x^2}$ debemos inventar una técnica adicional.

Recordemos que para derivar una función de una variable, que a su vez dependía de otra variable, recurríamos a la regla de la cadena. La operación opuesta de la regla de la cadena, en la integración, se conoce como **integración por sustitución**.

**Ejemplo 6**

Calcule las integrales siguientes: a) $\int(x^3+2)^3(3x^2)dx$ b) $\int x^3e^{x^4+2}dx$

a) Observe que podemos desarrollar el cubo del binomio $(x^3+2)^3$, a continuación multiplicar el resultado por $3x^2$ y enseguida integrar utilizando la regla (1). Este método resulta demasiado largo y engorroso. Si en vez de un binomio al cubo tuviésemos un binomio elevado a siete la situación se complica. Por esta razón efectuaremos una *adecuada sustitución* para transformar las integrales propuestas en otras más simples. En efecto, efectuemos la sustitución siguiente:

$$u = x^3 + 2, \quad entonces, \quad du = 3x^2dx$$

Utilizando este artificio la integral propuesta se transforma en otra fácilmente integrable. Así, entonces:

$$\int \underbrace{(x^3+2)^3}_{u} \underbrace{3x^2dx}_{du} = \frac{u^4}{4} + C$$

Pero, puesto que $u = x^3 + 2$, resulta que:

$$\int (x^3+2)^3(3x^2)dx = \frac{(x^3+2)^4}{4} + C$$

b) Para calcular la integral propuesta efectuaremos el siguiente cambio de variable:

$$\text{si } u = e^{x^4+2}, \quad entonces, \quad du = e^{x^4+2}(4x^3)dx$$

Por lo tanto:

$$\int x^3 e^{x^4+2} dx = \frac{1}{4}\int du = \frac{1}{4}u + C$$

En consecuencia

$$\int x^3 e^{x^4+2} dx = \frac{e^{x^4+2}}{4} + C$$

**Ejemplo 7**

Calcule la integral $\int \frac{ln\, x}{x}\, dx$

SOLUCIÓN. Efectuemos la siguiente sustitución

$$\text{si } u = ln\, x, \text{ entonces, } du = \frac{1}{x}\, dx$$

Por lo tanto

$$\int \frac{ln\, x}{x}\, dx = \int ln\, x \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + C$$

Puesto que $u = ln\, x$ resulta que:

$$\int \frac{ln\, x}{x}\, dx = \frac{(ln\, x)^2}{2} + C$$

# 5.6 Ejercicios propuestos.

a) $\int 3x\sqrt{1-x^2}\, dx$

b) $\sqrt{1-x^2}\, x dx$

c) $\int \frac{1+x^2}{\sqrt{x}}\, x dx$

d) $\int (e^x+1)^3 e^x\, dx$

e) $\int \frac{dx}{2x-3}\, dx$

f) $\int \frac{x+2}{x+1}\, dx$

g) $\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^{\frac{1}{3}}}\, dx$

h) $\int \sqrt{x^2-2x^4}\, dx$

i) $\int sen^2 x cos\, x dx$

j) $\int \frac{x^2}{1-2x^3}\, dx$

k) $\int \frac{sen\, x}{cos}\, dx$

l) $\int e^{3x}\, dx$

# Algunos modelos matemáticos clásicos

## 5.7 Los modelos matemáticos

Cuando estudiamos un fenómeno de naturaleza física, económica, demográfica, de ingeniería, etc, no siempre es posible hallar las leyes que enlazan las diversas magnitudes que intervienen en dichos fenómenos. A veces, no es posible siquiera determinar con presición las variables que intervienen en el fenómeno que se estudia. Sin embargo, cuando las relaciones entre las cantidades pueden hallarse, casi siempre puede traducirse esta dependencia en ecuaciones que contienen derivadas y diferenciales.

Cuando un ingeniero quiere encontrar una respuesta a un fenómeno de la naturaleza, cuyos supuestos están basados en experimentos u observaciones, busca traducir dichas observaciones en **ecuaciones matemáticas**. Las ecuaciones que **pretenden describir aproximadamente** el fenómeno en estudio, es lo que llamamos un **modelo matemático**. Por lo antes dicho es claro que un modelo matemático lo que hace es describir aproximadamente la realidad y al mismo tiempo, se busca con él, predecir hechos y situaciones que la observación del fenómeno no puede mostrarnos.

Una característica de los modelos matemáticos, en particular los modelos en los cuales intervienen derivadas y diferenciales, es que, en la aproximación a la realidad se pueden idealizar determinados hechos. Así, por ejemplo, se puede considerar el movimiento de un cuerpo, o de un planeta, como el movimiento de una partícula; o el movimiento de la tierra como el movimiento de una esfera, etc. Cuando hemos hallado el modelo que describe el fenómeno que estamos estudiando decimos que hemos **formulado matemáticamente el problema**. Una de las más importantes ramas de la matemática, que proporciona los métodos para formular matemáticamente una gran variedad de fenómenos, se llama **Ecuaciones Diferenciales**.

Cuando el problema ha sido modelado mediante una ecuación diferencial, dicha ecuación está sujeta a determinadas condiciones. Estas condiciones, llamadas de **valor inicial** o de **frontera** surgen del mismo problema. Sin estas condiciones es prácticamente imposible hallar la o las funciones incógnitas que dan solución al problema.

No todas las ecuaciones diferenciales que modelan fenómenos de la naturaleza pueden resolverse mediante soluciones exactas (analíticas) y con frecuencia se debe recurrir a métodos numéricos. Una solución exacta o analítica es aquella que puede obtenerse mediante los métodos del Cáculo, y se expresa generalmente través de funciones polinomiales, exponenciales, trigonométricas, etc. La mayoría de los problemas que abordaremos en este texto se resolverán analíticamente.

Hallada la solución de la ecuación diferencial debemos ser capaces de interpretar lo que está sucediendo desde el punto de vista del fenómeno. El científico que ha modelado el fenómeno, contrastará la solución obtenida con sus observaciones o resultados experimentales.

De tal modo que al modelar un fenómeno utilizando **ecuaciones diferenciales** debemos distinguir tres etapas bien diferenciadas:

a) **Formular matemáticamente el problema**. Es decir, modelar el fenómeno mediante una ecuación diferencial.

b) **Hallar la solución de la ecuación diferencial**. La ecuación formulada en la etapa anterior, sujeta a determinadas condiciones, debe ser resuelta para obtener la función solución.

c) **Interpretar la solución obtenida**. Con la solución obtenida debemos ser capaces de interpretar el fenómeno y predecir hechos que el fenómeno no puede mostrarnos.

A diferencia del álgebra, en la cual se buscan los números desconocidos, o incógnitas, que satisfacen una cierta ecuación, cuando resolvemos una ecuación diferencial estamos buscando funciones desconocidas que satisfacen dicha ecuación. El siguiente ejemplo intenta mostrar los procesos que permiten traducir principios físicos en ecuaciones diferenciales, interpretando razones de cambio como derivadas, y la forma de hallar la solución de la ecuación diferencial.

**Ejemplo 7**

Supongamos que una partícula se mueve en una trayectoria rectilinea a lo largo de un eje, de tal modo que su aceleración está dada por la ecuación

$$a = -6t + 18 \; [\frac{m}{seg^2}]$$

en cualquier tiempo $t$ mayor que cero.

¿Cómo hallar la función que modele el espacio $s$ recorrido por la partícula, medido a partir del origen, en cualquier tiempo $t > 0$, asumiendo que inicialmente en $t = 0$ la distancia recorrida por la partícula es de 2 metros y que se está moviendo a una velocidad $v = -5 \; [\frac{m}{seg}]$?

SOLUCIÓN Para formular matemáticamente este problema debemos recordar que la velocidad y aceleración de un cuerpo que se mueve con una trayectoria rectilinea, a lo largo del eje $s$, están dadas respectivamente por las ecuaciones

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{y} \quad a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

En consecuencia, de acuerdo al enunciado del problema, escribimos la ecuación

$$(1) \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -6t + 18 \; [\frac{m}{seg^2}]$$

que es la ecuación diferencial que describe la aceleración de la partícula en cualquier tiempo $t > 0$.

Si resolvemos esta ecuación podemos hallar la función que modela la posición de la partícula en cualquier tiempo $t > 0$. Para esto es necesario utilizar las condiciones adicionales, esto es:

a) El hecho de que la partícula en el instante $t = 0$ ha recorrido 2 metros, es decir, $s(0) = 2$.

b) Que la velocidad en el mismo instante es de $-5$ metros por segundo, es decir, $s'(0) = -5$.

Integrando la ecuación (1) resulta

$$(2) \qquad \frac{ds}{dt} = -3t^2 + 18t + C_1$$

donde $C_1$ es una constante arbitraria que puede ser determinada utilizando la condición adicional $s'(0) = -5$ en la ecuación (2). En efecto:

$$s'(0) = -3 \cdot 0^2 + 18 \cdot 0 + C_1 = -5 \iff C_1 = -5$$

En consecuencia la ecuación diferencial que describe la velocidad de la partícula es

$$(3) \quad \frac{ds}{dt} = -3t^2 + 18t - 5$$

Para hallar la función que modela la posición de la partícula en el tiempo $t$ integramos la función (3) y obtenemos

$$(4) \quad s(t) = -t^3 + 9t^2 - 5t + C_2$$

La constante arbitraria $C_2$ puede ser determinada utilizando la condición $s(0) = 2$ en la ecuación (4). Resulta entonces que

$$s(0) = -0^3 + 9 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + C_2 = 2 \iff C_2 = 2$$

En consecuencia la función que modela la posición de la partícula en el tiempo $t$ es:

$$(5) \quad s(t) = -t^3 + 9t^2 - 5t + 2$$

¿Cuál es la posición de la partícula después de primer segundo?. Se ve claro que la posición de la partícula después del primer segundo es

$$s(1) = -1^3 + 9 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = 5 \text{ metros}$$

Finalmente decimos que la función (5) es **solución de la ecuación diferencial (1)**. Para demostrar este hecho es suficiente probar que la función (5) verifica la ecuación (1). En efecto, derivando dos veces la ecuación (5) resulta:

$$s'(t) = -3t^2 + 18t - 5, \text{ y por lo tanto, } s''(t) = -6t + 18 = \frac{d^2s}{dt^2}$$

> **Definición.** Una solución de una ecuación diferencial es cualquier función que satisface la ecuación. Es decir, es aquella función que reduce la ecuación diferencial a una identidad.

Hallada la función que modela la posición de la partícula en cualquier momento de su trayectoria, podemos saber mucho más del movimiento rectilineo de la partícula. Así por ejemplo podemos trazar el gráfico de la función $s(t)$ y hallar los intervalos de tiempo en que la partícula se mueve hacia la izquierda o hacia la derecha del origen, podemos saber el instante preciso en que ésta cambia la dirección de su movimiento, etc.

Notemos que en el problema se dieron dos condiciones para determinar la función modeladora. Una condición sobre la derivada: $s'(0) = -5$, y la otra sobre la función: $s(0) = 2$. Una característica de estas condiciones es que ambas están dadas en un **mismo valor de la variable independiente**, en este caso ambas en el punto $t = 0$. Cuando esto ocurre el problema se llama **problema de valor inicial.**

> **Definición. Un problema de valor inicial** busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida y sus derivadas especificadas ambas en **un valor** de la variable independiente. Tales condiciones se llaman **condiciones iniciales**

Supongamos ahora que las condiciones para el mismo problema son sólamente sobre la función desconocida y en distintos valores de la variable independiente. Por ejemplo: i) la partícula está localizada a 3 metros a partir del origen en el instante $t = 0$; esto es $s(0) = 3$, ii) la partícula está localizada a 5 metros a partir del origen en el primer segundo, es decir, $s(1) = 5$.

Puesto que no tenemos condiciones sobre la derivada $s'(t)$ para obtener $C_1$, tal como lo hicimos en el caso anterior, debemos integrar dos veces la ecuación (1) para obtener

$$s(t) = -t^3 + 9t^2 + C_1 t + C_2$$

Sobre esta ecuación usamos las condiciones $s(0) = 3$ y $s(1) = 5$. En efecto:

Si $s(0) = 3$, resulta $C_2 = 3$ y de $s(1) = 5$, resulta $C_1 + C_2 = -3$

La solución de este sistema de ecuaciones es $C_2 = 3$ y $C_1 = -6$. Por lo tanto la función modeladora buscada es

$$s(t) = -t^3 + 9t^2 - 6t + 3$$

Si queremos saber, por ejemplo, cuál es la distancia recorrida por la partícula en el tercer segundo, debemos calcular $s(3)$. Esto es

$$(6) \qquad s(3) = -(3)^3 + 18(3)^2 - 15(3) + 3 = 93 \text{ metros}$$

Se puede verificar fácilmente que la función (6) es solución de la ecuación diferencial (1). El lector se habrá dado cuenta de la diferencia en las condiciones sobre las ecuaciones, impuestas por el problema. En el segundo caso las condiciones sobre la función desconocida s(t) se hacen en dos valores distintos de la variable independiente, $s(0)$ y $s(1)$. El problema se llama ahora, **problema de valor en la frontera**. A continuación definiremos con mayor precisión este concepto.

**Definición. Un problema de valor en la frontera** busca determinar una solución a una ecuación diferencial sujeta a condiciones sobre la función desconocida especificada en **en dos o más** valores de la variable independiente

## 5.8 Dos modelos matemáticos clásicos.

Nuestra experiencia matemática nos ha ido mostrando que muchos fenómenos de la naturaleza pueden escribirse en el lenguaje del álgebra. Sin embargo esta rama de la matemática es insuficiente para modelar fenómenos que se describen mediante ecuaciones que relacionan cantidades variables. A continuación analizaremos algunos modelos que nos muestran el proceso de traducir leyes y principios científicos en ecuaciones diferenciales interpretando las razones de cambio como derivadas.

### 5.8.1 Modelo de crecimiento y decrecimiento exponencial.

La tasa de cambio con respecto al tiempo de una población $N(t)$, con índices constantes de natalidad y mortalidad, es proporcional al tamaño de la población, es decir

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

donde k es la constante de proporcionalidad

Demostraremos que una cantidad que crece a un ritmo proporcional a su tamaño crece exponencialmente.

Si $N$ es la cantidad y $t$ el tiempo, tendremos que

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

donde $k$ es la constante de proporcionalidad. Para resolver esta ecuación diferencial separaremos las variables $N$ y $t$ en la forma siguiente

$$\frac{dN}{N} = kdt$$

Integrando a ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\int \frac{dN}{N} = \int kdt \iff ln|N| = kt + C$$

Resolvemos la ecuación logarítmica para $N$ aplicando la función exponencial a cada lado de la ecuación. Obtenemos

$$|N| = e^{kt+C_1} = e^{C_1}e^{kt}$$

Observemos que cuando $t = 0$ la constante $e_1^C = N$. Si llamamos $N_0$ a esta constante resulta

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

que es la función que modela el crecimiento exponencial.

El análisis del modelo muestra que cualquier función de la forma

$$(1) \qquad N(t) = Ce^{kt}$$

es solución de la ecuación diferencial

$$(2) \qquad \frac{dN}{dt} = kN$$

Podemos verificar esta aseveración derivando la función solución y viendo si satisface la ecuación diferencial. En efecto:

$$N'(t) = Cke^{kt} = k(Ce^{kt}) = kN(t)$$

En consecuencia la función (1) es solución de la ecuación (2). Puesto que el valor de $C \in \mathbb{R}$ , todas las funciones que resultan de dar un valor a $C$, son soluciones de la ecuación diferencial (2). Podemos decir entonces que la ecuación (2) tiene infinitas soluciones; una para cada elección de la constante arbitraria $C$.

**Ejemplo 8**

Supongamos que $N(t)$ es la población de una colonia de bacterias en el tiempo $t$; que la población en el tiempo $t = 0$ (cero horas) fue de 1 000 bacterias y que la población se duplica después de una hora. Halle la función exponencial que modela el crecimiento de la población bacteriana.

SOLUCIÓN. La información adicional acerca de la función $N(t)$ nos permiten hallar las constantes $N_0$ y $k$. En efecto, de la ecuación $N(t) = N_0 e^{kt}$, resulta

$$N(0) = 1\,000 = Ce^0 = C, \text{ por lo tanto } C = 1\,000$$

Para hallar la constante $k$, aplicamos el hecho de que las bacterias se duplican después de una hora. Esto significa que en $t = 1$ habrán 2 000 bacterias. Por lo tanto

$$N(1) = 2\,000 = Ce^{k\cdot 1} = Ce^k$$

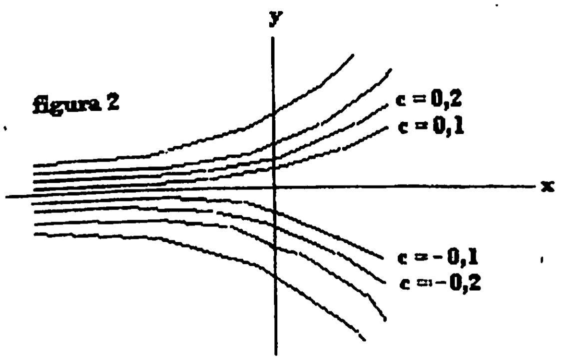
Resolviendo esta ecuación para $k$ resulta que $k = ln\,2$. En consecuencia la función $N(t)$ que modela el creecimiento de la colonia de bacterias es

$$N(t) = 1\,000e^{t \cdot ln\,2}$$

Estamos en condiciones de **predecir** la población en cualquier tiempo futuro. Por ejemplo, la población a los 90 minutos, esto es, a las 1,5 horas, será de

$$N(1,5) = 1\,000e^{(1,5)\,ln\,2} \approx 2\,828 \text{ bacterias}$$

La condición $N(0) = 1\,000$ se llama condición inicial, ya que normalmente esribimos las ecuaciones diferenciales de modo que el punto $t = 0$ sea el valor inicial (punto de partida). La figura (2) muestra algunas de las gráficas de la función $N(t) = Ce^{t \cdot ln\,2}$ que son soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dN}{dt} = \ln\,2\,N$




De hecho las gráficas de las funciones solución de la ecuación diferencial llenan por completo el plano bidimensional sin que haya dos que se intersequen. Y la selección de cualquier punto del eje $N$ conduce a la determinación del valor $N(0)$. Debido a que por cada uno de tales puntos pasa exactamente una solución, el lector puede inferir fácilmente que, en cada caso, una condición inicial $N(0) = N_0$ determina una solución única.

Es posible que en la realidad ninguna de estas soluciones de una respuesta exacta al problema de la determinación de la población, es decir, es posible que la ecuación diferencial (el modelo matemático del fenómeno de población) no describa adecuadamente dicho fenómeno para ninguna selección de las constantes $C$ y $k$. Esto significa que ninguna selección de las constantes $k$ y $C$, haría posible que supiéramos con exactitud el tamaño de la población dentro de 100 años. Por lo tanto deberíamos tratar de escribir una ecuación diferencial más complicada, que tome en cuenta otras variables, por ejemplo, los efectos de la población sobre el índice de la natalidad, la alimentación de la población, etc.

Estas apreciaciones no deben ser consideradas como un fracaso del modelo sino como el hecho de que el modelo no describe exactamente la realidad. Y que si queremos aproximarnos al verdadero crecimiento de la población debemos tener en cuenta otras variables; difíciles de cuantificar la mayoría de las veces. Sin embargo, en determinadas condiciones, como ser con alimentación y espacio ilimitados la cuación diferencial en cuestión, describe con bastante precisión el crecimiento de la población.

De este análisis se puede inferir que el modelo matemático está basado en ciertas simplificaciones y describe aproximadamante al objeto de estudio, pero gracias a la sustitución del objeto real por un modelo correspondiente a él surge la posibilidad de enunciar el problema como matem'atico y utilizar el aparato matemático para estudiarlo.

**5.8.2 La ley del enfriamiento de Newton.** La tasa de cambio de la temperatura $T$ de un cuerpo con respecto al tiempo $t$ es proporcional a la diferencia entre $T$ y la temperatura $A$ del medio ambiente. Esto es

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T)$$

en la que $k > 0$ es la constante de proporcionalidad.

Podemos preguntarnos cómo varía la temperatuta T del cuerpo a medida que transcurre el tiempo t. Suponiendo que $t$ sea el tiempo y T la temperatura del cuerpo, separando las variables en la ecuación $\frac{dT}{dt} = k(A - T)$, resulta

$$\frac{dT}{A - T} = kdt$$

Integrando ambos miembros de la ecuación se obtiene

$$\int \frac{dT}{A - T} = \int kdt \iff -ln\,|A - T| = kt + C_1$$

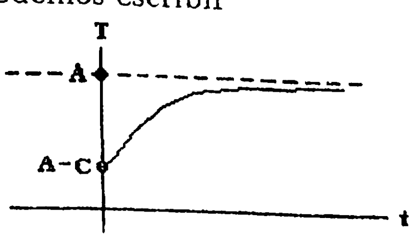
Observe que $A - T$ puede ser positivo o negativo. Supondremos que $A - T > 0$, por lo tanto se tiene

$$ln\,(A - T) = kt + C_1 \iff A - T = e^{-kt - C_1} \iff T = A - e^{-C_1}e^{-kt}$$

Haciendo $C = e^{-C_1}$ y usando la notación funcional podemos escribir

$$(1) \qquad T(t) = A - Ce^{-kt}$$

función cuyo gráfico está esbozado en la figura (3)



**Ejemplo 9**

Una chuleta de rinoceronte de 5kg, originalmente a 50 grados farenheit, se pone en un horno a 375 grados farenheit a las 5:00 p.m. Después de 75 minutos se halló que la temperatura $T(t)$ de la carne era de 125 grado farenheit. ¿A qué hora estará la chuleta a medio cocer a 150 grados farenheit?

SOLUCIÓN. Tomando el tiempo $t$ en minutos, a las 5:00 P.M. corresponderá $t = 0$. De acuerdo a las condiciones del problema se tiene que i) $A = 375$ y ii) $T(0) = 50$. En consecuencia resolveremos la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k(375 - T)$$

Separando las variables e integrando se tiene

$$\int \frac{1}{375 - T} dT = \int k dt = -ln\,(375 - T) = kt + C_1 \Longleftrightarrow 375 - T = Ce^{-kt}$$

Observe que hemos llegado a la ecuación (1) reemplazando $A = 375$. Esto es

$$T = 375 - Ce^{-kt}$$

Ahora bien, con la condición inicial $T(0) = 50$, podemos determinar el valor de la constante $C$. En efecto:

$$T(0) = 50 = 375 - C \Longleftrightarrow C = 325$$

y en consecuencia

$$(2) \qquad T = 375 - 325e^{-kt}$$

Solo nos resta hallar el valor de la constante $k$ para determinar completamente la función que modela nuestro fenómeno. Para esto tenemos la condición adicional $T(75) = 125$. la sustitución de estos valores en la ecuación (2) produce los sigiuientes resultados

$$T(75) = 375 - 325e^{-75k} \Longleftrightarrow k = -\frac{1}{75}\,ln\,(\frac{250}{325}) \approx 0,0035$$

Finalmente para determinar a que hora estará la chuleta a 150 grados farenheit debemos resolver la ecuación

$$150 = 375 - 325e^{(-0,0035)t}$$

Se puede hallar fácilmente que

$$t = -\frac{(ln\,\frac{225}{325})}{0,0035} \approx 105 \text{ min}$$

Por lo tanto el tiempo total de cocción requerido es de 125 minutos. Y puesto que la chuleta se metió al horno a las 5:00 P.M. debe sacarse de allí a las 6:45 P.M.

## 5.9 Algunos conceptos fundamentales

Una Ecuación Diferencial es una ecuación que contiene derivadas de una función desconocida de una o más variables. Si la función desconocida depende sólo de una variable (de tal modo que las derivadas son derivadas ordinarias), la ecuación se llama **Ecuación Diferencial Ordinaria**. Hasta ahora hemos trabajado con ecuaciones diferenciales que contienen sólamente una función incognita y que depende de una sola variable, por lo tanto se trata de ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Ejemplo 10**

La ecuación difrencial $\frac{dy}{dx} = 4x + 2y$, que se escribe también $y' = 4x + 2y$, en la cual $y$ es la función desconocida de una sola variable **es una ecuación Diferencial Ordinaria**. Como sabemos, $x$ es la variable independiente e $y$ la variable dependiente.

Con frecuencia escribiremos las derivadas sucesivas de $y$ por $y'$, $y''$, $y'''$, etc. Algunas veces escribiremos los mismo en la forma $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$, etc. Así, por ejemplo, la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0 \text{ se escribe } y'' + y' + y = 0$$

En el ejemplo 2 vimos que el problema tenía una infinidad de soluciones. En lo que sigue analizaremos con más detalle este importante hecho.

**Ejemplo 11**.

Una curva en el plano tiene la propiedad de que su pendiente en cualquier punto $(x, y)$ es igual a $2x$. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto $(2, 5)$.

SOLUCIÓN Puesto que la pendiente de la curva en cualquier punto $(x, y)$ de ella está dado por $\frac{dy}{dx}$, del enunciado del problema se infiere que

$$(1)\quad \frac{dy}{dx} = 2x, \text{ con la condición inicial y(2)=5}$$

La solución de la ecuación diferencial (1) es

$$y = x^2 + C, \text{ (donde el parámetro C es una constante arbitraria)}$$

Esta solución, que contiene un parámetro o constante arbitraria, se llama **Solución general** de la ecuación diferencial. El gráfico de la función $y = x^2 + C$ nos muestra que dicha función representa una familia de curvas del plano.

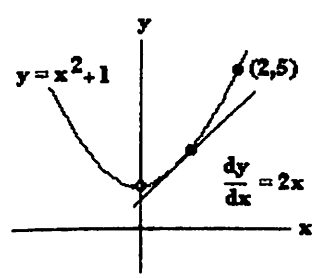
Hemos dado valores enteros a la constante $C$ para mostrar que cada una de los miembros de la familia está asociado con un valor particular de $C$. La ecuación diferencial, que es satisfecha por cada una de los miembros de la familia, se l-lama ecuación diferencial de la familia. Para hallar una **solución particular**, es decir para determinar un valor particular para la constante C, se utilizan las **condiciones iniciales**. Así, entonces, de $y(2) = 5$, resulta

$$y(2) = 2^2 + C = 5 \iff 4 + C = 5 \iff C = 1$$

En consecuencia la curva pedida es la de la figura (4)

$$y = x^2 + 1$$

figura 4




## 5.10 Acerca de las soluciones

Cada vez que estamos frente a un problema de valor inicial o de frontera debemos contestarnos dos preguntas fundamentales:

a) **Pregunta de existencia.** ¿EXISTE una solución de la ecuación diferencial que satisfaga las condiciones dadas?

b) **Pregunta de unicidad.** ¿Existe una UNICA solución que satisfaga la ecuación diferencial con las condiciones dadas?

Ambas preguntas tienen una gran importancia no sólo desde el punto de vista matemático, sino fundamentalmente desde el punto de vista de los modelos. Supongamos que hemos logrado modelar un fenómeno de la naturaleza con una ecuación diferencial y a continuación probamos que dicho problema de valor inicial o de frontera no tiene solución. Entonces no tiene sentido intentar hallar una solución.

Si tuvieramos exito en hallar una solución, está todavía el problema de la unicidad. Si se hallan dos o más soluciones para una misma condicion inicial se estaría violentando el principio científico fundamental de que un sistema no puede comportarse en formas distintas bajo las mismas condiciones. Y si esto ocurriera con una ecuación diferencial que modelara un fenómeno, deberíamos poner en sospecha la formulación matemática a que hemos llegado. El siguiente es un ejemplo de una ecuación diferencial que tiene más de una solución para la misma condición inicial

**Ejemplo 12**

La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}, \text{ con la condición } y(2)=0$$

tiene la solución general $y = (x + C)^3$, de la condición inicial se obtiene $C = -2$. De modo que la función $y = (x-2)^3$ es una solución de la ecuación propuesta. En efecto, $y' = 3(x-2)^2$ y reemplazando $y$ e $y'$ en la ecuación diferencial, resulta

$$3(x-2)^2 = 3[(x-2)^3]^{\frac{2}{3}} \Longleftrightarrow 3(x-2)^2 = 3(x-2)^2$$

Sin embargo otra solución está dada por la función $y = 0$. En efecto, la derivada de $y' = 0$. Reemplazando $y$ e $y'$ en la ecuación diferencial resulta la identidad $0 = 0$.

Con frecuencia, en los problemas aplicados, se hallan soluciones particulares de la ecuación diferencial que no se obtienen de la solución general mediante una selección de las constantes arbitrarias. Estas soluciones se llaman **soluciones singulares**. Estas soluciones poco usuales y **extrañas** aparecen con frecuencia en las ecuaciones diferenciales que estudiaremos con detalle más adelante.

## 5.11 Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una ecuación diferencial **de primer orden** es aquella en la que sólo aparece la primera derivada de la variable independiente. Se llama **lineal** si se puede escribir en la forma

$$\frac{dx}{dt} = ax + b$$

donde $a$ y $b$ representan funciones de la variable independiente $t$.

De tal modo que las ecuaciones diferenciales que modelan las leyes del enfriamiento de Newton, de Torricelli y de Crecimiento o Decrecimiento, son ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Cuando demostramos que una cantidad que crece a un ritmo proporcional a su tamaño crece exponencialmente, esto es, cuando hallamos la solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

utilizamos el **método de las variables separables**. En efecto, separamos las variables $N$ y $t$ en la forma siguiente

$$\frac{dN}{N} = kdt$$

Integrando a ambos lados de la ecuación obtuvimos

$$\int \frac{dN}{N} = \int kdt \iff ln|N| = kt + C$$

A continuación hallamos la solución de la ecuación logaritmica para $N$ aplicando la función exponencial a cada lado de la ecuación. Obtenemos

$$|N| = e^{kt+C_1} = e^{C_1}e^{kt}$$

Observemos que cuando $t = 0$ la constante $e_1^C = N$. Si llamamos $N_0$ a esta constante resulta

$$N(t) = N_0e^{kt}$$

que es la función que modela el crecimiento exponencial.

> Definición. Una ecuación diferencial de la forma
>
> $$f(y)dy = g(x)dx$$
>
> se llama *ecuación diferencial de variables separables*

Para resolver este tipo de ecuaciones es suficiente integrar en ambos lados de la ecuación $f(y)\,dy = g(x)\,dx$

**Ejemplo 13**

Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = xy + x - 2y - 2, \quad y(0) = 2$$

La observación del segundo miembro de la ecuación muestra que la única forma de separar las variables es factorizándolo. En efecto, aunque dicha factorización no es obvia se puede obtener

$$\frac{dy}{dx} = (x-2)(y+1)$$

Note que la función constante $y = -1$ es una solución de la ecuación, pero no satisface la condición inicial. Al dividir ambos miembros por $y+1$ resulta

$$\int \frac{1}{y+1}dy = \int (x-2)dx$$

Integrando en ambos miembros se tiene

$$ln\,|y+1| = \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$$

Suponiendo que $y + 1 > 0$ se obtiene

$$ln\,(y+1) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$$

Aplicando la función exponencial en ambos miembros de la ecuación logarítmica, con la observación de que $e^{ln\,x} = x$, se obtiene

$$y + 1 = e^{\frac{1}{2}x^2 - 2x + C} \iff y + 1 = e^C e^{\frac{1}{2}x^2 - 2x}$$

Si hacemos $A = e^C$ resulta

$$y = Ae^{\frac{1}{2}x^2-2x} - 1$$

Aplicando la condición inicial $y(0) = 2$ se obtiene que $A = 3$, por lo tanto la solución deseada es

$$y = 3e^{\frac{1}{2}x^2-2x} - 1$$

**Ejemplo 14**

Halle la solución particular de la ecuación

$$(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x, \text{ con la condición inicial } y(0) = 1$$

Separando las variables y aplicando el signo integral se obtiene

$$y\,dy = \frac{e^x\,dx}{1+e^x} \iff \int y\,dy = \int \frac{e^x\,dx}{1+e^x}$$

Integrando, hallamos

$$(1) \quad \frac{y^2}{2} = ln\,(1+e^x) + C$$

Imponiéndole, a esta ecuación, la condición inicial $y(0) = 1$ resulta

$$\frac{1}{2} = ln\,2 + C \iff C = \frac{1}{2} - ln\,2 \iff C = \frac{1-2ln\,2}{2}$$

Poniendo este valor de $C$ en la ecuación (1) se obtiene la solución particular

$$y^2 = ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2 + 1$$

Es decir

$$y = \sqrt{ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2 + 1}$$

# 5.12 Ejercicios propuestos

1. Verifique si la función indicada es o no solución de la ecuación diferencial. a) $2y'+y=0$; $y=e^{-\frac{x}{2}}$. b) $y'+4y=32$; $y=8$. c) $y'+20y=24$; $y=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}e^{-20t}$. d) $y'=25+y^2$; $y=5tan\,5x$. e) $y'+y=sen\,x$; $y=\frac{1}{2}sen\,x\frac{1}{2}cos\,x+10e^{-x}$. f) $2xydx+(x^2+2y)dy=0$; $x^2y+y^2+C_1$. g) $x^2dy+2xydx=0$; $y=-\frac{1}{x^2}$

2. Halle la ecuación diferencial de la familia de curvas $y=cx^3$. Trace el gráfico de dicha familia.

3. Obtenga la ecuación diferencial de la familia de curvas $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$

4. Halle la ecuación diferencial de la familia de circunferencias con centro en el origen.

5. Obtenga la ecuación diferencial de la familia de parábolas

6. Halle la ecuación diferencial de la familia $y=\frac{2Ce^{2x}}{1+Ce^{2x}}$

7. La pendiente de una familia de curvas en cualquier punto $(x,y)$ del plano está dada por $4-2x$. a) Establezca la ecuación diferencial de la familia. b) Determine una ecuación para aquel miembro de la familia que pasa por el punto $(0,0)$. c) Dibuje algunos miembros de la familia, incluyendo el hallado en (b).

8. Trabaje el ejercicio anterior si la pendiente está dada por $4e^{-2x}$

9. Una partícula se mueve a lo largo del eje x de modo que su velocidad instantanea
$$\frac{dx}{dt}=12-3t^2\ [\frac{m}{seg}]$$
está dada como una función del tiempo $t$. En el instante $t=1$, la partícula está localizada en $x=-5$. a) Establezca un problema de valor inicial que describa el movimiento de la partícula. b) Halle la función $x(t)$ que modela la posición de la partícula en el tiempo $t$. c) Determine donde estará la partícula en los tiempos $t=2$ y $t=3$. d) Determine los tiempos en que la partícula está en el origen. e) Determine los intervalos de tiempo en los cuales la partícula está moviéndose hacia la izquierda y hacia la derecha del origen. f) Describa elmovimiento de la partícula trazando un gráfico de la función posición.

10. Una partícula se mueve a los largo del eje $x$ de modo que su aceleración instantanea está dada como una función del tiempo $t$ por la ecuación

$$a = 10 - 3t^2 \ [\frac{m}{seg^2}]$$

En los tiempos $t = 2$ y $t = 3$ la partícula está localizada en $x = 0$ y $x = -40$ respectivamente. a) Establezca la ecuación diferencial y condiciones asociadas que describen el movimiento. b) ¿El problema es de valor inicial o de frontera. c) Halle la función $x(t)$ que modela la posición de la partícula en el instante $t$. d) Determine la posición de la partícula en el instante $t = 1$. e) Trace el gráfico de la función $x(t)$ y úselo para determinar en que intervalos la partícula se mueve hacia la derecha y hacia la izquierda. f) Considere el mismo problema suponiendo que la partícula está en el instante $t = 0$ a una distancia de 3 metros del origen y tiene una velocidad $v = -6$.

11. Resuelva cada una de los siguientes problemas de valor inicial o de frontera y de, en cada caso, una interpretación geométrica o física posible.

    a) $\frac{dy}{dx} = 3sen\, x$, tal que, $y(\pi) = -1$

    b) $\frac{dx}{dt} = 4e^{-t} - 2$, tal que, $x(0) = 3$

    c) $\frac{ds}{du} = 9\sqrt{u}$, tal que, $s(4) = 16$

    d) $y'' = 12x(4 - x)$, tal que, $y(0) = 7$ y $y(1) = 0$

12. En cada uno de los ejercicios sigiuientes se da una ecuación diferencial para una familia de curvas, Obtenga las curvas solución para cada familia y de el número de parámetros involucrados. Halle los miembros particulares de cada familia que satisfaga las condiciones dadas

    a) $y' = -\frac{4}{x^2}$; $y(1) = 2$. b) $y'' = 1 - cos\, x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

13. Hallar las ecuaciones de las curvas tales que los segmentos de cada tangente comprendidos entre los ejes de coordenadas queden divididos en dos partes iguales por el punto de tangencia. Ver figura (a)

14. Un cultivo tiene inicialmente una cantidad $N_0$ de bacterias. Para $t = 1$ hora el número de bacterias medido es $\frac{3}{2}N_0$. Si la rapidéz de multiplicación es proporcional al número de bacterias presentes, determine el tiempo necesario para que el nmero de bacterias se triplique.

15. al sacar un pastel del horno su temperatura es de 300 grados farenheit, tres minutos después su temperatura es de 200 grados farenheit, ¿cuánto demorará en enfriarse hasta una temperatura ambiente de 70 grados farenheit?

# Capítulo 6 La integral definida

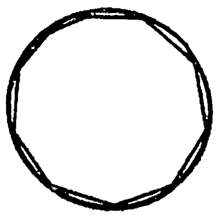
**Objetivos**

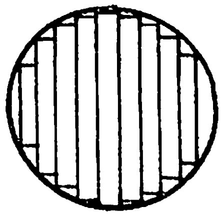
1. Comprender la evolución, a traves de la historia, del concepto de integral como límite de una suma de áreas.
2. Comprender la importancia del teorema fundamental del cálculo como un puente entre el concepto de límite de una suma y el cálculo de primitivas.
3. Estudiar las propiedades de la integral definida.
4. Utilizar EL DERIVE para calcular integrales definidas y estudiar modelos en los cuales intervenga dicho concepto.

## 6.1 Las ideas que dieron origen al Cálculo Integral.

En realidad los primeros problemas del Cálculo Integral fueron propuestos, y resueltos mediante aproximaciones, por los egipcios y babilonios, al calcular el volumen de cilindros, conos y pirámides. La necesidad de saber la cantidad de trigo, maíz, y otros cereales, que debían guardar en silos de diferentes formas y tamaños, los obligó a calcular el volumen de este tipo de sólidos. En este terreno los egipcios realizaron la extraordinaria hazaña de calcular el volumen exacto de un tronco de pirámide de base cuadrada. Al mismo tiempo resolvieron brillantemente el cálculo de áreas de regiones acotadas por lineas rectas, no así el de las figuras acotadas por lineas curvas. El caso más interesante de los intentos por resolver problemas del segundo tipo, se refiere al cálculo del área del círculo. Al pretender calcular, aproximadamente, el **área del círculo**, ejercicio propuesto con el número 48 en el *papiro de Rhind*, los egipcios, formularon sin saberlo, uno de los problemas más fecundos de la matemática: el problema de la cuadrátura del círculo. Muchos de los problemas relativos al cálculo de superficies acotadas por lineas curvas, propuestos por egipcios y babilonios, fueron resueltos después por los antiguos griegos en los mil años de esplendor de su civilización. El milagro griego ocurrido entre los siglos VII antes de Cristo y III después de Cristo, dejó una huella que aún transitamos con admiración.

Es posible que si en la época de **Arquímedes (287-212 a.C)** se hubiera desarrollado una simbología matemática como la que tenemos actualmente, el Cálculo Integral habría sido inventado con dos mil años de anticipación. Arquímedes, para calcular el área aproximada del círculo, inscribió tantos polígonos regulares, de más y más lados, como le fue posible, hasta que el *último* de ellos se confundiera con el círculo, fig (1). A continuación calculó el área de éste ultimo y la propuso como una aproximación. Esto le permitió, también, calcular el número $\pi$ con 3 decimales exactos.





También calculó el área del círculo subdiviéndolo en rectángulos, tal como muestra la figura (2). En ambos casos expresó que si el número de lados aumentara indefinidamente, las áreas aproximadas serían exactamente iguales al área del círculo. Utilizando el aparato geométrico euclideano Arquímedes logró calcular, por ejemplo, el área de una superficie acotada por un segmento de parábola (cuadratura de la parábola) y los volúmenes exactos del cilindro, del cono y de la esfera; amén de interesantes propiedades relativas a estos sólidos.

Sin embargo la geometría euclideana resultó ser una herramienta poco útil para resolver una amplia gama de problemas que surgieron, dos mil años después, durante El Renacimiento. La necesidad de determinar la longitud de segmentos de curvas cualesquiera y el área de superficies encerradas por éstas, entre otros problemas, hizo necesario desarrollar un aparato matemático menos engorroso y que pudiera ser utilizado incluso por los aficionados a la matemática.

Con una simbología más desarrollada y con la invención del Sistema Cartesiano de Coordenadas, fue posible escribir formalmente estas ideas. En lo que sigue utilizando las ideas de Arquímedes (y la simbología moderna) intentaremos desarrollar métodos para calcular el área de cualquier región plana acotada por el eje $x$, las rectas $x = a$ y $x = b$ y la gráfica de una función $f$ continua, y no negativa.

Sin embargo, para poner en práctica estas ideas necesitamos definir previamente algunas notaciones y otros conceptos que se derivan de ellas.

## 6.2 La notación sigma

La letra mayúscula griega $\Sigma$, la usaremos para denotar abreviadamente el concepto de suma. Así, por ejemplo, para expresar la suma de los 5 primeros números naturales, escribiremos: $1+2+3+4+5=\sum_{i=1}^{5} i$

Los siguientes son otros ejemplos de sumas abreviadas de diferentes términos.

$$a)\quad a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$b)\quad 1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+\cdots+m^2=\sum_{i=1}^{m} i^2$$

$$c)\quad f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\cdots f(x_n)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

La letra i se llama índice de la suma y los números enteros 1 y n son los límites inferior y superior respectivamente. Es claro que en vez de las letras y número anteriores pueden utilizarse cualesquiera otras. Con frecuencia, por tradición, para el índice, suelen usarse las letras i y j.

**Ejemplo 1**

Escribir en notación abreviada ($\Sigma$) la siguiente suma de términos:

$$\frac{1}{1+1}+\frac{2}{2+1}+\frac{3}{3+1}+\cdots\frac{n}{n+1}$$

SOLUCIÓN. Observe que los "$n$" *primeros términos* de la suma son de la forma:

$$\frac{n}{n+1}$$

El primer término se forma con el índice $i=1$, el segundo con el índice $i=2$, etc, hasta alcanzar el enésimo término. En consecuencia el índice "i" toma todos los valores desde $i=1$ hasta $i=n$. Por lo tanto la suma abreviada se escribe:

$$\frac{1}{1+1}+\frac{2}{2+1}+\frac{3}{3+1}+\cdots\frac{n}{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{i+1}$$

**Ejemplo 2**

Evaluar la suma $\sum_{j=0}^{3} \frac{j+1}{j+2}$.

SOLUCIÓN. Observe que el índice de la suma va des 0 hasta 3, por lo tanto se tiene que:

$$\sum_{j=0}^{3} \frac{j+1}{j+2} = \frac{0+1}{0+2} + \frac{1+1}{1+2} + \frac{2+1}{2+2} + \frac{3+1}{3+2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{163}{60}$$

Dos importantes propiedades de la notación $\Sigma$ son las siguientes:

$$1) \sum_{i=1}^{n} cf(i = c\sum_{i=1}^{n} f(i), \quad c \text{ es constante}$$

$$2) \sum_{i=1}^{n} [f(i) \pm g(i)] = \sum_{i=1}^{n} f(i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(i)$$

La primera de ellas significa que cualquier factor independiente del índice es una constante y puede ser sacado fuera del símbolo de suma, y la segunda, expresa la distributividad del signo respecto de la suma (resta) de funciones.

**Ejemplo 3**

a) En la siguiente igualdad se ve que la expresión $\frac{4}{n^2}$ no depende del índice, por lo tanto puede ser sacado y puesto antes del símbolo de suma:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{4}{n^2} i^2 = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

b) Se destaca, además, la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n} k = k\sum_{i=1}^{n} 1 = k(1+1+1+1+\cdots 1) = k \cdot n$$

Un impulso al desarrollo del concepto de suma de una sucesión de números lo dio en su niñez el gran matemático Alemán **Karl Gauss (1777-1855)**.

**Gauss**, *fue hijo de un modesto albañil nacido en el año 1777 en la ciudad de Braunscweig, Alemania. En sus primeros años, como el mismo contaba, aprendió a leer como todo el mundo. Con el tiempo, adquiró una memoria prodigiosa y una gran habilidad para calcular. A los siete años ingresó a la escuela de su barrio y, según se cuenta, hasta los 7 años jamás sobresalió entre sus compañeros. Un día de verano, a los 9 nueve años, su profesor, correa en mano, como eran los profesores de esa época, les dio la tarea de sumar desde el 1 hasta el 60, tarea suficiente para tenerlos tranquilos durante más de una hora. Para efectuar los cálculos los niños usaban una pizarrita pequeña que debían dejar sobre la mesa a medida que iban terminando. Dos minutos después de haber propuesto el ejercicio, el diminuto Gauss saltó de su asiento y en carrera llegó hasta la mesa del profesor diciendo en el dialecto local "ligget se", que significa "ahí está". El maestro miró al paliducho Gauss sonriendo maliciosamente, como diciendo, "después de la paliza que te daré se te quitarán las ganas de gastarme semejante broma. Luego de que todo el mundo hubo entregado las pizarras, de las cuales la de Gauss era la primera, el maestro empezó por la última, distribuyendo a cada uno, los elogios o la reprimenda verbal según fuera el caso. Al llegar a la de Gauss, su sorpresa no tuvo límites, porque no había más que un número,* 1 830, *que era el resultado correcto.*

*¿Cómo había hecho el rapaz para llegar a este resultado tan rápidamente se preguntó el maestro?, ¿lo había sabido casualmente de memoria?. Interrogado Gauss como en un tribunal, dijo que todo era muy simple. En primer lugar había hecho los cálculos mentalmente para no perder el tiempo escribiendo. Colocó los números en su memoria, desde el 1 hasta al 30, en una primera fila, y desde el 31 hasta el 60 en una segunda fila, de modo que la suma del número de arriba con el de abajo fuera siempre 61. El profesor le le exigió que escribiera dichos cálculos y Gauss anotó lo siguiente:*

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & \cdots 30 \\ 60 & 59 & 58 & 57 & 56 & 55 & 54 & 53 & 52 & 51 & \cdots 31 \\ \hline 61 & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 & 61 & \cdots 61 \end{array}$$

*Para Gauss calcular ahora mentalmente 30 veces 61 era algo sencillo, de tal modo que escribio* 1 830. *El señor* **Burtner**, *así se llamaba el maestro, quedó con la boca abierta, dejó el chicote en la mesa y felicitó efusivamente al debil Gauss. Días después el señor Burtner hizo algo con lo cual pasó a la historia para siempre, compró en Hamburgo un libro de matemática y se lo dio de regalo. A los 15 años Gauss era un gran matemático y llegó a ser a los 25 años, el más grande matemático de Europa. La historia lo conoce como el* **Príncipe de las Matemáticas**.

Tiempo después, cuando Gauss hubo asimilado la simbología matemática, inventó una fórmula para sumar los $n$ primeros números naturales, escribiendo lo siguiente:

$$1+2+3+4+5+6+7+\cdots+n=\frac{n\,(n+1)}{2}$$

De tal modo que en notación de suma abreviada se puede escribir:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Con el tiempo se propusieron otras notables fórmulas para sumar determinados números. Algunas de ellas, que utilizaremos más adelante, son las siguientes:

2) $\sum_{i=1}^{n} c = c \cdot n$

3) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6}$

4) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

5) $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n\,(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

Todas las fórmulas de esta naturaleza pueden ser demostradas por **inducción matemática**, sin embargo no es nuestro propósito detenernos en ahondar estos hechos. De tal modo que las usaremos aceptando su veracidad.

**Ejemplo 4**

Halle una fórmula que permita sumar los "n" primeros términos de la expresión $k(2-3k^2)$, esto es, $\sum_{k=1}^{n} k(2-3k^2)$.

SOLUCIÓN. Utilizando las propiedades de la notación $\Sigma$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k(2-3k^2) &= \sum_{k=1}^{n} 2k - \sum_{k=1}^{n} 3k^3 \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} k - 3\sum_{k=1}^{n} k^3, \text{ y utilizando las fórmulas (1) y (4)} \\
&= 2\left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right] - 3\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] \\
&= n^2 + n - \frac{3}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2), \quad \text{esto es,} \\
&= \frac{4n^2 + 4n - 3n^4 - 6n^3 - 3n^2}{4}, \quad \text{finalmente resulta,} \\
&= \frac{4n + n^2 - 6n^3 - 3n^4}{4}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión $\sum_{k=1}^{n} k(2-3k^2) = \frac{4n+n^2-6n^3-3n^4}{4}$ nos permite calcular la suma de los "n" primeros términos de la forma $k(2-3k^2)$. Así, por ejemplo, la suma de los 5 primeros términos de la expresión propuesta, esto es, $\sum_{k=1}^{5} k(2-3k^2) = -1+(-20)+(-75)+(-184)+(-365)$, se calcula en la expresión hallada para $n=5$. En efecto:

$$S = \frac{4\cdot 5+5^2-6\cdot 5^3-3\cdot 5^4}{4} = \frac{20+25-750-1875}{4} = \frac{-2580}{4} = -645$$

**Ejemplo 5**

Calcular $\sum_{i=0}^{100}(3i-4)$

Observe que la suma empieza desde cero en vez de 1. En estos casos conviene expresar aparte el primer número e iniciar la suma con $i=1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{100}(3i-4) &= -4+\sum_{i=1}^{100}(3i-4)\\
\sum_{i=1}^{100}(3i-4) &= -4+3\sum_{i=1}^{100} i-\sum_{i=1}^{100} 4\\
\sum_{i=1}^{100}(3i-4) &= -4+3\left[\frac{100\cdot 101}{2}\right]-4\cdot 100 = 14746
\end{aligned}$$

## 6.3 Arquímedes, Newton y las sumas de Riemann.

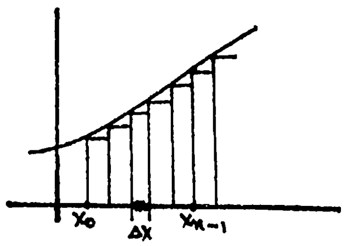
**Isaac Newton**, expresó que: *"si en cualquier figura delimitada por rectas y por una curva se inscriben y circunscriben rectángulos en número arbitrario, y si la anchura de tales rectángulos se va disminuyendo a la par que se aumenta el número de ellos hasta el infinito, afirmo que las razones entre las figuras inscritas y circunscritas y la figura curvilinea acabarán siendo razones de igualdad".*

Como vemos estas palabras no difieren mucho de las que Arquímedes había pronunciado mil ochocientos años antes. Sin embargo Newton fue más lejos (se había desarrollado el álgebra y otras ramas de la matemática) y supuso la existencia de una función $f$ no negativa y continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. A continuación redujo el problema al calculo del área bajo el gráfico de $f$ entre las rectas $x = a$ y $x = b$. Para esto dividió el intervalo $[a, b]$ en $n$ subintervalos iguales:

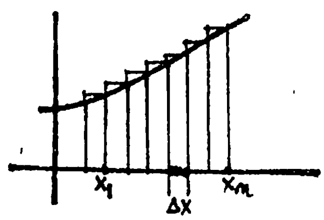
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

y trazó gráficos como los de las figuras (3) y (4). La figura (3) muestra los rectángulos inscritos en la curva $y = f(x)$, donde $A_1$ es la suma de las áreas de dichos rectángulos. Dicha área se escribe mediante la expresión que sigue:

$$A_1 \approx f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$




se ve que $f(x_0), f(x_1), \cdots f(x_{n-1})$, son las alturas de los rectángulos y $\Delta x$ es el ancho de la base; igual para cada uno de dichos rectángulos. Es claro que el área bajo la curva es menor que el área exacta. A esta suma se le llama *Suma Inferior*. La figura (4) muestra la aproximación $A_2$ del área tomando rectángulos por exceso, es decir, de rectángulos cuya área sobrepasa el área exacta. A la suma total se le llama *Suma Superior*. Analogamente $f(x_1), f(x_2), \cdots f(x_n)$ son las alturas de los rectángulos y $\Delta x$ es el ancho de la base de cada uno de ellos.




$$A_2 \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} fx_i)\Delta x$$

Estos resultados nos sugiere la siguiente desigualdad respecto del área exacta $A$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

En la práctica las áreas aproximadas se acercarán cada vez más al área exacta subdividiendo el intervalo $[a, b]$ en una mayor cantidad de subintervalos de manera que la longitud de la base de cada uno de los rectángulos tienda a cero. Esto es lo mismo que decir que si $n \longrightarrow +\infty$ entonces, como afirmaba Newton, *las razones entre las figuras inscritas y circunscritas acabarán siendo razones de igualdad.*

**Veremos más adelante, que estas sumas, llamadas sumas de Riemann, resultan ser un importante instrumento para definir el concepto de Integral Definida.**

**Ejemplo 6**

Use la suma inferior para hallar el área aproximada de la región comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y el eje $x$, en el intervalo $[0.2]$. Divida dicho intervalo en cinco subintervalos.

SOLUCIÓN. Observemos que la longitud $\Delta x$ de cada subintervalo del intervalo $[a, b]$ está dado por la expresión $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, donde $n$ es el número de subintervalos. En nuestro ejemplo $n = 5$, $a = 0$ y $b = 2$, por lo tanto, se tiene que:

$$\Delta x = \frac{2-0}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Puesto que $\Delta x = 0,4$ resulta que cualquier punto de orden $x_{i+1}$ se obtiene sumando $\frac{2}{5} = 0,4$ al punto de orden $x_i$. De este modo si el primer punto es $x_0 = 0$, entonces el segundo punto es $x_1 = 0+\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$, el tercer punto será $x_2 = x_1+\frac{2}{5} = \frac{2}{5}+\frac{2}{5} = \frac{4}{5} = 0,8$. Finalmente los cuarto, quinto y sexto puntos son $x_3 = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$ ; $x_4 = \frac{6}{5} + \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$ y $x_5 = \frac{8}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$. Esto nos sugiere que la fórmula $x_i = \frac{2i}{5}$ nos permite hallar todos los puntos de la división. En efecto, si $i$ toma los valores $0, 1, 2, 3, 4, 5$, respetivamente, resulta la tabla siguiente:

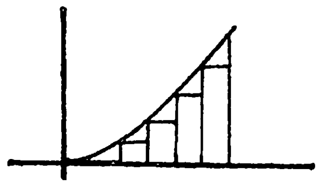
| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i = \frac{2i}{5}$ | $x_0 = 0$ | $x_1 = \frac{2}{5}$ | $x_2 = \frac{4}{5}$ | $x_3 = \frac{6}{5}$ | $x_4 = \frac{8}{5}$ | $x_5 = 2$ |

Note que la expresión $x_i = \frac{2}{5}i$ es un caso particular de la fórmula general:

$$x_i = a + \frac{(b-a)\,i}{n}, \quad \text{cuando } n = 5,\ a = 0 \text{ y } b = 2$$

que nos permite hallar los puntos $x_i$ de subdivisión de cualesquiera que sea el intervalo $[a, b]$ y el número $n$ de subintervalos. El gráfico de la figura (5) muestra los cinco rectángulos construidos por defecto bajo la curva $f(x) = x^2$ en el intervalo

$[0,2]$, donde el primero de ellos es de área nula porque su altura es $f(0)=0$ y el último tiene por altura $f(x_{i-1})=f(\frac{8}{5})$. En consecuencia el área aproximada es:



$$A \approx f(0)\cdot\frac{2}{5}+f\left(\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{2}{5}+f\left(\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{2}{5}+f\left(\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{2}{5}+f\left(\frac{8}{5}\right)\cdot\frac{2}{5}$$

Factorizando por la fracción $\frac{2}{5}$ podemos escribir:

$$A \approx \frac{2}{5}\left[0+\frac{4}{25}+\frac{16}{25}+\frac{36}{25}+\frac{64}{25}\right]=\frac{2}{5}\left[\frac{120}{25}\right]=\frac{2}{5}\left[\frac{24}{5}\right]=\frac{48}{25}=1,92$$

**Ejemplo 7**

Usando las sumas inferiores y superiores hallar el área exacta de la región comprendida entre la gráfica de la función $f(x)=x^2$ y el eje x, en el intervalo $[0,2]$.

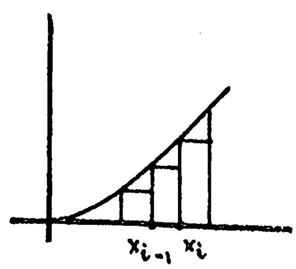
SOLUCIÓN. Para hallar las sumas pedidas es necesario determinar previamente la longitud de cada uno de los subintervalos y los puntos correspondientes a la división. Se divide, en primer lugar, el intervalo $[0,2]$ en $n$ subintervalos de igual longitud. Puesto que la longitud de cada subintervalo es $\Delta x$, resulta que:

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$$

La figura (6) muestra algunos rectángulos inscritos bajo la curva $f(x)=x^2$. Note que la expresión:

$$x_i=\frac{2i}{n}$$

permite hallar cada uno de los puntos en los cuales se subdivide el subintervalo $[a,b]$. En efecto:



| $i$ | 0 | 1 | 2 | $\cdots$ | $i-1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i = \frac{2i}{n}$ | $x_0 = 0$ | $x_1 = \frac{2}{n}$ | $x_2 = \frac{4}{n}$ | $\cdots$ | $x_{i-1} = \frac{2(i-1)}{n}$ |

Así, por ejemplo, si el intervalo se ha dividido en 5 subintervalos, esto es, si $n = 5$, los 6 puntos que subdividen el intervalo [0.2] se muestran en la tabla siguiente:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i = \frac{2i}{5}$ | $x_0 = 0$ | $x_1 = \frac{2}{5}$ | $x_2 = \frac{4}{5}$ | $x_3 = \frac{6}{5}$ | $x_4 = \frac{8}{5}$ | $x_5 = 2$ |

Estamos, ahora, en condiciones de hallar la suma inferior en el intervalo [0.2]. Puesto que dicha suma es $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$, resulta:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x &= \sum_{k=1}^{n} f\left[\frac{2(i-1)}{n}\right]\left(\frac{2}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2(i-1)}{n}\right]^2\left(\frac{2}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8}{n^3}\right)(i^2-2i+1) = \frac{8}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right] \\
&= \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n\right] \\
&= \frac{8}{n^3}\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6} - n^2 - n + n\right] \\
&= \frac{8}{n^3}\left[\frac{2n^3+3n^2+n-6n^2}{6}\right] \\
&= \frac{4}{3n^3}\left[2n^3-3n^2+n\right] = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}
\end{aligned}$$

La última expresión nos sirve para calcular el área bajo la curva entre 0 y 2, por defecto. En el ejemplo (6) hicimos los cálculos para $n = 5$. Observemos que el área aproximada que hallamos es la misma. En efecto:

$$\sum_{i=1}^{5} f(x_{i-1})\Delta x = \frac{8}{3} - \frac{4}{5} + \frac{4}{75} = 1,92$$

Para calcular la suma superior utilizamos la expresión $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$. Resulta entonces que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} f\left[\frac{2i)}{n}\right]\left[\frac{2}{n}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2^2 i^2}{n^2}\right]\left[\frac{2}{n}\right] = \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{8}{n^3}\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right] \\
&= \frac{4}{3n^3}\left[2n^3+3n^2+n\right] = \frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}
\end{aligned}$$

El área por exceso para el mismo número de puntos, es decir, para $n = 5$ es:

$$\sum_{i=1}^{5} f(x_i)\Delta x = \frac{8}{3}+\frac{4}{5}+\frac{4}{75} \approx 3,52$$

De acuerdo a Arquímedes y Newton, si el número de subintervalos elegido fuese mayor, las sumas superior e inferior deberían llegar a ser iguales. De hecho si $n = 100$ entonces el área por defecto es:

$$\sum_{i=1}^{100} f(x_{i-1})\Delta x = \frac{8}{3}-\frac{4}{100}+\frac{4}{30\,000} \approx 2,62673$$

En cambio, el área por exceso es:

$$\sum_{i=1}^{100} f(x_i)\Delta x = \frac{8}{3}+\frac{4}{100}+\frac{4}{30\,000} \approx 2,70673$$

Siguiendo la misma idea, esto es, haciendo tender $n$ a infinito, las áreas por defecto y por exceso tendrían que ser iguales. En efecto, para el área por defecto escribimos:

$$\text{Area exacta} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \lim_{n\longrightarrow+\infty} = \frac{8}{3}-\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2} = \frac{8}{3}$$

Para el área por exceso escribimos:

$$\text{Area exacta} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\longrightarrow+\infty} = \frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2} = \frac{8}{3}$$

De lo cual se deduce que, efectivamente, cuando el número de rectángulos crece indefinidamente, las areas por defecto y por exceso, en el intervalo $[0,2]$ resultan ser ambas $\frac{8}{3}$.

En realidad esta presentación de las sumas de Riemann es una versión restringida de una caracterización más general. Sin embargo no estamos interesados en desarrollar en detalle la versión general dada por el matemático Alemán **G.F.B. Riemann (1826-1866)**, quien proporcionó, a partir de ellas una definición rigurosa del concepto de Integral Definida. ¿Qué es entonces la integral definida?

## 6.4 La integral definida como límite de una suma

La siguiente es la definición de Integral definida utilizando la misma notación usada por el gran matemático y filósofo Alemán **G.W. Leibniz (1646-1716)**

La integral definida de la función $f$ en el intervalo $[a, b]$, es el número

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = I = \int_a^b f(x)\,dx$$

siempre que el límite exista. El tal caso se dice que la función $f$ es integrable en el intervalo [a,b]

El número I se considera como el área bajo la curva $y = f(x)$ y se lee, "la integral desde $a$ hasta $b$ de $f$ de $x$ $dx$". Los números $a$ y $b$ se llaman límites inferior y superior, respectivamente, de la integral, y no son más que los puntos extremos del intervalo de integración. La función $f(x)$ que aparece entre el signo integral y $dx$ suele llamarse integrando. El signo $dx$ debe imaginarse como la indicación de que la variable de integración es la variable independiente $x$.

## 6.5 El Teorema fundamental del cálculo.

Hemos visto que el cálculo del área bajo la curva, o lo que es lo mismo, la evaluación de la integral, mediante las sumas de Riemann no es sencilla y puede llegar a ser tan complicada, como compleja sea la función que se está integrando. Felizmente para evaluar las integrales nunca usaremos este método. En 1666, Isaac Newton, miemtras era un estudiante de la universidad de Cambridge descubrió una forma mucho más efectiva de hacerlo. Años más tarde, el otro inventor de Cálculo,

**Gottfried W. Leibniz (1646-1716)**, en forma independiente de Newton, descubrió el mismo método. Las ideas de Newton y Leibniz se pueden resumir en el Teorema Fundamental del Cálculo.

> Si una función $f$ es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces
> $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$
> donde F es cualquier función tal que $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$

La diferencia $F(b) - F(a)$ se abrevia con frecuencia en la forma siguiente:

$$\int_a^b f(x)dx = [\ F(x)\ ]_a^b$$

Todo esto significa finalmente que si podemos encontrar la antiderivada F de la función $f$ podemos evaluar $\int f(x)dx$ sin necesidad de recurrir a las sumas de Riemann.

Quizás convenga aclarar la diferencia entre una integral indefinida o primitiva y una integral definida. La integral indefinida $\int f(x)\,dx$ denota una familia de funciones de $x$ llamadas primitivas de $f$. En cambio la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un número; es el límite de una suma. Hemos visto además que a pesar de haberse definido dichas integrales de una forma completamente distinta se conectan entre si mediante el **Teorema Fundamental del Cálculo**

**Ejemplo 8**

Hallar el área de la región comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y el eje $x$ en el intervalo $[0, 2]$.

Solución. Recordemos que (sección 5.3 pág 131) si $f(x) = x^n$, con $n \neq -1$, entonces una antiderivada de la función $f$ es:

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Por lo tanto si $f(x) = x^2$, entonces, $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$. Y aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, resulta:

$$\int_0^2 x^2 = \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

Vemos que, a diferencia de las Sumas de Riemann, resulta muy sencillo calcular el área bajo la curva utilzando el Teorema Fundamental del Cálculo.

**Un comentario.** Quizás convenga hacer una reflexión respecto de lo dicho en el último párrafo. Es posible que cuando **Alfred Whitehead (1861-1947)** dijera que *la civilización avanza cuando amplía el número de operaciones que se pueden efectuar sin necesidad de pensar* se refiriera, entre otras, a las operaciones del Cálculo Diferencial e Integral. Hemos visto que antes del Cálculo de Newton y Leibniz, las operaciones que había que efectuar para resolver los numerosos problemas del Cálculo eran dificiles y engorrosos; tan complicados como lo fueron en su tiempo las operaciones de multiplicación y división. En el caso del Cálculo los complicados métodos de la Geometría Euclideana, combinados con los métodos de la mecánica, que Arquímedes usó para calcular el volumen de la esfera, por ejemplo, eran **problemas por si mismos**. En la última década, antes de la irrupción de la calculadora manual, o de la computadora, el cálculo de derivadas, de integrales, el gráfico de funciones, etc, eran problemas por ellos mismos. Hoy podemos realizar muchísimas operaciones del Cálculo sin necesidad de pensar, cuestión que permite dedicar más tiempo a aquellos conceptos que requieren de una gran dósis de reflexión.

## 6.6 Propiedades de La integral definida

A continuación se enuncian las propiedades más importantes de las integrales definidas. Se supone que se trata de funciones $f$ y $g$ integrables.

1) $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, donde $k$ es una constante

2) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, donde $a < c < b$

3) Si $a > b$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4) $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$,

5) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$, siempre que $f(a)$ exista

$\boxed{\textbf{Ejemplo 9}}$.

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo calcular las siguientes integrales:

a) $\int_1^2 (x^2-3)dx$ $\quad$ *b)* $\int_0^1 (4t+1)^2 dt$ $\quad$ *c)* $\int_0^1 [\frac{x+2x^2}{\sqrt{x}}]dx$

SOLUCIÓN.

a) $\int_1^2 (x^2-3)dx = \left[\frac{x^3}{3}-3x\right]_1^2 = (\frac{8}{3}-6)-(\frac{1}{3}-3) = -\frac{2}{3}$

*b)* $\int_0^1 (4t+1)^2 dt = \frac{1}{4}\int_1^5 u^2 du = \frac{1}{4}\left[\frac{u^3}{3}\right]_1^5 = \frac{1}{4}\left[\frac{125}{3}-\frac{1}{3}\right] = \frac{31}{3}$

Observe que hemos hecho la siguiente sustitución simple: de $u = 4t+1$ resulta, $du = 4\,dt$. Y los nuevos límites de integración los obtenemos reemplazando $t=0$ y $t=1$ en la expresión $u = 4t+1$, en la forma siguiente: Si $t=0$, entonces $u=1$; si $t=1$, entonces $u=5$

*c)* $\int_0^1 [\frac{x+2x^2}{\sqrt{x}}]dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{x^{\frac12}}+\frac{2x^2}{x^{\frac12}}\right)dx = \int_0^1 (x^{\frac12}+2x^{\frac32})dx = \left[\frac{x^{\frac32}}{\frac32}+\frac{2x^{\frac52}}{\frac52}\right]_0^1 =$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac32}+\frac{4}{5}x^{\frac52}\right]_0^1 = (\frac{2}{3}+\frac{4}{5}) = (\frac{10+12}{15}) = \frac{22}{15}$$

$\boxed{\textbf{Ejemplo 10}}$

Calcular $\int_0^2 |2x-1|dx$

SOLUCIÓN. De acuerdo a la definición de valor absoluto se tiene que:

$$|2x-1| = \begin{cases} -(2x-1), & \text{para } x < \frac{1}{2} \\ (2x-1), & \text{para } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

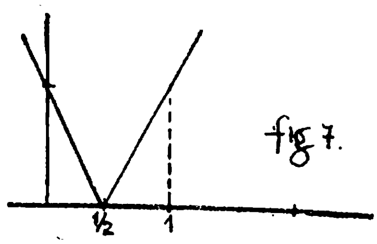



fig 7.

De la definición, y de la gráfica de la función, (fig 7), se desprende que debemos descomponer la integral en dos partes:

$\int_0^2 |2x-1|dx = \int_0^{\frac{1}{2}} -(2x-1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1)dx = [-x^2+x]_0^{\frac{1}{2}} + [x^2-x]_{\frac{1}{2}}^2 =$

$$= \left(-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\right) - (0+0) + (4-2) - \left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{5}{2}$$

En consecuencia el área de la región acotada por la función propuesta es de $\frac{5}{2}$ unidades cuadradas.

**Ejemplo 11**

Usar el Teorema Fundamental del Cálculo para calcular el área acotada por la gráfica de la función $y = 2x^2 - 3x + 2$

SOLUCIÓN. La figura (8) muestra la región cuya área se desea calcular.

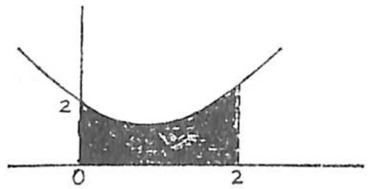



fig 8

De acuerdo a la definición de integral definida resulta:

$$A = \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^2 = \frac{16}{3} - 6 + 4 = \frac{10}{3}$$

En consecuencia el área acotada por la función propuesta es de $\frac{10}{3}$ unidades cuadradas.

**Ejemplo 12**

Hallar el área bajo la curva $y = 2x^2 - 8$ en el intervalo $[-1, 3]$

SOLUCIÓN. El gráfico de la función $f$ (fig 9), muestra que $A_1$, una de las regiones, cuya área deseamos calcular, está debajo del eje $x$. Por lo tanto al evaluar la integral en el intervalo $[-1, 2]$, obtendremos un número negativo. De esto resulta, entonces, que para obtener el área total debemos escribir:

$$\text{Area total} = -A_1 + A_2 = -\int_{-1}^2 (2x^2 - 8)dx + \int_2^3 (2x^2 - 8)dx = \frac{68}{3}\ [u^2]$$

## 6.11 Caracterización General de la Integral de Riemann.

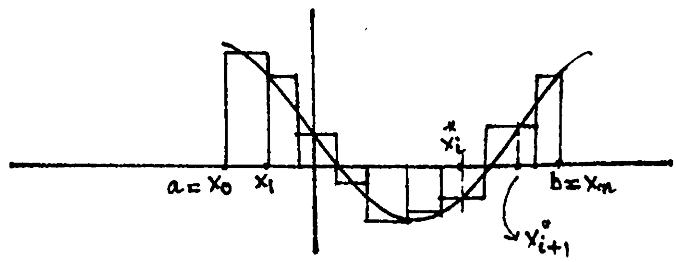
En la caracterización general de la integral de Riemann se considera una función $f(x)$ (no necesariamente continua y positiva) sobre un intervalo $[a, b]$ y una colección de subintervalos de la forma

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

llamada partición del intervalo $[a, b]$ y que se denota usualmente con la letra $P$. Sobre esta partición se establece **una norma** definida como el máximo de las longitudes

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

de los subintervalos de $P$ y que se denota por $||P||$. La figura siguiente muestra la interpretación geométrica de la Suma de Riemann $\sum_i^n f(x_i^*)\Delta x$, donde $x_i^*$ designa un punto arbitrario del i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$




A la colección de puntos $S = \{x_1^*, x_2^*, x_3^*, ..., x_n^*\}$ con $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, se le llama **selección de la partición** $P$. Conviene hacer notar que cada punto $x_i^*$ del iésimo intervalo es arbitrario, esto es, puede ser cualquier punto de dicho subintervalo. En cambio en las sumas superiores e inferiores que hemos analizado en en la sección 6.3 los puntos $x_i^*$ eran los extremos de cada uno de los subintervalos de la partición. Una definición de Suma de Riemann es la siguiente:

Sea $f$ una función definida en el intervalo $[a, b]$. Si $P$ es una partición de $[a, b]$ y $S$ una selección de $P$, entonces la suma de Riemann para la función $f$ determinada por $P$ y $S$ es

$$\mathbb{R} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

Conviene precisar que, en la práctica, cuando se calcula una Suma Riemanniana por lo general se recurre a los casos particulares que analizamos en la sección 6.3, esto es, se consideran los puntos $x_i^*$ como los extremos izquierdo o derecho de los subintervalos.

Una definición para la integral definida usando la Suma de Riemann es la siguiente:

La integral definida de la función $f$ en el intervalo $[a, b]$ es el número

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

siempre que este límite exista, en cuyo caso se dice que la función $f$ es integrable en el intervalo $[a, b]$

## 6.8 El Teorema del valor medio para integrales

En muchas situaciones prácticas se está interesado en el valor medio de una función continua sobre un intervalo. Así, por ejemplo, se puede desear saber el valor medio de la polución del aire de una ciudad en un intervalo de 48 horas; la velocidad media de un vehículo en un viaje de 24 horas; la producción media de un trabajador en un día; la presión media de la sangre de un paciente durante una operación, etc. En todos estos casos interviene una integral definida mediante el llamado **teorema del valor medio para integrales**. La siguiente es una formulación de este teorema.

> El valor medio (**o promedio**) de una función continua $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$, es dado por la expresión:
>
> $$\text{Valor medio} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

En efecto, imaginemos que tenemos una función $f$ definida en el intervalo $[a, b]$ y que hemos dividido dicho intervalo en $n$ subintervalos iguales tal que $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$. El promedio numérico $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \cdots f(x_n)$ de los correspondientes valores de la función es:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

Cuando $n \to +\infty$ el promedio numérico aproxima con mayor precisión el valor medio de la función $f$ sobre el intervalo $[a, b]$. Es decir:

$$\text{si n} \to +\infty, \text{ entonces, } \frac{f(x_1) + f(x_2) + + \cdots + f(x_n)}{n} \to \text{Valor medio de f}$$

Necesitamos escribir esta expresión mediante una integral. Recordemos que si el intervalo $[a, b]$ se divide en $n$ subintervalos iguales, su longitud es igual a:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Por lo tanto podemos escribir:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{b-a}\left[f(x_1)\frac{b-a}{n} + f(x_2)\frac{b-a}{n} + \cdots + f(x_n)\frac{b-a}{n}\right]$$

Esto es equivalente a escribir que:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}=\frac{1}{b-a}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x$$

Si n $\to +\infty$, entonces:

$$\text{Valor medio de } f \text{ sobre } [a,b]=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

**Ejemplo 13**

El Departamento de tránsito de la ciudad de Copiapó ha estado registrando la velocidad del tráfico de vehículos que entran por la panamericana norte hacia el centro de la ciudad. Los datos muestran que entre la 1:00 y las 6:00 p.m. en un día normal de la semana la velocidad del tráfico en la entrada, es de $v(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 40$ $[\frac{km}{hr}]$, donde $t$ es el número de horas. Calcule la velocidad media del tráfico entre la 1 : 00 y las 6 : 00 p.m.

SOLUCIÓN. Nuestro objetivo es hallar el valor medio de $v(t)$ en el intervalo $[1,6]$. Usando el **teorema del valor medio** resulta que:

$$\text{Velocidad media}=\frac{1}{6-1}\int_1^6(2t^3-21t^2+60t+40)dt$$

De donde se obtiene finalmente que:

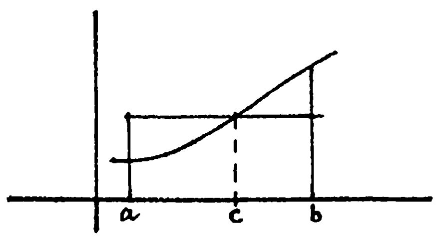
$$\text{Velocidad media}=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}t^4-7t^3+30t^2+40t\right]_1^6=\frac{1}{5}(456-63,5)=78,6\ \left[\frac{km}{hr}\right]$$

## 6.9 La interpretación geométrica.

Hemos visto que para calcular el área aproximada de una región acotada por una curva construíamos rectángulos por exceso y por defecto; a continuación sumabamos las áreas de dichos rectángulos y obteníamos áreas mayores y menores que el área real. El Teorema del Valor Medio afirma que entre todos los tamaños de los rectángulos inscritos y circunscritos hay un rectángulo intermedio que tiene por área **exactamente** el área de la región limitada por la curva. Con el fin de mostrar este resultado más claramente, enunciaremos el teorema en una forma levemente distinta.

> Si $f$ es continua en el intervalo $[a,b]$, existe un número $c \in ]a,b[$ tal que
> $$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Observe que el teorema no especifica como determinar $c$, sino que sólamente garantiza que dicho número $c$ existe. Note, además, que $f(c)$ (llamado el valor medio de $f$ en el intervalo $[a,b]$) puede conocerse despejandolo de la fórmula.




En la figura se puede apreciar claramente que existe $c$ en el intervalo $(a,b)$ tal que $f(c)(a-b) = \int_a^b f(x)dx$

**Ejemplo 14**

Hallar el valor medio de la función $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo $[1,4]$ y determine el valor de la constante $c$.

SOLUCIÓN. Aplicando el teorema se tiene que:

$$\int_1^4 (3x^2 - 2x)dx = f(c)(4-1)$$

$$\int_1^4 (3x^2 - 2x)dx = \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right]_1^4 = 64 - 16 - (1-1) = 48$$

De lo cual se desprende que:

$$f(c) = \frac{48}{3}$$

Debemos, ahora, hallar un $c$ tal que $f(c)(4-1) = 48$. Resulta entonces que:

$$(3c^2 - 2c)(3) = 48 \Longleftrightarrow 3c^2 - 2c = 16 \Longleftrightarrow 3c^2 - 2c - 16 = 0$$

Las soluciones de esta última ecuación son $c = -2$ y $c = \frac{8}{3}$. Puesto que $c = -2$ no pertenece al intervalo $[1,4]$, el valor buscado es $\frac{8}{3}$.

## 6.10 Las ideas de Newton sobre el movimiento

En el capítulo 1, sección 1.2, vimos que conociendo la función posición de un cuerpo o de una partícula, se podía hallar su velocidad. En lo que sigue veremos, tal como lo planteaba Newton, que: *"si la velocidad de un móvil es dada, es posible hallar la longitud de la distancia recorrida en el tiempo propuesto"* . Para analizar esta situación empezaremos estudiando un caso sencillo; aquel en que la velocidad es constante.

**Ejemplo 15**

Sabemos que la velocidad $v = \frac{s}{t}$, donde $s$ es el espacio recorrido y $t$ el tiempo. Si la velocidad $v$ es constante entonces

$$v(t) = k, \text{ donde } t \geq 0$$

Esto significa que cualesquiera que sea el tiempo transcurrido la velocidad será siempre la misma. La figura (9) muestra el gráfico de la función $v(t) = k$.

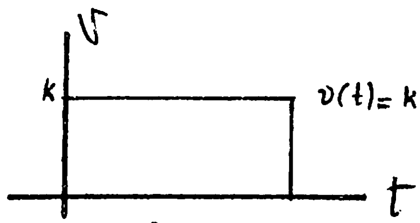



fig 9

Puesto que el espacio recorrido es igual a la velocidad multiplicada por el tiempo, es decir $s = v \cdot t$, la **distancia recorrida por el móvil se obtiene calculando el área bajo la recta.** En un intervalo cualquiera la altura de la gráfica nos da la velocidad durante el intervalo, y la longitud horizontal nos da el tiempo. Si suponemos, por ejemplo, que la velocidad del cuerpo es de $2\,[\frac{m}{seg}]$, entonces, en 4 segundos, el móvil recorrerá 8 metros; después de 10 segundos el espacio recorrido será de 20 metros, etc. Observe que las unidades de estas áreas no son $m^2$, $cm^2$, etc, como podría creerse, sino que son unidades de distancia. Si un lado del rectángulo está medido en horas y el otro en en $[\frac{km}{hr}]$, entonces el producto, en este caso, tiene por unidades:

$$\text{distancia recorrida} = \text{horas} \cdot \frac{km}{hr} = \text{kilómetros}$$

¿Qué ocurriría si la velocidad de la partícula fuera variable?. El ejemplo siguiente analiza este problema.

**Ejemplo 16**

La velocidad de una partícula se describe mediante la función $v(t) = t + 1\,[\frac{m}{seg}]$. ¿Qué espacio recorre la partícula durante los primeros 4 segundos ?

SOLUCIÓN. La figura (10) muestra el gráfico de la función que describe la velocidad de la partícula. Siguiendo con la idea sugerida por el ejemplo anterior, si suponemos que en el intervalo $[0,1]$ la velocidad es de $1\,[\frac{m}{seg}]$, en el intervalo $[1,2]$ la velocidad es de $2\,[\frac{m}{seg}]$, en el intervalo $[2,3]$ la velocidad es de $3\,[\frac{m}{seg}]$ y en el intervalo $[3,4]$ es de $4\,[\frac{m}{seg}]$, todas velocidades constantes en dichos intervalos, entonces la suma de áreas de los rectángulos $A_1$, $A_2$, $A_3$ y $A_4$ nos dará, aproximadamente, el camino recorrido por el móvil en los cuatro primeros segundos. Si utilizamos las sumas de Riemann, esto es, haciendo que el número de intervalos tienda a infinito, podemos calcular el área exacta bajo la recta.

Felizmente, para esta situación, resulta más sencillo calcular el área del trapecio ABCD. El trapecio de la figura (11) tiene la base menor igual a 1, la base mayor igual a 4 y la altura igual a 4, por lo tanto su área es:

$$A = \frac{h}{2} \cdot (b_1 + b_2) = 2 \cdot (1 + 4) = 10$$

En consecuencia la distancia recorrida por el móvil es de 10 metros

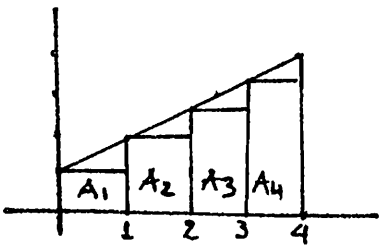
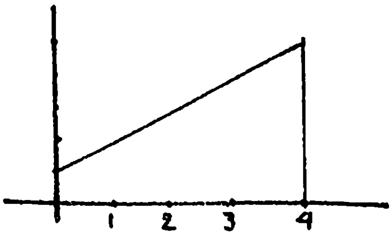
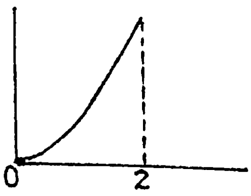
fig10 


fig11 


Sin embargo, a veces, nos encontramos con móviles cuya velocidad se describe con funciones algo más complicadas, por ejemplo, por la función $v(t) = t^2$, $t \geq 0$.

fig 12 


Los ejemplos anteriores nos mostraron que para hallar la distancia recorrida por un móvil que lleva una cierta velocidad $v$, en un cierto tiempo $t$, es suficiente determinar el área bajo la curva en el intervalo de tiempo propuesto. Este es un problema no elemental cuya solución podemos hallarla utilizando las sumas de Riemann. Sin embargo, hemos visto que podemos calcular el área bajo la curva utilzando el Teorema Fundamental del Cálculo

**Ejemplo 17**

Una partícula se mueve con la velocidad $v(t) = t^2, \;\; t \geq 0$ en $[\frac{km}{min}]$. Calcular la distancia recorrida por dicha partícula en los primeros dos minutos. Fig (16).

SOLUCIÓN. De acuerdo a lo dicho, calculando el área bajo la curva en el intervalo de tiempo $[0, 2]$ obtendremos la distancia recorrida. Resulta entonces que

$$s = \int_0^2 t^2\, dt = \frac{8}{3}\, km$$

**Ejemplo 18**

Un pozo de petroleo que produce 300 barriles de petroleo crudo al mes se secará en 3 años. Se estima que dentro de $t$ meses, el precio del petroleo crudo será de $P(t) = 18 + 0,3\sqrt{t}$ dólares por barril. Si el petroleo se vende tan pronto como se extrae del suelo, ¿cuál será el ingreso futuro total del pozo?

SOLUCIÓN. Tal como lo sugieren las sumas de Riemann, conviene dividir el período de 36 meses en $n$ subintervalos iguales de longitud $\Delta t$. La longitud de cada uno de los subintervalos no es necesariamente igual a la unidad, es decir, la división no es necesariamente de 36 subintervalos. De acuerdo a lo anterior, durante cada subintervalo se producen $300\Delta t$ barriles de petroleo crudo. Así, por ejemplo, si $\Delta t = \frac{1}{2}$ mes la producción será de 150 barriles, si $\Delta t = 1$, la producción será de 300 barriles. En general

$$\text{el número de barriles} = 300\Delta t$$

Si $\Delta t$ es muy pequeño, esto es, cuando la longitud del j-ésimo intervalo tiende a $t_j$ el precio del petroleo crudo será aproximadamente de $P(t_j)$ dólares por barril. Por lo tanto:

$$\text{el ingreso total es} \approx \sum_{j=1}^{n} P(t_j)\Delta t$$

Si $\Delta t \to 0$, o lo que es lo mismo, si $n \to +\infty$, entonces:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} P(t_j)\Delta t = \text{ingreso total}$$

De acuerdo a la caracterización de la integral definida como límite de una suma resulta que:

$$\text{Ingreso total} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} P(t_j)\Delta t = \int_0^{36} 300P(t)dt$$

Luego se tiene que el ingreso total es:

$$\int_0^{36} 300P(t)dt = 300\int_0^{36} (18+0,3\sqrt{t})dt = 300(18t+0,2\sqrt{t^3})|_0^{36} = 207\,360 \text{ dólares}$$

# 6.11 Ejercicios propuestos

1. En los siguientes ejercicios exprese las sumas dadas en notación $\sum$

   (a) $\frac{1}{3(1)} + \frac{1}{3(2)} + \frac{1}{3(3)} + \cdots + \frac{1}{3(9)}$

   (b) $\frac{5}{1+1} + \frac{5}{1+2} + \frac{5}{1+3} + \cdots + \frac{5}{1+15}$

   (c) $[2(\frac{1}{8}) + 3] + [2(\frac{2}{8}) + 3] + \cdots [2(\frac{8}{8}) + 3]$

2. Use las fórmulas (1-5) de la página 186 para encontrar las sumas en los ejercicios del 1 a 6.

   a) $\sum_{i=1}^{10}(4i - 3)$

   b) $\sum_{j=1}^{8}(5 - 2j)$

   c) $\sum_{i=1}^{10}(3i^2 + 1)$

   d) $\sum_{k=1}^{6}(2k - 3k^2)$

   e) $\sum_{r=1}^{8}(r - 1)(r + 2)$

   f) $\sum_{i=1}^{5}(i^3 - 3i + 2)$

3. En los siguientes ejercicios determine si las sumas son o no iguales.

   *a)* $\sum_{i=1}^{n} i$ *y* $\sum_{i=0}^{n-1}(i + 1)$ *b)* $\sum_{i=1}^{n} i$ *y* $1 + \sum_{i=1}^{n-1} i$

4. En los siguientes problemas use las sumas inferiores y superiores para calcular el área de la región comprendida entre el gráfico de la función propuesta, el intervalo dado y el eje x.

   a) $f(x) = 2x + 5;\ [0, 3]$

   b) $f(x) = 13 - 3x;\ [0, 4]$

   c) $f(x) = x^2;\ [0, 1]$

   d) $f(x) = x^3;\ [0, 4]$

   e) $f(x) = 3x^2 + 2;\ [1, 5]$

   f) $f(x) = x^2 + 1;\ [0, 1]$

5. Calcular las integrales definidas que se indican

   a) $\int_0^2 2x dx$

   b) $\int_2^7 3dv$

   c) $\int_{-1}^0 (x - 2)dx$

   d) $\int_2^5 (-3v + 4)dv$

   e) $\int_{-1}^1 (t^2 - 2)dt$

   f) $\int_0^3 (3x^2 + x - 2)dx$

   a) $\int_0^1 (2t - 1)^2 dt$

   b) $\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2} - 1\right) dx$

   c) $\int_{-1}^1 (t^3 - 9t)dt$

   d) $\int_0^1 (3x^3 - 9x + 7)dx$

   e) $\int_1^2 (5x^4 + 5)dx$

   f) $\int_{-3}^3 (v\frac{1}{3})dv$

6. Calcular las integrales definidas que se indican

a) $\int_0^2 2x dx$

b) $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{t-2}dt$

c) $\int_1^4 \frac{u-2}{\sqrt{u}}du$

d) $\int_{-2}^{-1} \sqrt{\frac{-2}{x}}dx$

e) $\int_0^1 \frac{x-\sqrt{x}}{3}dx$

f) $\int_0^2 (2-t)\sqrt{t}\, dt$

a) $\int_{-1}^0 (t^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{2}{3}}t)\, dt$

b) $\int_{-8}^{-1} \left(\frac{x-x^2}{2\sqrt[3]{x}}\right) dx$

c) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$

d) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx$

e) $\int_1^1 x\,(x^2+1)^3 dx$

f) $\int_0^2 x\sqrt[3]{4+x^2}\, dx$

7. Calcular las integrales definidas y hacer un esbozo gráfico de la región cuyas áreas representan las integrales propuestas.

a) $\int_{-1}^1 |x|\, dx$

b) $\int_0^3 |2x-3|\, dx$

c) $\int_0^4 |x^2-4x+3|\, dx$

d) $\int_{-1}^1 |x^3|\, dx$

a) $\int_1^3 (2x-1)\, dx$

b) $\int_0^2 (x+4)\, dx$

c) $\int_3^4 (x^2-9)\, dx$

d) $\int_0^1 (x-x^3)\, dx$

8. Sabiendo que $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$, hallar el valor de las siguientes integrales sin recurrir al Teorema Fundamental del Cálculo.

a) $\int_{-2}^0 x^2\, dx$

b) $\int_{-2}^2 x^2\, dx$

c) $\int_0^2 -x^2\, dx$

d) $\int_0^2 (x^2+1)\, dx$

9. Cierto día la temperatura $t$ horas después de la medianoche fue:

$$T(t) = 80 + 10\, sen\left(\frac{\pi}{12}(t-10)\right)$$

¿Cuál fue la temperatura promedio entre el mediodía y las 6 pm?

10. Suponga que un tanque de agua de 5 000 galones tarda 10 minutos en vaciarse y que después de $t$ minutos la cantidad de agua que queda en el estanque es de:

$$V(t) = 50\,(1-t)^2 \quad \text{galones}$$

¿Cuál es la cantidad promedio de agua en el estanque mientras se vacía?

11. Un estudio indica que dentro de $t$ meses la población de un cierto pueblo estará creciendo al ritmo de $2 + 6\sqrt{x}$ personas por mes. ¿En cuanto crecerá la población del pueblo durante los próximos cuatro meses?

12. En Copiapó la demanda de gasolina está creciendo exponencialmente a un ritmo del 5 por ciento por año. Si la demanda actual es de 4 millones de galones por año, ¿cuánta gasolina se consumirá en la ciudad en los próximos 3 años?

13. Un estudio demográfico indica que dentro de $x$ meses la población de Tierra Amarilla estará aumentando a un ritmo de $5+3x^{\frac{2}{3}}$ personas por mes. ¿Cuánto crecerá la población del pueblo en los próximos 8 meses?

14. Un objeto se mueve de forma que su velocidad después de $t$ minutos es de $5 + 2t + 3t^2$ metros por minuto. ¿Qué distancia recorrerá el objeto en los primeros cinco minutos?

15. Dos partículas se mueven con velocidades $v(t) = t^2$ $[\frac{km}{hr}]$ y $v(t) = t$ $[\frac{km}{hr}]$ respectivamente; a) ¿cuál de ellas ha recorrido una mayor distancia en la primera hora?, b) en qué instante recorrren ambas, distancias iguales ?.

16. Utilice EL DERIVE para comprobar los resultados de los ejercicios 1 al 15.

184

# Capítulo 7 El cálculo de áreas

**Objetivos**

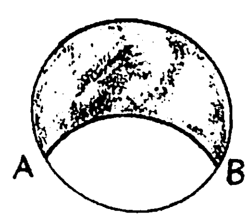
1. Calcular el área de superficies acotadas por dos o más funciones.

2. Estudiar modelos en los cuales intervenga el concepto de área.

3. Utilizar EL DERIVE para calcular el área de regiones acotadas por dos o más funciones.

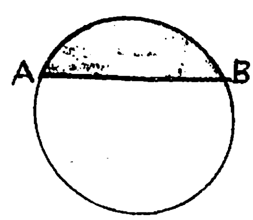
En el intento de resolver la cuadratura del círculo, el gran filósofo y matemático griego **Hipócrates de Chios (479-411 a.C)** había logrado, por métodos geométricos, determinar el área de lúnulas como las de las figuras (1) y (2).

fig1



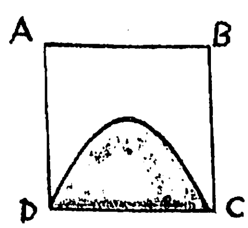

Arquímedes, alrededor de 200 años después, utilizando también la Geometría, inventó un método para determinar al área de un segmento de parábola, fig (3). Postriormente propuso el método que analizamos en el capítulo 6 para determinar el área de un círculo.

fig2




Siguiendo el ejemplo de Hipcrates, y posteriormente de Arquímedes, muchos matemáticos trataron de inventar, sin conseguirlo, un método general para determinar el área de figuras acotadas por lineas curvas. Como es sabido, este problema sería resuelto completamente durante El Renacimiento europeo por Newton y Leibniz. En lo que sigue se estudia el método propuesto por estos dos grandes matemáticos del Renacimiento.

fig3



# 7.1 El área comprendida entre dos curvas

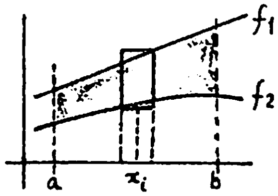
Consideremos dos funciones definidas por $y_1 = f_1(x)$ y $y_2 = f_2(x)$, continuas en el intervalo $[a, b]$. Supongamos además que:

$$f_2(x) \leq f_1(x) \quad \text{para } a \leq x \leq b$$

Esto significa que la curva $y_1 = f_1(x)$ está por encima de la curva $y_2 = f_2(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Nos proponemos, ahora, determinar el área limitada por ambas curvas entre $x = a$ y $x = b$. Si dividimos el intervalo $[a, b]$ en $n$ subintervalos iguales, cada uno de anchura $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y utilizamos un rectágulo representativo de base $\Delta x$ y altura $f_1(x_i) - f_2(x_i)$, (donde $x_i$ está en el i-ésimo intervalo), como aproximación del área comprendida en el i-ésimo intervalo (de ancho $\Delta x$), tal área podemos escribirla como:

$$A_i = [f_1(x_i) - f_2(x_i)]\Delta x$$

fig4




Para aproximar el área total, fig (4), sumamos las áreas de dichos rectángulos, esto es:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} [f_1(x_i) - f_2(x_i)]\Delta x$$

Finalmente si hacemos que $\Delta x \to 0$, o lo que es lo mismo, si $n \to +\infty$, obtendremos el área exacta, esto es:

$$\lim_{n \to} \sum_{i=1}^{n} [f_1(x_i) - f_2(x_i)]\Delta x = \text{Área exacta} = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]$$

La siguiente es la definición de área entre dos curvas.

Sean $f$ y $g$ funciones continuas tal que $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [a, b]$. Entonces, **el área A** de la región limitada por las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, es:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Observe que si $g(x) = 0$ resulta: $\int_a^b [f(x) - 0]dx = \int_a^b f(x)dx$, integral que estudiamos con detalle en el capítulo anterior.

**Ejemplo 1**

Encontrar el área acotada por las parábola $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$.

SOLUCIÓN. Debemos determinar en primer lugar el intervalo de integración. Para esto debemos resolver el sistema de ecuaciones formado por ambas curvas. Igualando la variable dependiente $y$ de las dos ecuaciones se tiene que:

$$6x - x^2 = x^2 - 2x \Longleftrightarrow 2x^2 - 8x = 0, \text{ cuyas soluciones son. } A(0,0) \; y \; B(4,8)$$

La figura (5) muestra el rectángulo de ancho $\Delta x$. La altura de dicho rectángulo es $(6x - x^2) - (x^2 - 2x)$, por lo tanto su área es $(8x - 2x^2)\Delta x$. En consecuencia el área pedida es:

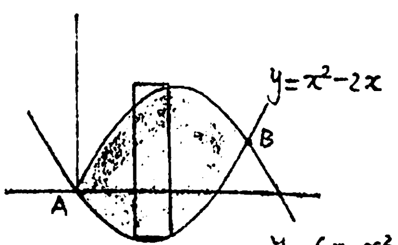


fig5

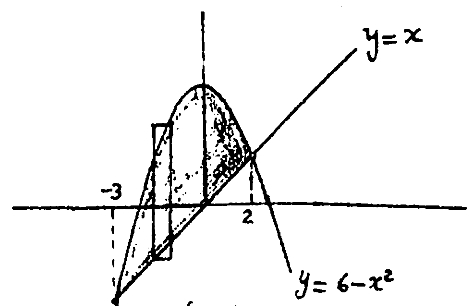


fig6

$$\int_0^4 (8x - 2x^2)\,dx = \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^5\right]_0^4 = \frac{64}{3} \text{ unidades cuadradas}$$

**Ejemplo 2**

Hallar el área de la región limitada por la recta $y = x$ y la parábola $y = 6 - x^2$.

SOLUCIÓN. En la figura (6) se muestra la región cuya área deseamos calcular. Los límites de integración se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones formada por ambas curvas. Igualando la variable dependiente "$y$" resulta la ecuación:

$$x = 6 - x^2 \Longleftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \text{ cuyas soluciones son } x_1 = -3 \; y \; x_2 = 2$$

Por lo tanto los límites de integración son $a = -3$ y $b = 2$. Resulta, entonces, que el área de la región es:

$$A = \int_{-3}^{2} (6 - x^2 - x)\,dx = \left[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{2}$$

obteniéndose:

$$A = \left[6(2) - \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{2}(2)^2\right] - \left[6(-3) - \frac{1}{3}(-3)^2 - \frac{1}{2}(-3)^2\right] = \frac{125}{6}$$

En lo que sigue veremos que a veces es necesario subdividir una región antes de aplicar la definición.

**Ejemplo 3**

Hallar el área de la región acotada por la recta $y = x$ y la parábola $y = \pm\sqrt{6-x}$.

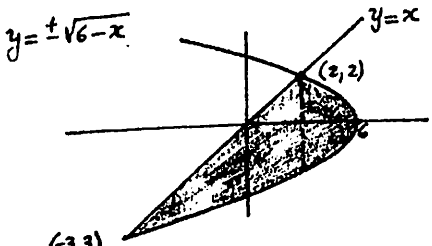



fig 7

SOLUCIÓN. La figura (7) muestra la región cuya área deseamos calcular. Observe que los puntos de intersección son $A(-3,-3)$ y $B(2,2)$ y se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones formado por dichas curvas. En efecto:

$$x = \pm\sqrt{6-x} \iff x^2 = 6 - x \iff x^2 + x - 6 = 0 = (x+3)(x-2) = 0$$

De lo anterior se desprende de inmediato que las soluciones son $x = -3$ y $x = 2$. Reemplazando estos valores de $x$ en la ecuación $y = x$, resultan los puntos dichos.

Notemos que la región está acotada en su parte superior por la recta $y = x$ en el intervalo $[-3, 2]$, y por el pedazo de parábola $y = +\sqrt{6-x}$ en el intervalo $[2, 6]$. Y en la parte inferior la región está acotada por el pedazo de parábola $y = -\sqrt{6-x}$. De esto se desprende que debemos dividir la región en dos partes. La primera en el intervalo $[-3, 2]$ y la segunda en el intervalo $[2, 6]$. En consecuencia se tiene que:

$$A = \int_{-3}^{2} [x - (-\sqrt{6-x})]dx + \int_{2}^{6} [\sqrt{6-x} - (-\sqrt{6-x})]dx$$

De esto resulta sucesivamente:

$$A = \int_{-3}^{2} (x+\sqrt{6-x})dx + 2\int_{2}^{6} \sqrt{6-x}dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}(6-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{2} + 2\left[-\frac{2}{3}(6-x)^{\frac{3}{2}}\right]_{2}^{6}$$

y por lo tanto

$$A = (2 - \frac{16}{3}) - (\frac{9}{2} - 18) + 2(0) - 2(-\frac{16}{3}) = \frac{125}{6}$$

¿Qué ocurre cuando las regiones a las cuales se les desea calcular el área están bajo el eje x ?. En esta situación, al calcular la integral definida se obtendrá un número negativo, pero, puesto que el área es un número positivo o cero, debemos multiplicar tal número por "−1".

**Ejemplo 4**

Hallar el área de la región limitada por la función $y = \frac{x^2}{3} - 4$, el eje de las $x$, $x = -2$ y $x = 3$.

SOLUCIÓN. La figura (8) muestra la región a la cual debemos calcular su área.

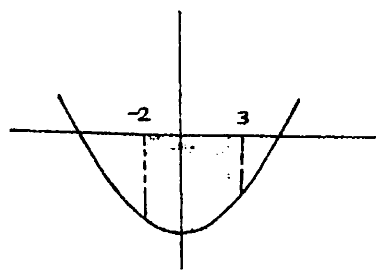



fig 8

Se tiene sucesivamente que:

$$A = -\left[\int_{-2}^{3} \left(\frac{x^2}{3} - 4\right) dx\right] = \int_{-2}^{3} \left(-\frac{x^2}{3} + 4\right) dx = \left[-\frac{x^3}{9} + 4x\right]_{-2}^{3} = \frac{145}{9}$$

Con frecuencia hallaremos curvas que acotan, al mismo tiempo, regiones que están sobre el eje x y bajo el eje x. En estos casos debemos calcular las áreas de las regiones separadamente.

**Ejemplo 5**

Hallar el área de la región acotada por la curva $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$, el eje $x$ y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

SOLUCIÓN. La región a la cual debemos calcular su área es la de la figura (9). Se ve que una parte de ella está sobre el eje $x$ y la otra debajo de él, por lo tanto, dichas áreas, deben calcularse por separado.

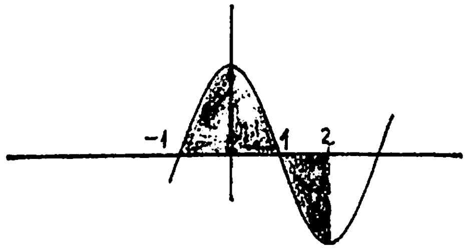



fig 9

$$A = \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx - \int_{1}^{2} (x^3 - 3x^2 - x + 3)dx$$

En consecuencia:

$$A = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{2} = 4 - (-\frac{7}{4}) = \frac{23}{4}$$

Observe que podemos escribir formalmente lo siguiente:

$$\int_{-1}^{2} |(x^3 - 3x^2 - x + 3)|dx$$

Para evaluar esta integral, debemos aplicar la definición de valor absoluto y a continuación calcular dos integrales; tal como lo hicimos en el ejemplo 5.

Note que el cálculo del área de la región del ejemplo 3 fig (7), se puede simplificar si dicha región se considera acotada por gráficas de funciones de "$y$" en vez de funciones de "$x$". La siguiente definición precisa este hecho.

> Sean f y g dos funciones continuas tales que $f(y) \geq g(y)$ para todo $y \in [a, b]$. Entonces el área $A$ de la región acotada por las curvas $x = f(y)$ y $x = g(y)$, y las rectas horizontales $y = c$, $y = d$, es:
>
> $$A = \int_{c}^{d} [f(y) - g(y)]\, dy$$

**Ejemplo 6**

Encontrar el área de la región $\mathbb{R}$ acotada por las funciones $f(y) = y$ y $g(y) = 6 - y^2$. Fig (10)

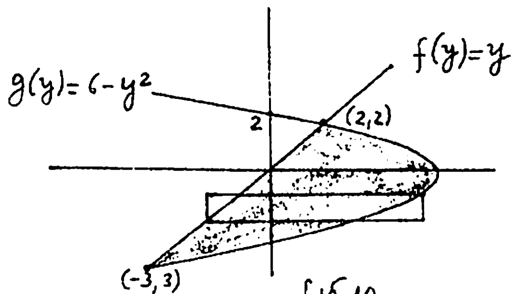



fig 10

Note que hemos despejado las ecuaciones, del ejemplo anterior, en función de "$y$" en vez de dejarlas en función de $x$. Aplicando la definición se ve que el cálculo del área es más sencillo. En efecto:

$$A = \int_{-3}^{2} [6 - y^2 - y]dy = \left[6y - \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}\right]_{-3}^{2} = \frac{125}{6}$$

## 7.2 Las funciones discontinuas acotadas.

Hasta ahora nos hemos interesado sólamente por las funciones continuas. De hecho *toda función continua en un intervalo cerrado* $[a, b]$ *es integrable en dicho intervalo.* Sin embargo también son integrables todas las funciones *acotadas* continuas a trozos. Acotada significa que existe una constante finita $M$ tal que:

$$|f(x)| \leq M, \quad \text{para todo x} \in [a, b]$$

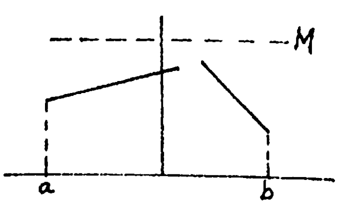



fig 11

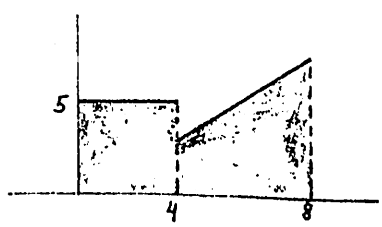



fig 12

La figura (11) muestra una función continua a trozos y acotada en el intervalo $[a, b]$. Como se ve, el área de la región puede calcularse fácilmente si se conocen las funciones que definen la curva.

**Ejemplo 7**

Calcular el área de la región acotada por $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ x - 1 & \text{si } 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$.

SOLUCIÓN. La figura (12) muestra el gráfico de la función y la región cuya área debemos calcular.

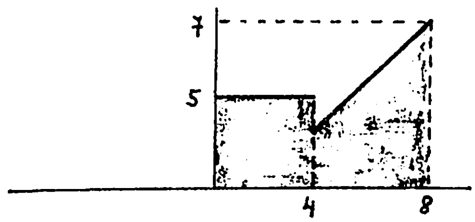



fig 12

Observemos que la función $f(x)$ es acotada y discontinua en $x = 4$. Por lo tanto el área de la región es:

$$\int_0^4 5\,dx + \int_4^8 (x-1)dx = [5x]_0^4 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_4^8 = 40 \text{ unidades cuadradas}$$

## 7.3 Distancia y Velocidad.

Consideremos, ahora, una partícula que viaja a lo largo de una recta con una velocidad $v = f(t)$ y queremos calcular la **distancia neta** recorrida desde el tiempo $t = a$ hasta el momento $t = b$, es decir, la distancia entre su posición inicial en el tiempo $t = a$ y hasta el final, cuando $t = b$.

Si la función $v = f(t)$ tiene valores positivos y negativos para $t \in [a, b]$, entonces las distancias hacia adelante y hacia atrás se cancelarán mutuamente cuando se calcula la distancia neta. La **distancia total recorrida**, independiente de la dirección, puede determinarse evaluando la integral del valor absoluto de la función velocidad. Se puede evaluar esta integral integrando por separado los subintervalos en que es positiva y los subintervalos en que es negativa y sumando después los valores absolutos de los resultados.

**Ejemplo 8**

La velocidad de una partícula está dada por la función $v(t) = 30 - 2t \left[\frac{m}{seg}\right]$, determinar la distancia neta y la distancia total que recorre la partícula entre los instantes $t = 0$ y $t = 20$ segundos.

SOLUCIÓN. La figura (13) muestra la gráfica de la función que modela la velocidad de la partícula.

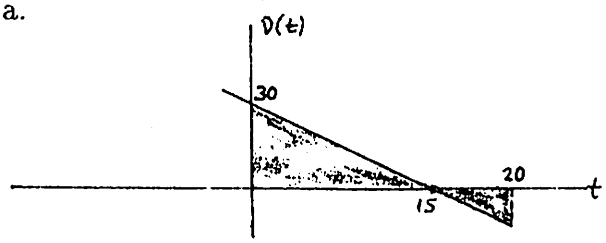



fig 13

Para calcular la **la distancia neta** debemos usar la fórmula

$$s = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b |f(t)|dt$$

Por lo tanto la distancia neta es igual a: $s = \int_0^{20} f(30 - 2t)dt = [30 - t^2]_0^{20} = 200$
La partícula recorre una distancia neta igual a 200 metros.

Para determinar la **distancia total** recorrida, observemos que $v$ es postiva en el intervalo $[0, 15[$ y negativa en el intervalo $]15, 20[$. Esto significa que la partícula en el decimoquinto segundo cambió de dirección y empezó a devolverse. Por lo tanto para hallar la distancia total recorrida por la partícular debemos calcular:

$$s = \int_0^{15} (30 - 2t)dt - \int_{15}^{20} (30 - 2t)dt = 225 + 25 = 250$$

Se ve que la partícula recorre 225 metros hacia adelante y luego 25 metros hacia atras.

## 7.4 Las funciones discontinuas no acotadas.

Nuestra definición de integral definida incluía las hipótesis de que el intervalo $[a, b]$ de integración fuese finito y que la función $f$ fuese acotada en él. Por otra parte el Teorema Fundamental del Cálculo exigía además la continuidad de la función $f$. Vimos que las funciones continuas a trozos, acotadas, podían ser integradas sin ninguna dificultad. Pero, ¿qué ocurre con las funciones, como la de la figura (14), discontinua y no acotada, en que uno de los límites de integración es infinito?

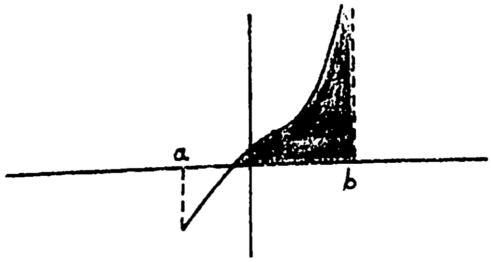


fig.14

Debemos decir que para integrar estas funciones es necesario elaborar nuevas herramientas de cálculo; cuestión que haremos en un capítulo posterior.

# 7.5 Ejercicios propuestos

1. En los siguientes ejercicios hacer un esbozo de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y hallar el área de cada región mediante integrales definidas.

   (a) $f(x) = x^2 - 6x; \;\; g(x) = 0$
   (b) $f(x) = x^2 + 2x + 1; \;\; g(x) = x + 2$
   (c) $f(x) = x^2 - 4x + 3; \;\; g(x) = -x^2 + 2x + 3$
   (d) $f(x) = 3x^2 + 2x; \;\; g(x) = 8$
   (e) $f(x) = \frac{4}{x^2}; \;\; g(x) = x^2 - 6x + 9$
   (f) $f(x) = \sqrt[3]{x}; \;\; g(x) = x$

2. En los siguientes ejercicios hacer un esbozo de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y hallar el área de cada región mediante integrales definidas.

   (a) $f(y) = y^2; \;\; g(y) = y + 2$
   (b) $f(y) = y(2 - y); \;\; g(y) = -y$
   (c) $f(y) = y^2 + 1; \;\; g(y) = 0; \;\; y = -1; \;\; y = 2$

3. En los siguientes ejercicios utilizar la integral definida para hallar las áreas de los triángulos cuyos vértices se indican.

   (a) $A(0,0), \; B(4,0), \; C(4,4)$

(b) $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(b,c)$
(c) $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(6,4)$
(d) $A(2,-3)$, $B(4,6)$, $C(6,1)$

4. Según el Ministerio de Agricultura el consumo total de verduras en la Tercera Región entre 1950 y 1970 fue de:

$$V_1(t) = 23\,703 + 1\,002t + 0,015t^2, \quad \text{(miles de kilos por año)}$$

(Con $t = 0$ correspondiente al año 1970). En cambio entre 1970 y 1980 el consumo fue de:

$$V_2(t) = 22,93 + 0,678t - 0,037t^2, \quad \text{(miles de kilos por año)}$$

Estimar la reducción total del consumo entre 1970 y 1980.

5. En los ejercicios siguientes calcule la distancia neta y la distancia total recorrida entre los instantes $t = a$ y $t = b$, por un móvil, a lo largo de una recta, con la función velocidad dada en cada caso.

(a) $v = -32$; $a = 0$, $b = 10$
(b) $v = 4t - 25$; $a = 0$; $b = 10$
(c) $v = |2t - 5|$; $a = 0$; $b = 5$
(d) $v = 4t^3$; $a = -2$; $b = 3$
(e) $v = sen\, 2t$; $a = 0$; $b = \frac{\pi}{2}$

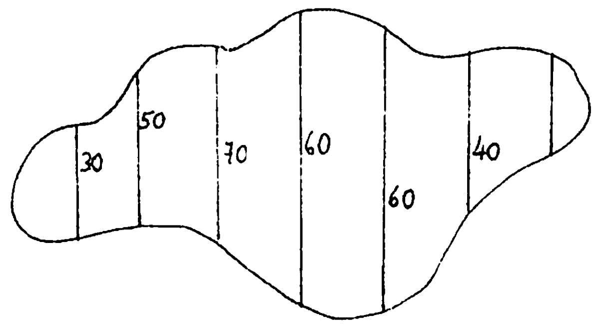


fig 15

## 7.6 Integración Numérica

Cuando se estudia un fenómeno de la vida real, muchas veces es imposible obtener una función continua, o continua a trozos que lo modele. Con frecuencia, como producto de las observaciones, lo que se tiene es una función dada mediante una tabla. En estos casos, en que el problema se resuelve calculando la integral definida de dicha función, no se puede apelar al Teorema Fundamental del Cálculo. En suma, cuando no se puede hallar una antiderivada de dicha función debemos utilizar métodos numéricos para evaluarla.

**Problema.** Un lago artificial tiene la forma que se indica en la figura (15). Las medidas que se tomaron estas separadas cada 20 metros. ¿Cómo determinar el área de su superficie?

Una forma aproximada de determinar el área de la superficie propuesta es construyendo trapecios; tal como muestra la figura (16). Observe que se forman 7 trapecios de la misma altura. Puesto que el área de un trapecio es:

$$A = \frac{(b_1 + b_2)}{2} \cdot h$$

resulta que la suma de las áreas es igual a:

$$A = (\tfrac{0+30}{2})20 + (\tfrac{30+50}{2})20 + (\tfrac{50+70}{2})20 + (\tfrac{70+60}{2})20 + (\tfrac{60+60}{2})20 + (\tfrac{60+40}{2})20 +$$

$$+(\tfrac{60+40}{2})20 + (\tfrac{40+0}{2})20.$$

Factorizando por 20 se tiene la expresión:

$$A = 20\left[(\tfrac{0+30}{2}) + (\tfrac{30+50}{2}) + (\tfrac{50+70}{2}) + (\tfrac{70+60}{2}) + (\tfrac{60+60}{2}) + (\tfrac{60+40}{2}) + (\tfrac{60+40}{2}) + (\tfrac{40+0}{2})\right]$$

Finalmente la superficie del lago es:

$$A = 20(15 + 40 + 60 + 65 + 60 + 65 + 50 + 20) = 7\,200\, m^2$$

En lo que sigue trataremos de establecer un método para calcular la integral definida de una función $f$ en un intervalo $[a, b]$ de la cual se conocen sólo algunos de sus valores.

### 7.6.1 El método de los Trapecios

Supongamos que que se desea calcular la integral definida en el intervalo $[a, b]$ de la función continua $y = f(x)$ de la cual se conocen los siguientes valores igualmente espaciados.

| $a = x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\cdots$ | $b = x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $\cdots$ | $y_n$ |

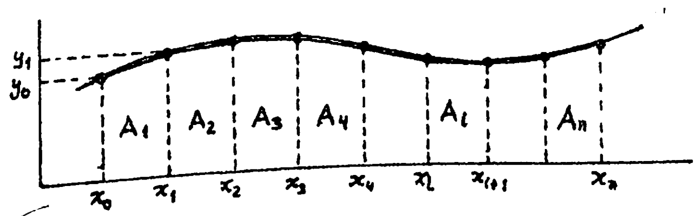



fig 16


fig 17

El método de los trapecios supone que la función asume una trayectoria lineal entre cada dos valores conocidos. Uniendo dichos puntos por lineas rectas, se forman $n$ trapecios, (fig 17), de altura $h = x_{i+1} - x_1$ y cuyas áreas son las siguientes:

$$A_1 = \frac{y_0 + y_1}{2}(x_1 - x_0) \approx \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$$
$$A_2 = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) \approx \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$
$$A_3 = \frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2) \approx \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n = \frac{y_{n-1} + y_n}{2}(x_{n-1} - x_n) \approx \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Puesto que la altura $h = x_{i-1} - x_1$ es el mismo para todos los trapecios, sumando las áreas se obtiene:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n = \frac{h}{2}[y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} - y_n]$$

Finalmente resulta que:

$$A = \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n] \approx \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$$

La última expresión, llamada *Fórmula de los Trapecios*, nos permitirá calcular el área bajo una curva poligonal construida utilizando una tabla de datos.

Podemos escribir la fórmula en una forma más general. En efecto, para una partición:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \cdots x_n = b$$

de puntos igualmente espaciados, tal que $\Delta x = h = \frac{b-a}{n}$, donde $n$ es el número de intervalos resulta que la fórmula de los trapecios se puede escribir como:

$$\boxed{A = \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \approx \int_a^b f(x)dx}$$

**Ejemplo 9.**

Calcular la integral definida entre los límites 1 y 6, aplicando el método de los trapecios, a la función $y = f(x)$, de la cual se conocen sólamente los valores que se indican en la tabla siguiente:

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $N(t)$ | 100 | 115 | 117 | 131 | 149 | 140 |

Según la fórmula de los trapecios, teniendo en cuenta que $h = 1$, se tiene:

$$\int_1^6 f(x)dx \approx \frac{1}{2}[100 + 2 \cdot 115 + 2 \cdot 117 + 2 \cdot 131 + 2 \cdot 149 + 140]$$

Es decir:

$$\int_1^6 f(x)dx \approx \frac{1}{2}[100 + 230 + 234 + 262 + 298 + 140] = 632$$

## 7.7 La tabla de vida $\ell(x)$.

La tabla de vida es un modelo poblacional referido a una cohorte o grupo de personas nacidas en el mismo momento, cerrado a la migración, y estudiado a través de edades sucesivas hasta que mueren. Esta función, de variable discreta, representa el número de personas que alcanzan con vida la edad exacta $x$ años, de una determinada generación inicial de $\ell_0$ nacimientos. Se dice que ella muestra la extinción de la población por muerte.

**Ejemplo 10.**

La figura 18 representa el gráfico aproximado de la función $\ell(x)$ que muestra los sobrevivientes a diferentes edades exactas de una generación de 100 000 nacidos vivos. Los puntos se han unido mediante una linea poligonal continua. (tabla 1)

| x | $\ell(x)$ |
|---|---|
| 0 | 100 000 |
| 10 | 68 000 |
| 20 | 64 331 |
| 30 | 59 036 |
| 40 | 052 820 |
| 50 | 044 739 |
| 60 | 34 711 |
| 70 | 021 597 |
| 80 | 08 955 |
| 90 | 01 100 |
| 100 | 00 000 |

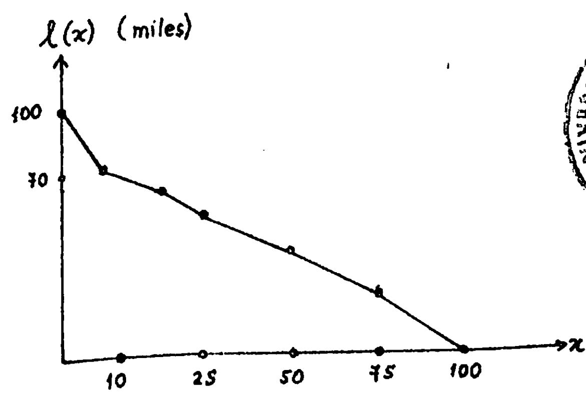



fig 18

Observe que nos hemos tomado la libertad de unir los puntos mediante una linea poligonal continua, pensando en que el comportamiento de la función no diferirá sustancialmente al tomar intervalos de edad más pequeños. El área bajo la región acotada por esta linea poligonal tiene una interesante aplicación en la demografía.

**El Tiempo Vivido** es el número de años vivido por una cierta generación de individuos entre dos edades exactas cualesquiera. Así, por ejemplo, si una generación de 10 personas vivas, vive 10 años cada una, el número de años vividos por dicha generación es de $10 \cdot 10$ años, es decir, 100 años.

Esto nos sugiere que el tiempo vivido por una generación de individuos, en un intervalo de tiempo $[a, b]$ es igual al área bajo la curva de la función $\ell(x)$, esto es:

$$\text{Tiempo Vivido} = \int_a^b \ell(x)dx$$

Podemos preguntarnos entonces, cuál es el tiempo vivido por la generación de individuos del ejemplo 10. Puesto que la función $\ell(x)$ es una función expresada mediante una tabla debemos calcular el área utilizando un método numérico. Para realizar esto utilizaremos el método de los trapecios. Puesto que $h = 10$ resulta que el tiempo vivido por dicha generación es:

$$T_v = \frac{10}{2}(100\,000 + 2\,[68\,406 + 64\,331 + \cdots + 8\,995 + 1\,100] + 0)$$

Es decir:

$$T_v = 4\,056\,950 \text{ años persona}$$

**Ejemplo 11.**

Consideremos la función $N(t) = -t^2 + 10\,000$ que modela el número de sobrevivientes a la edad exacta $t$, en años, de una generación inicial de 10 000 nacidos vivos. El gráfico de la figura (18) muestra el comportamiento de este fenómeno.

La curva muestra que la generación se extingue a los 100 años. Podemos preguntarnos, ahora, ¿ cuál es el tiempo vivido por esta generación ?. De acuerdo a la definición, el tiempo vivido en años por esta generación es:

$$T_v = \int_0^{100}(-t^2+10\,000)dt = \left[-\frac{t^3}{3}+10\,000t\right]_0^{100} = \left(-\frac{1\,000\,000}{3}+1\,000\,000\right)$$

De esto resulta finalmente que el tiempo vivido es:

$$T_v \approx -333\,333 + 1\,000\,000 = 666\,667 \quad \text{(años persona)}$$

Desde el punto de vista gráfico el Tiempo Vivido está representado por el área bajo la curva entre las edades 0 y 100. Preguntémonos ahora cúal es el tiempo vivido por esta generación en los primeros 10 años. En este caso tendríamos el gráfico de la figura (19).

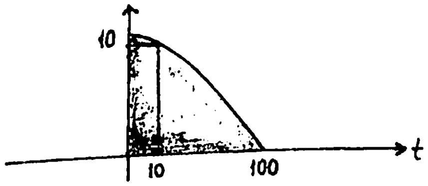



fig 19

y por lo tanto el tiempo vivido es igual a:

$$T_v = \int_0^{10}(-t^2+10\,000)dt = \left[-\frac{t^3}{3}+10\,000t\right]_0^{10} = \left(-\frac{10\,000}{3}+100\,000\right) \approx 99\,666$$

años persona.

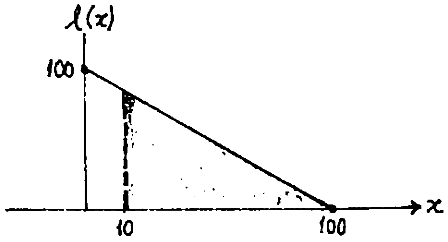
**La Esperanza de Vida.** La esperanza de vida de una generación se define como el número de años que en promedio les resta de vida a las personas que llegan con vida a la edad exacta de $t$ años. Por ejemplo, la esperanza de vida de una generación que llega con vida a la edad de 10 años y que se extingue a los 100 años es:

$$e_{10}^0 = \frac{T_{10}}{\ell(10)} = \frac{\int_{10}^{100}\ell(x)dx}{\ell(10)}$$

donde $T_{10} = \int_{10}^{100}\ell(x)dx$ es el tiempo vivido por la generación desde los 10 años hasta que la generación se extingue y $\ell(10)$ es el número de sobrevivientes a la edad de 10 años.

**Ejemplo 12.**

Dada la función $\ell(x) = 100 - x$ (llamada ley de mortalidad de Moivre [1]) que representa el número de sobrevivientes a sucesivas edades de una generación inicial de $\ell(0) = 100$ personas nacidas vivas. Calcular la Esperanza de Vida de esta generación a la edad exacta de 10 años.




SOLUCIÓN. Calcularemos primero el número de años que le resta de vida a las personas que llegan con vida a los 10 años, es decir, el tiempo vivido por la generación desde los 10 años hasta que la generación se extingue.

$$T_v = \int_{10}^{100} (100 - x)dx = \left| 100x - \frac{x^2}{2} \right|_{10}^{100}$$

De donde resulta que:

$$T_v = 100(100 - 10) - \frac{100^2 - 10^2}{2} = 4\,050 \text{ (años persona)}$$

Por otra parte el número de sobrevivientes a la edad de 10 años es $\ell(10) = 90$. En consecuencia la Esperanza de Vida de la generación a los 10 años es:

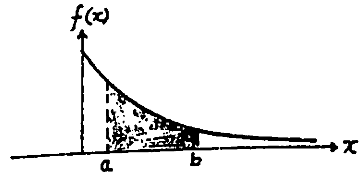
$$e_{10}^{0} = \frac{4\,050}{90} = 45 \text{ años}$$

**La función Densidad de Probabilidad.** Una importante aplicación de la integral definida es al Cálculo de Probabilidades, en particular al **Control de Calidad**, mediante la función Densidad de Probabilidad.

Supongamos que estamos interesados en predecir que fracción de una cierta cantidad de disckets fabricados por una compañía tendrán una vida comprendida en un cierto intervalo de tiempo. Es decir, estamos interesados en determinar la probabilidad de que un discket seleccionado al azar tenga una vida $x$ comprendida en un rango $a \leq x \leq b$. Una forma de hacer esto es seleccionando una determinada

[1] Abraham Moivre fue un matemático francés que hizo notables contribuciones a la matemática

cantidad de discketes y comprobando la vida de cada uno de ellos. Con estos datos se puede construir una función continua positiva $f(x)$ con la propiedad siguiente:

> La probabilidad $P(a \leq x \leq b)$ de que la vida de un componente seleccionado al azar esté en el intervalo $[a, b]$ es el área bajo la curva $f$ entre $x = a$ y $x = b$.
>
> 
> 

Una función que tenga la propiedad anterior se llama **función de Densidad de Probabilidad** para la variable $x$. Hemos visto que utilizando EL DERIVE podemos ajustar fácilmente una curva a cualquier conjunto de datos obtenidos experimentalmente, sin embargo no es nuestra intención detenernos en construir dicha función. En lo que sigue mostraremos como usar el concepto de área para calcular la probabilidad una vez conocida la función densidad de probabilidad.

**Ejemplo 13.**

La función de densidad de probabilidad para la vida de discketes de computadora que fabrica una cierta compañía es:

$$f(x) = 0,02e^{-0,02x}$$

donde $x$ representa la vida en meses de un discket seleccionado aleatoriamente.

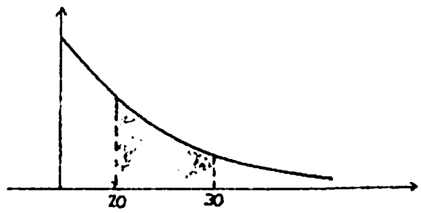
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la vida de un discket seleccionado al azar esté entre 20 y 30 meses?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la vida de un discket seleccionado al azar sea menor o igual a 20 meses?

SOLUCIÓN. a) La probabilidad de que un discket seleccionado al azar tenga una vida util de entre 20 y 30 meses, es el área bajo la curva densidad de probabilidad entre $x = 20$ y $x = 30$. De tal forma que:

$$P(20 \leq x \leq 30) = \int_{20}^{30} 0,02e^{-0,02x}dx = \left|-e^{0,02x}\right|_{20}^{30} = -0,5488 + 0,6703 = 0,1215$$

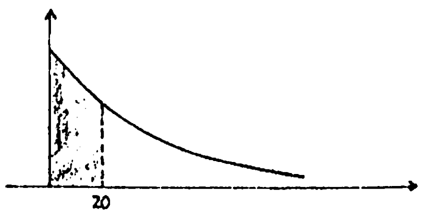
Esto significa que la probabilidad de que un discket sacado al azar tenga una vida útil de entre 20 y 30 meses es de 0,1215. Dicho de otro modo, significa que de una muestra de 100 disckeles 12,15 de ellos tendrán una vida útil de entre 20 y 30 meses. Esto es, el 12,15 por ciento de los disckeles tendrán una vida de entre 20 y 30 meses.




$P(20 \leq x \leq 30)$

b) La probabilidad de que la vida de un discket seleccionado al azar sea menor de 20 meses es igual al área bajo la curva de densidad de probabilidad, entre $x = 0$ y $x = 20$, esto es:

$$P(0 \leq x \leq 20) = \int_0^{20} 0,02e^{-0,02x}dx = \left|-e^{0,02x}\right|_0^{20} = -0,6703 + 1 = 0,3297$$




$P(0 \leq x \leq 20)$

Esto significa que la probabilidad de que un discket tenga una vida útil menor de 20 meses es de 0,3297. Dicho de otro modo, el 32,97 por ciento de los disckeles se estropearán en el transcurso de los primeros 20 meses.

## 7.8 Ejercicios propuestos

1. Un satélite observa la velocidad de un cardumen de salmones que viaja desde la Isla Juan Fernandez hasta al continente. Los datos recogidos por el satélite, cada hora son los siguientes:

| t hrs. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v $\frac{km}{hr}$ | 7 | 9 | 4 | 2 | 11 | 1 | 9 |

Estime la distancia recorrida por los salmones en las 6 horas que duró la observación.

2. La gráfica de la figura siguiente muestra la medida de la razón de flujo, en galones por minuto, en un tanque durante un período de 10 minutos. Estime la cantidad total de agua que fluye al tanque: a) Durante los 5 primeros minutos, b) Durante los últimos 3 minutos, c) Durante los 10 minutos.

3. La siguiente tabla de valores presenta los sobrevivientes a diferentes edades exactas de una generación de 100 000 nacidos vivos.

| x años | 0 | 10 | 20 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ell(x)$: miles | 100 | 92 | 91 | 86 | 80 | 69 | 49 | 22 | 3 | 0 |

a) Trace un gráfico aproximado de la la función $\ell(x)$. b) Calcule la esperanza de vida de esta generación a la edad de 20 años.

4. Calcule el área bajo la curva de la función $y = e^{-x^2}$ en el intervalo $[0,2]$ tomando un $h = 0,2$.

5. La función de densidad de probabilidad para la vida de las bombillas fabricadas por una cierta compañía es de

$$f(x) = 0,01e^{-0,01x}$$

donde $x$ representa la vida, en horas, de una bombilla seleccionada aleatoriamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la vida de una bombilla seleccionada al azar esté entre las 50 y 60 horas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la vida de una bombilla seleccionada al azar sea menor de 60 horas?.