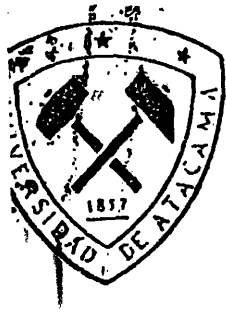


510  
CR61m  
C.U.



# UNIVERSIDAD DE ATACAMA

## NIVELACION MATEMATICA I, II Y III

### PROFESORES:

- CALLADO → EDUARDO CUADRA REBOLLEDO  
Profesor Estado Matemática
- T.B → SALIM ELAL OLIVERO  
Master en Estadística  
Matemática
- ROBERTO MERCADO CUEVAS  
Ingeniero Matemático
- DEPTO. CIENCIAS BASICAS  
FACULTAD DE INGENIERIA  
UNIVERSIDAD DE ATACAMA

UNIVERSIDAD DE ATACAMA  
BIBLIOTECA CENTRAL  
INVENTARIO 10. 192

110V 93 E  
110V 94 C



DIRECCION DE EXTENSION, COMUNICACIONES Y RELACIONES UNIVERSITARIAS  
DEPARTAMENTO DE CAPACITACION  
\*\*\*\*\*

CURSO :

I N D I C E

<u>MATERIA</u>	<u>PAGINA</u>
- CONJUNTOS NUMERICOS	1
NUMEROS REALES	3
CUERPO DE LOS NUMEROS REALES	5
AXIOMAS DE ORDEN	10
DESIGUALDADES NOTABLES	16
DESIGUALDADES E INECUACIONES	23
INTERVALOS	24
INECUACIONES CUADRATICAS	25
INECUACIONES RACIONALES	26
VALOR ABSOLUTO	28
- RELACIONES Y FUNCIONES	34
RELACIONES	37
RELACION DE EQUIVALENCIA	38
FUNCIONES	43
COMPOSICION DE FUNCIONES	60
- SUMAS Y PRODUCTOS	69
SUMAS $\sqrt{\quad}$	69
PRODUCTOS	70
PROGRESIONES	79
PROGRESION ARITMETICA	79
PROGRESION GEOMETRICA	83
PROGRESION ARMONICA	86
- NUMEROS COMBINATORIOS	89
- TEOREMA DEL BINOMIO	91
* MATRICES Y DETERMINANTES	102
* GRADOS Y RADIANTES	133
* FUNCION DE ANGULOS COMPUESTOS	152
* IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS	160



# CURSO:

<u>MATERIA</u>	<u>PAGINA</u>
<del>★</del> FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS	176
- NUMEROS COMPLEJOS	190
- <del>X</del> VECTORES	201
<del>★</del> LIMITES ✓	217 ✓
- NOCION INTUITIVA DEL LIMITE	217
<del>★</del> LIMITE AL INFINITO-	223
- LIMITES DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS	226
<del>★</del> CONTINUIDAD	233
<del>★</del> DISCONTINUIDAD	236
- DERIVADA	242
- DERIVADAS LATERALES	244
- REGLA DE LA CADENA	250
- DERIVADA DE LA FUNCION INVERSA	250
- DERIVADA DE LA FUNCION IMPLICITA	251
- DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR	252
- DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS	254
- DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSA	258
- DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS	261
- DERIVADA DE FUNCIONES PARAMETRICAS	265
- FUNCIONES HIPERBOLICAS ✓	267 ✓
- GRAFICO DE RELACIONES ✓	279
- APLICACIONES DE LA DERIVADA	288
- DIFERENCIAL	288
- INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DIFERENCIAL	289
- MAXIMOS Y MINIMOS	294
- PROBLEMAS DE APLICACION	304
- EJERCICIOS PROPUESTOS	307
- TEOREMA DEL VALOR MEDIO	311
- TEOREMA DE CAUCHY	315



MATERIA

PAGINA

- GENERALIZACION DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO	317
- FORMAS INDETERMINADAS (Regla de L'Hôpital)	320
- EJERCICIOS PROPUESTOS	325



## CONJUNTOS NUMERICOS

## 1) Conjunto de los Números Naturales:

Los número naturales son aquellos números que sirven para contar, es decir:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

## 2) Conjunto de los Números Cardinales:

Es el conjunto definido como:  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ; es decir:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

## 3) Conjunto de los Números Enteros:

Se define como:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

## 4) Conjunto de los Números Racionales:

Se define como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0 \right\}$$

## 5) Conjunto de los Números Irracionales:

Se denota como  $\mathbb{I}$  o  $\mathbb{Q}^c$ , es el conjunto de números que no pueden expresarse exactamente en forma de fracción  $\frac{p}{q}$

## 6) Conjunto de Números Reales:

Es aquel conjunto que resulta de la unión de los racionales con los irracionales; es decir:



$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

## 7) Conjunto de los Números Complejos:

Es el conjunto de pares ordenados de números reales que pueden escribirse en la forma  $a + b_i$  donde  $i = \sqrt{-1}$ , es decir:

$$\mathbb{C} = \{a + b_i \mid a, b \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}\}$$



## NUMEROS REALES

Estudiaremos ahora, con algún detalle a  $\mathbb{R}$ , con el objeto de que se capte como las propiedades y operatoria familiares son consecuencias de axiomas, definiciones y demostraciones rigurosas.

Adición y multiplicación en  $\mathbb{R}$  /

i) La "adición" en  $\mathbb{R}$  se define como:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\longrightarrow a + b = c ; c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ii) La "multiplicación" en  $\mathbb{R}$  se define como:

$$\begin{aligned} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\longrightarrow a \cdot b = d ; d \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ambas operaciones se llaman operaciones binarias o leyes de composición interna.

La operación binaria de adición asocia a cada par  $(a, b)$  de números reales un único número  $c \in \mathbb{R}$ , llamado la suma de  $a$  y  $b$ , análogamente la operación binaria de multiplicación asocia a cada par  $(a, b)$ ;  $a, b \in \mathbb{R}$  un único número  $d \in \mathbb{R}$ , llamado el producto de  $a$  y  $b$ .

## Axiomas de cuerpo

Se dice que  $\mathbb{R}$  con las operaciones de adición y multiplicación es un cuerpo porque cumple con los siguientes axiomas:



C1) Asociatividad:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

C2) Elemento neutro aditivo:

Existe  $0 \in \mathbb{R}$  tal que:

$$0 + a = a + 0 = a \quad ; \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

C3) Elemento inverso aditivo (opuesto):

Para cada  $a \in \mathbb{R}$  existe  $(-a) \in \mathbb{R}$  tal que:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

C4) Conmutatividad:

$$a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

C5) Asociatividad:

$$(ab)c = a(bc) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

C6) Elemento neutro multiplicativo (idéntico):

Existe  $1 \in \mathbb{R}$  tal que:

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad ; \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

C7) Elemento inverso multiplicativo:

Para cada  $a \in \mathbb{R}$  ( $a \neq 0$ ) existe  $a^{-1} \in \mathbb{R}$  tq:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

UNIVERSIDAD DE  
BIBLIOTECA CENTRAL  
INVENTARIO



C8) Conmutatividad:

$$ab = ba \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

C9) Distributividad de la multiplicación con respecto a la adición:

$$a(b + c) = ab + ac \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

**Definición (Cuerpo)**

Se llama cuerpo a un conjunto cualquiera en el cual se han definido dos operaciones binarias, una "adición" y una "multiplicación" que satisfacen los axiomas anteriores.

**Teorema:**

El elemento neutro aditivo es único en  $\mathbb{R}$ .

**Demostración:**

Sean  $0$  y  $\bar{0}$  neutros aditivos en  $\mathbb{R}$  entonces como  $0 \in \mathbb{R}$  y  $\bar{0}$  es neutro aditivo entonces:

$$(1) \quad \bar{0} + 0 = 0 + \bar{0} = 0$$

Como  $\bar{0} \in \mathbb{R}$  y  $0$  es neutro aditivo entonces:

$$(2) \quad \bar{0} + 0 = 0 + \bar{0} = \bar{0}$$

De (1) y (2)  $0 = \bar{0}$

**Teorema:**

El opuesto  $(-a)$  es único para cada  $a \in \mathbb{R}$

**Demostración:**

Sean  $\bar{a}$  y  $\tilde{a}$  opuestos de  $a \in \mathbb{R}$ ; entonces:

$$\bar{a} = \bar{a} + 0 = \bar{a} + (a + \tilde{a}) = (\bar{a} + a) + \tilde{a} = 0 + \tilde{a} = \tilde{a}$$



Teorema:

El idéntico multiplicativo (identidad) es único en  $\mathbb{R}$ .

Teorema:

El elemento inverso  $a^{-1}$  es único para cada  $a \in \mathbb{R}$ .

Demostración:

Sean  $\bar{a}$  y  $\tilde{a}$  inversos de  $a \in \mathbb{R}$ ; entonces:

$$\bar{a} = \bar{a} \cdot 1 = \bar{a}(a \cdot \tilde{a}) = (\bar{a} \cdot a) \cdot \tilde{a} = 1 \cdot \tilde{a} = \tilde{a}$$

Teorema:

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && aX \cdot 3 \\ &= a \cdot 0 + [a + (-a)] && aX \cdot 3 \\ &= [a \cdot 0 + a] + (-a) && aX \cdot 1 \\ &= [a \cdot 0 + a \cdot 1] + (-a) && aX \cdot 6 \\ &= a(0 + 1) + (-a) && aX \cdot 9 \\ &= a \cdot 1 + (-a) && aX \cdot 2 \\ &= a + (-a) && Ax \cdot 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$



**Teorema:**

$$-(-a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

**Demostración:**

$$a = 0 + a = [ -(-a) + (-a) ] + a$$

$$\% = -(-a) + [ (-a) + a ]$$

$$\% = -(-a) + 0$$

$$\% = -(-a)$$

**Teorema:**

$$(a^{-1})^{-1} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

**Teorema:**

La ecuación  $a + X = b$  admite una única solución en  $\mathbb{R}$ .

**Teorema:**

La ecuación  $aX = b$ ;  $a \neq 0$  admite una única solución en  $\mathbb{R}$ .

**Demostración:**

$$aX = b \implies a^{-1} \cdot (aX) = a^{-1} \cdot b \implies \overset{ax.5}{\implies} (a^{-1} \cdot a)X = a^{-1} \cdot b$$

$$\overset{ax.7}{\implies} 1 \cdot X = a^{-1} \cdot b \implies X = a^{-1} \cdot b$$

Sea Y otra solución, entonces satisface la ecuación  
es decir:  $aY = b$



$$\text{Luego: } ax = ay \implies a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay)$$

$$\implies 1 \cdot x = 1 \cdot y$$

$$\implies x = y$$

**Teorema:** (Ley de cancelación para la adición)

$$\text{Si } a + x = a + b \implies x = b$$

**Demostración:**

$$a + x = a + b \implies (-a) + [a + x] = (-a) + [a + b]$$

$$\implies [(-a) + a] + x = [(-a) + a] + b$$

$$\implies 0 + x = 0 + b$$

$$\implies x = b$$

**Teorema:** (Ley de cancelación para la multiplicación)

$$\text{Si } ax = ab \implies x = b ; a \neq 0$$

**Teorema:**

$$(-a)b = a(-b) = -ab \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

**Demostración:**

$$(-a)b = (-a)b + 0$$

$$\% = (-a)b + [ab + (-ab)]$$

$$\text{ax.3} \\ = [(-a)b + ab] + (-ab)$$

$$\text{ax.9}$$

$$\% = [(-a) + a] b + (-ab)$$

$$\text{ax.3}$$

$$\% = 0 \cdot b + (-ab)$$



$$\begin{array}{l} \text{Prop.} \\ \% = 0 + (-ab) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{ax.2} \\ \% = -ab \end{array}$$

Análogamente se demuestra que:

$$a(-b) = -ab$$

**Teorema:**

$$(-a)(-b) = ab \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= (-a)(-b) + [(-ab) + ab] = (-a)(-b) + [(-a)b + ab] = [(-a)(-b) \\ &\quad + (-a)b] + ab \\ &= (-a)[(-b) + b] + ab = (-a) \cdot 0 + ab = \\ &= 0 + ab = ab \end{aligned}$$

**Observación:**

$$1) \quad a + (-b) = a - b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}; b \neq 0$$

$$\text{Si } a = 1 \implies b^{-1} = \frac{1}{b}$$



## Axiomas de Orden

Se dice que " $\mathbb{R}$  es ordenado" porque existe  $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ , que satisface las siguientes propiedades:

01) Ley de tricotomía:

Para cada  $x \in \mathbb{R}$  una y sola una de las siguientes proposiciones es verdadera:

$$i) x \in \mathbb{R}^+ \quad ii) x = 0 \quad iii) (-x) \in \mathbb{R}^+$$

02) Clausura para la suma:

$$\text{Para } a, b \in \mathbb{R}^+ \implies a + b \in \mathbb{R}^+$$

03) Clausura para el producto

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{R}^+ \implies a \cdot b \in \mathbb{R}^+$$

## Observación:

1) El conjunto  $\mathbb{R}^+$  se llama conjunto de números reales positivos.

2)  $\mathbb{R}^- = \{a \in \mathbb{R} \mid (-a) \in \mathbb{R}^+\}$  es el conjunto de números reales negativos.

$$3) \mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$$

## Definición

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  entonces diremos que:

1) "a es mayor que b" denotado por  $a > b$  si  $a - b \in \mathbb{R}^+$



- 2) "a es mayor o igual que b" denotado por  $a \geq b$  ssi  
 $a > b \vee a = b.$
- 3) "a es menor que b" denotado por  $a < b$  ssi  
 $b - a \in \mathbb{R}^+.$
- 4) "a es menor o igual que b" denotado por  $a \leq b$  ssi  $a < b$   
 $\vee a = b.$

Ejemplos:

- 1)  $-2 < 4$  pues  $4 - (-2) = 4 + 2 = 6 \in \mathbb{R}^+$
- 2)  $7 > 3$  pues  $7 - 3 = 4 \in \mathbb{R}^+$
- 3)  $4 \not> 8$  pues  $4 - 8 = -4 \notin \mathbb{R}^+$

Teorema:

Todos los números-positivos son mayores que cero ed:  
 $a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a > 0$

Demostración:

$$a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a - 0 \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a > 0$$

Teorema:

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  entonces se cumple una y sólo una de las siguientes relaciones:

$$\text{i) } a > b \quad \text{ii) } a = b \quad \text{iii) } a < b$$

Demostración:

Como  $a, b \in \mathbb{R}$   $\Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a - b > 0$

$$\vee a - b = 0 \vee a - b < 0 \Leftrightarrow a > b \vee$$

$$a = b \vee a < b$$



**Teorema: (Transitividad)**

Sean  $a, b, c \in \mathbb{R}$  entonces:

- 1)  $a > b \wedge b > c \implies a > c$
- 2)  $a < b \wedge b < c \implies a < c$

**Demostración:**

- 1)  $a > b \wedge b > c \implies a - b \in \mathbb{R}^+ \wedge b - c \in \mathbb{R}^+$   
 $\implies (a - b) + (b - c) \in \mathbb{R}^+$   
 $\implies a - c \in \mathbb{R}^+$   
 $\implies a > c$

Análogamente se demuestra (2).

**Teorema:**

- 1)  $a > b \iff a + c > b + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
- 2)  $a > b \iff ac > bc \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^+$
- 3)  $a > b \iff ac < bc \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^-$

**Demostración:**

- 1)  $a > b \iff a - b \in \mathbb{R}^+$   
 $\iff a + c - b - c \in \mathbb{R}^+$   
 $\iff (a + c) - (b + c) \in \mathbb{R}^+$   
 $\iff a + c > b + c$
- 2)  $a > b \wedge c \in \mathbb{R}^+ \iff a - b \in \mathbb{R}^+ \wedge c \in \mathbb{R}^+$



$$\Leftrightarrow (a - b) c \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow ac - b \cdot c \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow ac > bc$$

$$3) \quad a > b \wedge c \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}^+ \wedge (-c) \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(-c) \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow -ac + bc \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow bc - ac \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow bc > ac$$

$$\Leftrightarrow ac < bc$$

Teorema:

$$1) \quad a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall a \neq 0$$

$$2) \quad a \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}^-$$

Demostración:

$$1) \quad (==\Rightarrow) \text{ Supongamos } a \in \mathbb{R}^+, \text{ luego } a \neq 0 \text{ entonces:}$$

$$\exists a^{-1} \in \mathbb{R} \text{ y } a^{-1} \neq 0$$

Si suponemos que  $a^{-1} < 0$  entonces se tiene que:

$$a \in \mathbb{R}^+ \wedge a > 0 \implies a > 0 \wedge a^{-1} \in \mathbb{R}^-$$

$$\implies a \cdot a^{-1} < 0 \cdot a^{-1}$$

$$\implies 1 < 0$$

$$\left( \begin{array}{l} \implies \\ \Leftarrow \end{array} \right)$$

Luego:

$$a > 0 \implies a^{-1} \in \mathbb{R}^+$$



( $\Leftarrow$ ) Supongamos  $a^{-1} \in \mathbb{R}^+$ ;  $a^{-1} \neq 0$

Si suponemos que  $a \in \mathbb{R}^- \implies (-a) \in \mathbb{R}^+$  entonces  
 $-a > 0 \wedge a^{-1} \in \mathbb{R}^+ \implies (-a) \cdot a^{-1} > 0 \cdot a^{-1}$

$$\implies -(aa^{-1}) > 0$$

$$\implies -1 > 0 \quad (\implies \Leftarrow)$$

Luego  $a \notin \mathbb{R}^- \implies a \in \mathbb{R}^+$

La demostración de (2) es análoga.

**Teorema:**

$$1) \quad a > b \implies \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}; \quad c \in \mathbb{R}^+$$

$$2) \quad a > b \implies \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}; \quad c \in \mathbb{R}^-$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} 1) \quad a > b \wedge c \in \mathbb{R}^+ &\implies a > b \wedge c^{-1} \in \mathbb{R}^+ \\ &\implies ac^{-1} > bc^{-1} \\ &\implies \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \end{aligned}$$

2) Se demuestra análogamente a (1)

**Teorema (Regla de los signos)**

$$1) \quad a > 0 \wedge b > 0 \implies ab > 0$$

$$2) \quad a > 0 \wedge b < 0 \implies ab < 0$$

$$3) \quad a < 0 \wedge b > 0 \implies ab < 0$$



$$4) \quad a < 0 \wedge b < 0 \implies ab > 0$$

**Teorema:**

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \implies a^2 > 0$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} - \{0\} &\implies a \in \mathbb{R}^+ \vee a \in \mathbb{R}^- \\ &\implies a > 0 \vee a < 0 \\ &\implies a \cdot a > 0 \vee a \cdot a > 0 \\ &\implies a^2 > 0 \vee a^2 > 0 \\ &\implies a^2 > 0 \end{aligned}$$

**Teorema:**

Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$  entonces:

$$1) \quad a > b \wedge c > d \implies ac > bd$$

$$2) \quad a > b \wedge c < d \implies \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$$

**Demostración:**

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad a > b \wedge c \in \mathbb{R}^+ &\implies ac > bc \\ c > d \wedge b \in \mathbb{R}^+ &\implies bc > bd \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Transitividad} \\ \implies \end{array}$$

$$\implies ac > bd$$

$$\begin{aligned} 2) \quad a > b \wedge c < d &\implies a > b \wedge c^{-1} > d^{-1} \quad (\text{Ejercicio}) \\ &\implies ac^{-1} > db^{-1} \quad (\text{Parte(1)}) \\ &\implies \frac{a}{c} > \frac{b}{d} \end{aligned}$$



## DESIGUALDADES NOTABLES

1)

teorema:

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  entonces:

$$a^2 + b^2 > 2ab \quad ; \quad a \neq b$$

Demostración:

Consideremos:  $(a-b)^2 > 0 \quad ; \quad a \neq b$ 

$$\therefore a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

$$a^2 + b^2 > 2ab$$

2)

teorema:

La suma de un número real positivo con su recíproco es siempre mayor o igual que 2; es:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 2 \quad \text{si } a > 0$$

Demostración:

$$(a - 1)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

$$a^2 + 1 \geq 2a \quad / : a$$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

3)

teorema:

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

Salvo en que  $a = b = c$ 

Demostración:

$$a^2 + b^2 > 2ab$$

$$b^2 + c^2 > 2bc$$

$$a^2 + c^2 > 2ac$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 > 2(ab + bc + ac)$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$$

$$\text{Si } a = b = c \implies a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$$

4)

teorema:

$$\text{Si } a^2 + b^2 = 1 \wedge c^2 + d^2 = 1. \quad \text{Entonces:}$$

$$ac + bd < 1$$

Demostración:

$$\text{Sabemos que: } a^2 + c^2 > 2ac \wedge b^2 + d^2 > 2bd$$

$$\therefore a^2 + c^2 + b^2 + d^2 > 2ac + 2bd$$

$$(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) > 2(ac + bd)$$

$$1 + 1 > 2(ac + bd)$$

$$2 > 2(ac + bd) \quad /:2$$

$$1 > ac + bd$$

5)

teorema:

$$x^3 + y^3 > x^2y + xy^2 ; x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ m } x \neq y$$

Demostración:

$$(x - y)^2 > 0 \quad x \neq y$$

$$x^2 - xy + y^2 > xy \quad / \cdot (x + y)$$



$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) > xy(x + y)$$

$$x^3 + y^3 > x^2y + xy^2$$

Definición:

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  entonces:

- i) La media aritmética de  $a$  y  $b$  es:  $\frac{a + b}{2}$
- ii) La media geométrica de  $a$  y  $b$  es:  $\sqrt{ab}$
- iii) La media armónica de  $a$  y  $b$  es:  $\frac{2ab}{a + b}$

6)

teorema:

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  ;  $a, b > 0$  ;  $a \neq b$

Demostrar que:  $\frac{a + b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a + b}$

Demostración:

a) Demostraremos que  $\frac{a + b}{2} > \sqrt{ab}$

Sabemos que si  $a \neq b \implies (a - b)^2 > 0$

$$\therefore a^2 - 2ab + b^2 > 0 \quad /+4ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$$

$$(a + b)^2 > (2\sqrt{ab})^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$a + b > 2\sqrt{ab} \quad /:2$$

$$\frac{a + b}{2} > \sqrt{ab}$$

b) Demostraremos que  $\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

$$\text{Si } a \neq b \implies (a - b)^2 > 0$$



$$\therefore (a + b)^2 > 4ab$$

$$\frac{(a + b)^2}{4} > ab$$

$$\frac{4}{(a + b)^2} < (ab)^{-1} \quad / (ab)^2$$

$$\frac{4a^2 b^2}{(a+b)^2} < ab \quad / \sqrt{\quad}$$

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab}$$

Dē (a) y (b):

$$\frac{a + b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

teorema:

Si  $x > 0$  ;  $y > 0$  ;  $x \neq y$  demostrar que:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{2}{x + y}$$

Demostración:

$$x > 0 \implies x^2 > 0$$

$$y > 0 \implies y^2 > 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 > 0 \quad / + 2xy$$

$$x^2 + 2xy + y^2 > 2xy$$

$$(x + y)^2 > 2xy \quad /: (x \cdot y)$$



$$\frac{(X + Y)^2}{XY} > 2 \quad /:(X + Y)$$

$$\frac{(X + Y)}{XY} > \frac{2}{X + Y}$$

$$\frac{X}{XY} + \frac{Y}{XY} > \frac{2}{X+Y}$$

$$\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} > \frac{2}{X+Y}$$

8) Teorema:

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Ejercicios:

1) Probar que:  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

Demostración:

$$(a^{-1}b^{-1})(ab) = (a^{-1}b^{-1})(ba)$$

$$\% = a^{-1}(b^{-1}b)a$$

$$\% = a^{-1} \cdot 1a$$

$$\% = a^{-1}a$$

$$\% = 1$$

$$\therefore (ab)^{-1} = (a^{-1}b^{-1})$$

2) Sean  $a, b \in \mathbb{R}^+$  entonces:

$$a < b \implies a^{-1} > b^{-1}$$



Demostración:

$$\begin{aligned}
 a < b ; a, b \in \mathbb{R}^+ &\implies (b-a) \in \mathbb{R}^+ \wedge ab \in \mathbb{R}^+ \\
 &\implies (b-a) \in \mathbb{R}^+ \wedge (ab)^{-1} \in \mathbb{R}^+ \\
 &\implies (b-a) \in \mathbb{R}^+ \wedge a^{-1}b^{-1} \in \mathbb{R}^+ \\
 &\implies (b-a) \cdot a^{-1}b^{-1} \in \mathbb{R}^+ \\
 &\implies ba^{-1}b^{-1} - aa^{-1}b^{-1} \in \mathbb{R}^+ \\
 &\implies bb^{-1}a^{-1} - aa^{-1}b^{-1} \in \mathbb{R} \\
 &\implies 1 \cdot a^{-1} - 1 \cdot b^{-1} \in \mathbb{R} \\
 &\implies a^{-1} - b^{-1} \in \mathbb{R}^+ \\
 &\implies a^{-1} > b^{-1}
 \end{aligned}$$

3) Si  $X+Y < 1 \wedge X > Y \implies X^2 - Y^2 < X - Y$

Solución:

$$\begin{aligned}
 X + Y < 1 \wedge X - Y \in \mathbb{R}^+ \\
 \therefore (X + Y)(X - Y) < X - Y \\
 X^2 - Y^2 < X - Y
 \end{aligned}$$

4) Si  $a > b \implies a^{-1} < b^{-1}$

Solución:

Si  $a, b \in \mathbb{R}^+$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
 a > b &\implies a - b \in \mathbb{R}^+ ; a^{-1}, b^{-1} \in \mathbb{R}^+ \\
 &\implies (a-b) \cdot a^{-1} \in \mathbb{R}^+ \\
 &\implies aa^{-1} - a^{-1}b \in \mathbb{R}^+ \\
 &\implies 1 - a^{-1}b \in \mathbb{R}^+ ; b^{-1} \in \mathbb{R}^+ \\
 &\implies (1 - a^{-1}b) b^{-1} \in \mathbb{R}^+
 \end{aligned}$$



$$\implies b^{-1} - a^{-1} \in \mathbb{R}^+$$

$$\implies b^{-1} > a^{-1}$$

Análogamente se demuestra si  $a, b \in \mathbb{R}^-$

5) Demuestre que:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2 \quad \text{si } a \neq 0, b \neq 0 \quad \text{y} \quad a \neq b$$

6)  $-(-(-a)) = -a$

7)  $(-1)a = -a$

8)  $-(a-b) = -a + b$

9)  $(-1)(-b) = b$

10)  $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$



## DESIGUALDADES E INECUACIONES

Las expresiones  $a > b$  y  $a < b$  determinan una "desigualdad" entre dos valores.

**Definición:**

Una desigualdad es absoluta si es válida para todos los valores reales de las variables que intervienen en ella.

**Ejemplo:**

$$x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Definición:**

Una desigualdad es condicional si es válida sólo para ciertos valores de las variables que intervienen en ella. Las variables representan incógnitas y la desigualdad constituye una inecuación.

**Definición:**

Consideremos el polinomio  $p(x) = ax + b$ ;  $a \neq 0$  entonces una inecuación lineal es una desigualdad del siguiente tipo:

$$i) \quad p(x) < 0 \quad ii) \quad p(x) > 0 \quad iii) \quad p(x) \leq 0$$

$$iv) \quad p(x) \geq 0$$

**Ejemplos:**

$$1) \quad 2x + 3 \leq 0 \implies 2x \leq -3 \implies x \leq -\frac{3}{2}$$

$$S_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{3}{2} \right\}$$



$$2) \quad -8 - 2x < 7x + 28$$

$$-9x < 36$$

$$-x < 4 / -1$$

$$x > -4$$

$$\therefore S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$$

$$3) \quad 2(3x + 4) - 4x + 7 < 5 + x$$

$$6x + 8 - 4x + 7 < 5 + x$$

$$6x - 4x - x < 5 - 8 - 7$$

$$x < -10$$

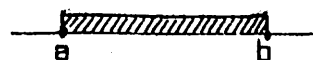
$$S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -10\}$$

### Intervalos

Al resolver ciertos problemas es corriente encontrarse con conjuntos de números reales de los siguientes tipos:

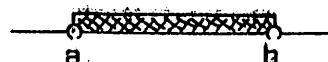
1) Intervalo cerrado:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$



2) Intervalo abierto:

$$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

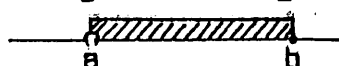


3) Intervalos semabierto:

$$[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

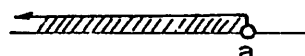


$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

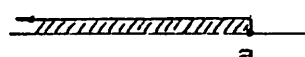


4) Intervalos no acotados:

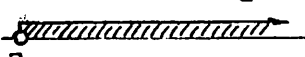
$$]-\infty, a[ = \{X \in \mathbb{R} \mid X < a\}$$



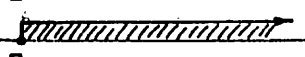
$$]-\infty, a] = \{X \in \mathbb{R} \mid X \leq a\}$$



$$]a, \infty[ = \{X \in \mathbb{R} \mid X > a\}$$



$$[a, \infty[ = \{X \in \mathbb{R} \mid X \geq a\}$$

Observación:

- 1) Las soluciones de las inecuaciones anteriores son respectivamente:

$$S_1 = ]-\infty, -\frac{3}{2}]; \quad S_2 = ]-4, \infty[ \quad \text{y} \quad S_3 = ]-\infty, -10[$$

- 2) Resolver una inecuación es encontrar el conjunto de valores para los cuales la inecuación es cierta.

Definición: (Inecuación cuadrática)

Consideremos el polinomio cuadrático:

$p(X) = aX^2 + bX + c$ ;  $a \neq 0$  entonces una "inecuación cuadrática" es una desigualdad del siguiente tipo:

i)  $p(X) < 0$

ii)  $p(X) \leq 0$

iii)  $p(X) > 0$

iv)  $p(X) \geq 0$

Observación:

- 1) Si  $b^2 - 4ac = \Delta > 0$ , el polinomio tiene raíces reales y distintas, luego el polinomio se puede factorizar y la inecuación resolver usando la regla de



los signos.

- 2) Si  $\Delta = 0$  el polinomio tiene raíces reales e iguales entonces  $p(X)$  tiene el mismo signo de  $a \quad \forall X \neq \alpha$  (si  $\alpha$  es la raíz).
- 3) Si  $\Delta < 0$  el polinomio tiene raíces complejas; entonces  $p(X)$  tiene el mismo signo de  $a \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Ejemplos:

1) Resolver las inecuaciones:

a)  $2X^2 - 7X + 3 > 0$  Sol:  $S = \{X \in \mathbb{R} \mid X < \frac{1}{2} \vee X > 3\}$

b)  $X^2 - 13X + 22 < 0$  Sol:  $S = \{X \in \mathbb{R} \mid 2 < X < 11\}$

c)  $X^2 - 4X + 4 < 0$  Sol:  $S = \emptyset$

d)  $X^2 - 2X + 2 > 0$  Sol:  $S = \mathbb{R}$

e)  $3X^2 + 2X + 6 < 0$  Sol:  $S = \emptyset$

**Definición (Inecuación Racional)**

Se llama inecuación racional a una desigualdad del siguiente tipo:

$$\frac{p(X)}{q(X)} > 0 ; \frac{p(X)}{q(X)} \geq 0 ; \frac{p(X)}{q(X)} < 0 ; \frac{p(X)}{q(X)} \leq 0$$

dónde  $p(X)$ ,  $q(X)$  son polinomios y  $q(X) \neq 0$



Ejercicios:

Resolver las inecuaciones:

1) 
$$\frac{x^2 + 1}{x^2 + 7x + 12} > 0$$

2) 
$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 5x + 6} > \frac{1}{5}$$

3) 
$$\frac{x + 3}{x^2 - 4} + \frac{1}{x+5} > \frac{1}{x+2}$$

4) 
$$\frac{x^2 + 8x - 20}{x^2 + 5x - 24} < 1$$



## VALOR ABSOLUTO

Sea  $a \in \mathbb{R}$ , llamaremos valor absoluto de  $a$  denotado por  $|a|$  al número real definido por:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

teorema:

$$1) \quad |a| = 0 \iff a = 0$$

$$2) \quad |a| > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$3) \quad |a|^2 = a^2$$

$$4) \quad |a| = \sqrt{a^2}$$

$$5) \quad -|a| \leq a \leq |a|$$

Demostración:

$$1) \quad ( \implies ) \quad \text{Si } |a| = 0 \implies a = 0 \vee -a = 0 \\ \implies a = 0$$

$$( \impliedby ) \quad \text{Si } a = 0 \implies |a| = 0 \quad (\text{Def})$$

$$2) \quad \text{Si } a \in \mathbb{R} \implies a \in \mathbb{R}^+ \vee a = 0 \vee a \in \mathbb{R}^-$$

$$\text{Si } a \in \mathbb{R}^+ \implies |a| = a > 0$$

$$\text{Si } a = 0 \implies |a| = 0$$

$$\text{Si } a \in \mathbb{R}^- \implies |a| = -a > 0 \quad \text{Pues } (-a) \in \mathbb{R}^+$$

$$\therefore |a| > 0$$

$$3) \quad \text{Si } a \in \mathbb{R} \implies a \in \mathbb{R}^+ \vee a = 0 \vee a \in \mathbb{R}^-$$

$$\text{Si } a \in \mathbb{R}^+ \implies |a| = a \implies |a|^2 = a^2$$

$$\text{Si } a = 0 \implies |a| = 0 \implies |a|^2 = a^2$$



$$\text{Si } a \in \mathbb{R}^- \implies |a| = -a \implies |a|^2 = (-a)(-a) = a^2$$

$$\therefore |a|^2 = a^2$$

$$4) \text{ Si } a \in \mathbb{R} \implies a \in \mathbb{R}^+ \vee a = 0 \vee a \in \mathbb{R}^-$$

$$\text{Si } a \in \mathbb{R}^+ \implies a > 0 \implies \sqrt{a^2} = a = |a|$$

$$\text{Si } a = 0 \implies \sqrt{a^2} = 0 = |a|$$

$$\text{Si } a \in \mathbb{R}^- \implies a < 0 \implies \sqrt{a^2} = -a = |a|$$

$$\text{Luego: } \sqrt{a^2} = |a|$$

$$5) \text{ Sea } a \in \mathbb{R} \implies a \in \mathbb{R}^+ \vee a = 0 \vee a \in \mathbb{R}^-$$

$$\text{Si } a \in \mathbb{R}^+ \implies |a| = a$$

$$\text{Si } a = 0 \implies |a| = 0 \implies |a| = a$$

$$\text{Si } a \in \mathbb{R}^- \implies |a| = -a > 0 > a \implies |a| > a$$

$$\text{Luego } |a| \geq a \quad (1)$$

Análogamente:

$$\text{Sea } a \in \mathbb{R} \implies a \in \mathbb{R}^+ \vee a = 0 \vee a \in \mathbb{R}^-$$

$$\text{Si } a \in \mathbb{R}^+ \implies |a| = a > 0 > -a \implies |a| > -a$$

$$\implies -|a| < a$$

$$\text{Si } a = 0 \implies |a| = 0 = a \implies -|a| = 0$$

$$\implies -|a| = a$$

$$\text{Si } a \in \mathbb{R}^- \implies |a| = -a$$

$$\implies -|a| = a$$

$$\text{Luego: } -|a| \leq a \quad (2)$$

Luego de (1) y (2) tenemos que:

$$-|a| \leq a \leq |a|$$



**Teorema:**

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  entonces:

$$|a| = b \iff b \geq 0 \wedge (a = b \vee a = -b)$$

**Demostración:**

$$(==\Rightarrow) \text{ Como } |a| \geq 0 ==\Rightarrow b \geq 0$$

$$\text{Además } a \in \mathbb{R} ==\Rightarrow a \in \mathbb{R}^+ \vee a = 0 \vee a \in \mathbb{R}^-$$

$$\text{Si } a \in \mathbb{R}^+ ==\Rightarrow |a| = a \wedge |a| = b ==\Rightarrow a = b$$

$$\text{Si } a = 0 ==\Rightarrow |a| = 0 \wedge a = b ==\Rightarrow b = 0 ==\Rightarrow a = b$$

$$\text{Si } a \in \mathbb{R}^- ==\Rightarrow |a| = -a \wedge |a| = b ==\Rightarrow a = -b$$

$$\text{Luego: } |a| = b ==\Rightarrow a = b \vee a = -b$$

**Teorema:**

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  entonces:

$$|a| = |b| \iff a = b \vee a = -b$$

**Ejemplos:**

1) Resolver la ecuación:  $|x - 2| = 3x - 9$

$$|x-2| = 3x-9 \iff 3x-9 \geq 0 \wedge (x-2 = 3x-9 \vee x-2 = -3x+9)$$

$$\iff x \geq 3 \wedge (2x=7 \vee 4x=11)$$

$$\iff x \geq 3 \wedge (x = \frac{7}{2} \vee x = \frac{11}{4})$$

$$\iff S = \{ 7/2 \}$$

2) Determine los posibles valores de  $x$  que satisfacen  $|x-2| = |x|$

**Solución:**

$$|x-2| = |x| \iff x-2 = x \vee x-2 = -x$$



$$\Leftrightarrow -2 = 0 \quad \vee \quad 2x = 2$$

$$\Leftrightarrow -2 = 0 \quad \vee \quad x = 1$$

Como  $-2 \neq 0$  la solución es  $x=1$   $\therefore S = \{1\}$

- 3) Encuentre los valores de  $x$  que satisfacen la ecuación  
 $|3x-4| = |6-x|$

Solución:

$$|3x-4| = |6-x| \implies 3x-4 = 6-x \quad \vee \quad 3x-4 = x-6$$

$$\implies 4x = 10 \quad \vee \quad 2x = -2$$

$$\implies x = \frac{5}{2} \quad \vee \quad x = -1$$

$$S = \left\{ \frac{5}{2}, -1 \right\}$$

teorema:

Sean  $a, b, x \in \mathbb{R}$ ;  $b \geq 0$  entonces:

- 1)  $|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b$
- 2)  $|x-a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x-a \leq b$
- 3)  $|x| \geq b \Leftrightarrow x \geq b \quad \vee \quad x \leq -b$
- 4)  $|x-a| \geq b \Leftrightarrow x-a \geq b \quad \vee \quad x-a \leq -b$

Demostración:

$$1) \quad |x| \leq b \Leftrightarrow -|x| \geq -b$$

$$\text{Además,} \quad -b \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq b$$

$$\text{Luego:} \quad -b \leq x \leq b$$



Teorema:

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  entonces:

- 1)  $|a+b| \leq |a| + |b|$
- 2)  $|a-b| \leq |a| + |b|$
- 3)  $|ab| = |a| \cdot |b|$   
 $\left| \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a}{b} \right|; b \neq 0$

Demostración.

- 1) Por teorema se tiene:

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

$$\text{Luego: } -( |a| + |b| ) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

$$\therefore |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$2) |a-b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$$

$$\therefore |a-b| \leq |a| + |b|$$

$$3) |a \cdot b| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 \cdot b^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = |a| \cdot |b|$$

$$\text{Luego: } |ab| = |a| \cdot |b|$$

$$4) \left| \frac{a}{b} \right| = \sqrt{\left( \frac{a}{b} \right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}$$

$$\text{Luego: } \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}; b \neq 0$$

Observación:

Otra demostración para:

- 3) Se presentan los siguientes casos:

1) Si  $a=0$  v  $b=0$  no hay nada que demostrar



ii) Si  $a, b \in \mathbb{R}^+ \implies a \cdot b \in \mathbb{R}^+$ ; entonces:

$$|ab| = ab = |a| \cdot |b|$$

iii) Si  $a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^- \implies ab \in \mathbb{R}^-$ , entonces:

$$|ab| = -ab = a(-b) = |a| \cdot |b|$$

iv) Si  $a \in \mathbb{R}^- \wedge b \in \mathbb{R}^+ \implies ab \in \mathbb{R}^-$ , entonces:

$$|ab| = -ab = (-a) \cdot b = |a| \cdot |b|$$

v) Si  $a, b \in \mathbb{R}^- \implies ab \in \mathbb{R}^+$ ; entonces:

$$|ab| = ab = (-a)(-b) = |a| \cdot |b|$$

Luego:  $|ab| = |a| \cdot |b|$

Ejemplos:

1) Resolver:  $|x - 4| \leq 3$

Solución:

$$|x-4| \leq 3 \iff -3 \leq x - 4 \leq 3$$

$$\iff 1 \leq x \leq 7$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 7\} = [1, 7]$$

2) Resolver:  $|3x + 2| \geq 5 - x$

Solución:

$$|3x + 2| \geq 5 - x \iff 3x + 2 \geq 5 - x \vee 3x + 2 \leq x - 5$$

$$\iff 4x \geq 3 \vee 2x \leq -7$$

$$\iff x \geq \frac{3}{4} \vee x \leq -\frac{7}{2}$$

$$\therefore S = ]-\infty, -\frac{7}{2}] \cup [\frac{3}{4}, \infty[$$



## RELACIONES Y FUNCIONES

**Definición:** (Par Ordenado)

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

**Observación:**

- 1)  $(a, b) \neq (b, a)$
- 2) El elemento  $a$  se llama primera componente y  $b$  se llama segunda componente.

**Definición:** (Igualdad)

$$((a, b) = (c, d)) \iff (a = c \wedge b = d)$$

**Ejemplos:**

Calcular  $X$  e  $Y$  en los siguientes casos:

- 1)  $(X + 3, 2) = (5, Y - 1)$
- 2)  $(2X + 1, 3) = (-X^2, 3)$
- 3)  $(x^2 - 1, X) = (X, X^2 - 1)$
- 4)  $(X + 2, Y + 3X) = (2Y + 1, 5X - 2Y)$

**Definición:** (Producto Cartesiano)

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos cualesquiera, se llama **producto cartesiano** o **producto cruz** de  $A$  y  $B$  denotado por  $A \times B$  al siguiente conjunto.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

**Ejemplo:**

$$\text{Sea } A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 8x + 15 = 0\} = \{3, 5\}$$



$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 0\} = \{-3, -2, -1\}$$

Entonces:

$$A \times B = \{(3, -3)(5, -3)(3, -2)(5, -2)(3, -1)(5, -1)\}$$

$$B \times A = \{(-3, 3)(-3, 5)(-2, 3)(-2, 5)(-1, 3)(-1, 5)\}$$

De aquí podemos ver que:  $A \times B \neq B \times A$

Propiedades:

- 1) Si  $A$  tiene  $n$  elementos y  $B$   $m$  elementos entonces  $A \times B$  tiene  $m \times n$  elementos.
- 2) Si  $A = \emptyset$   $\vee$   $B = \emptyset \implies A \times B = \emptyset$
- 3)  $A \times B \neq B \times A$
- 4)  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$   
 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$   
 $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
- 5)  $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$

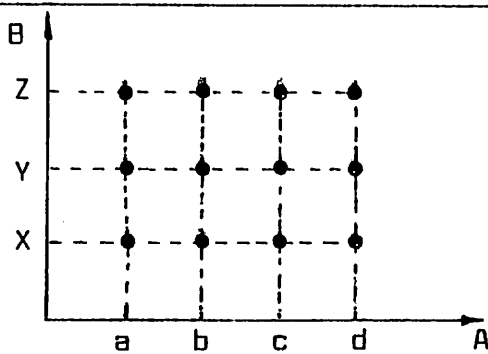
Observación:

- 1)  $A \times A = A^2$
- 2) En general  $A \times B$  puede representarse en un diagrama de coordenadas.
- 3) El plano real se representa por  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

Ejemplo:

Si  $A = \{a, b, c, d\}$  y  $B = \{x, y, z\}$  entonces  $A \times B$  puede graficarse de la siguiente manera:





$$A \times B = \{(a, x)(b, x)(c, x)(d, x)(a, y)(b, y)(c, y)(d, y)(a, z)(b, z)(c, z)(d, z)\}$$

## RELACIONES

## Definición (Relación)

Sean  $A$  y  $B$  conjuntos, entonces " $R$  es una relación de  $A$  a  $B$ " ssi  $R \subseteq A \times B$

## Observación:

- 1) Si  $(X, Y) \in R$  escribimos  $XRY$ , y diremos que " $X$  está en relación con  $Y$ ".
- 2) Si  $(X, Y) \notin R$  entonces  $X \not R Y$
- 3) Si  $A=B$ ;  $R \subseteq A \times A$  y se dice que " $R$  es una relación en  $A$ ".
- 4)  $R$  se puede definir mediante una propiedad.
- 5) Usaremos las letras  $R, S, T, \dots$ , para denotar a las relaciones.

## Ejemplos:

- 1) Sea  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{a, b, c, d\}$  entonces:  
 $R = \{(1, a)(2, a)(1, b)(3, c)\}$  es una relación de  $A$  a  $B$
- 2) Sea  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ; definamos:  
 $R = \{(X, Y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid X + Y = 2\}$   
 entonces:  $R = \{(0, 2) (2, 0) (1, 1)\}$
- 3) Sea  $R = \{(X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid X + Y = 2\}$  entonces  $R$  es una relación en  $\mathbb{R}$ .
- 4) Sea  $R = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid X^2 + Y^2 = 4\}$ , entonces  $R$  es también una relación en  $\mathbb{R}$ .



**Definición:** (Relación de Equivalencia)

Sea  $A$  un conjunto cualquiera, se dice que una relación  $R$  definida en  $A$  es una "relación de equivalencia" si:

- 1)  $\forall a \in A; (a, a) \in R$  (Reflexividad)
- 2)  $(a, b) \in R \implies (b, a) \in R$  (Simetría)
- 3)  $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies (a, c) \in R$  (Transitividad)

**Ejemplos:**

- 1) Si  $A = \{1, 2, 3\}$  entonces:

$$R = \{(1,1)(2,2)(2,3)(3,2)(3,3)\}$$

es una relación de equivalencia en  $A$ .

- 2) Si  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x\}$  entonces  $R$  es una relación de equivalencia en  $\mathbb{R}$ .

**Definición:** (Relación en Orden)

Sea  $A$  conjunto cualquiera, se dice que  $R \subseteq A^2$  es una "relación de orden" si:

- 1)  $\forall a \in A ; (a, a) \in R$
- 2)  $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \implies a = b$  (Antisimetría)
- 3)  $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \implies (a, c) \in R$

**Ejemplos:**

- 1) Si  $A = \{2, 7, 10\}$  entonces:

$$R = \{(2,2), (2,10), (7,7), (10,10), (7,10)\}$$

es una relación de orden en  $A$ .

- 2) Si  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq y\}$  entonces  $R$  es una relación de orden en  $\mathbb{R}$ .



Demostración:

- 1)  $\forall X \in R; (X, X) \in R$
- 2)  $(X, Y) \in R \wedge (Y, X) \in R \implies X \geq Y \wedge Y \geq X \implies X = Y$
- 3)  $(X, Y) \in R \wedge (Y, Z) \in R \implies X \geq Y \wedge Y \geq Z \implies X \geq Z$   
 $\implies (X, Z) \in R$

Observación:

Una relación que es simétrica no es antisimétrica y viceversa, salvo el caso de la igualdad, que es simétrica y antisimétrica a la vez.

**Definición (Dominio y Recorrido)**

Sea  $R$  una relación de  $A$  a  $B$ , entonces:

- 1) El conjunto de todas las primeras coordenadas de los elementos de  $R$ , se llama "Dominio de  $R$ " y se denota por  $\text{Dom}(R)$ .

En símbolos:  $\text{Dom}(R) = \{X \in A \mid (X, Y) \in R\}$

- 2) El conjunto de todas las segundas coordenadas de los elementos de  $R$ , se llama "Recorrido de  $R$ " y se denota por  $\text{Rec}(R)$ .

En símbolos:  $\text{Rec}(R) = \{Y \in B \mid (X, Y) \in R\}$

Ejemplos:

- 1) Sea  $R = \{(X, Y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2X + Y = 10\}$   
 Es decir  $R = \{(1, 8)(2, 6)(3, 4)(4, 2)\}$  entonces:  
 $\text{Dom}(R) = \{1, 2, 3, 4\}$   
 $\text{Rec}(R) = \{2, 4, 6, 8\}$
- 2) Sea  $R = \{(X, Y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid Y = 3X; 1 \leq X < 6\}$   
 $R = \{(1, 3)(2, 6)(3, 9)(4, 12)\}$



Es decir  $R = \{(1,3)(2,6)(3,9)(4,12)(5,15)\}$  entonces:

$$\text{Dom}(R) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{Rec}(R) = \{3, 6, 9, 12, 15\}$$

Observación:

- 1)  $\text{Dom}(R) \subseteq A$  y  $\text{Rec}(R) \subseteq B$  (si  $R \subseteq A \times B$ )
- 2) Al recorrido de  $R$  también se le llama rango de  $R$ .

**Definición** (relación idéntica o Relac. identidad)

Sea  $A$  conjunto cualquiera entonces  $R \subseteq A \times A$  se llama "relación idéntica" si:

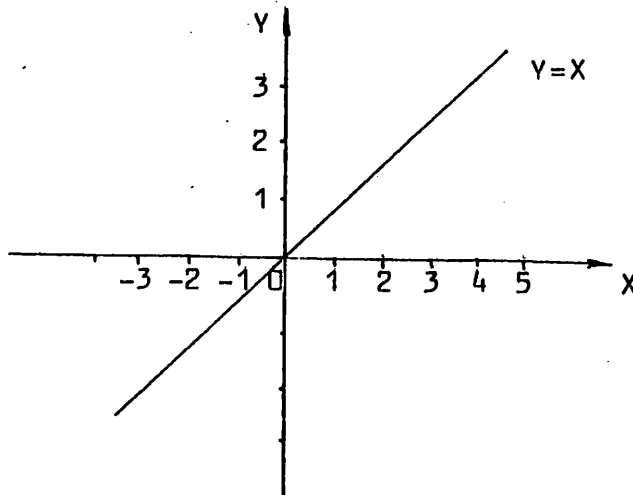
$$R = \{(X, Y) \in A \times A \mid Y = X\} = I_A$$

Ejemplos:

- 1) Si  $A = \{1, 2, 3\}$  entonces:

$I_A = \{(1,1)(2,2)(3,3)\}$  es la relación idéntica definida en  $A$ .

- 2)  $I_{\mathbb{R}} = \{(X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid Y = X\}$



Es la relación idéntica definida en  $\mathbb{R}$ .



## Definición (Relación Inversa)

Sea  $R \subseteq A \times B$  se llama "relación inversa de  $R$ " o simplemente "inversa de  $R$ " denotada por  $R^{-1}$  a la relación de  $B$  a  $A$  definida así:

$$R^{-1} = \{(X, Y) \mid (Y, X) \in R\}$$

Ejemplos:

1) Sea  $R = \{(X, Y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2X + Y = 10\}$  entonces

$$R^{-1} = \{(X, Y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2Y + X = 10\}$$

Es decir:

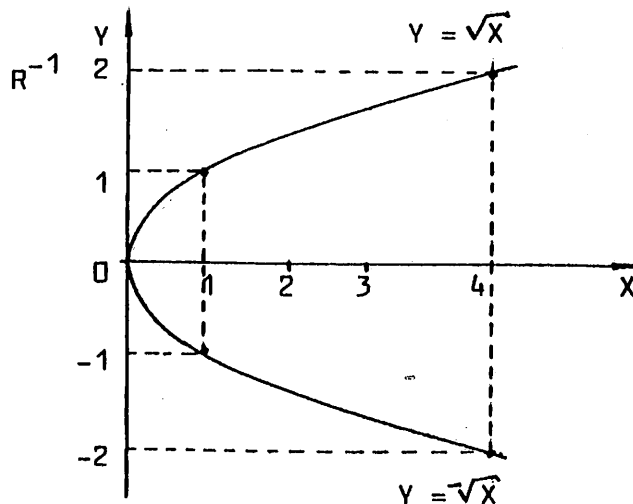
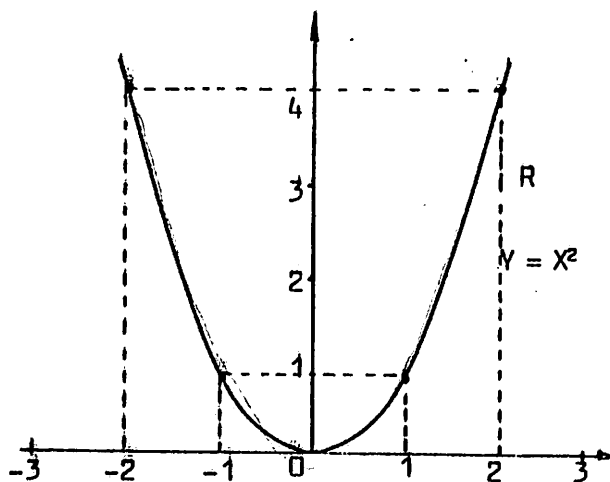
$$R = \{(1, 8)(2, 6)(3, 4)(4, 2)\}$$

$$R^{-1} = \{(8, 1)(6, 2)(4, 3)(2, 4)\}$$

2) Si  $R = \{(X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid Y = X^2\}$  entonces:

$$R^{-1} = \{(X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid X = Y^2\} \text{ o bien:}$$

$$R^{-1} = \{(X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid Y = \pm \sqrt{X}\}$$



Observación:

Si  $R$  es una relación de  $A$  a  $B$  ed  $R \subseteq A \times B$  entonces  $R^{-1} \subseteq B \times A$  y además:

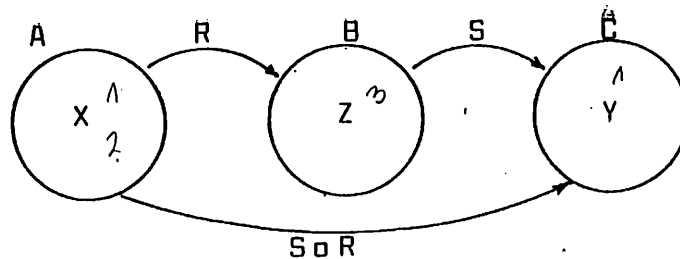
$$\text{Dom}(R^{-1}) = \text{Rec}(R)$$

$$\text{Rec}(R^{-1}) = \text{Dom}(R)$$

**Definición** (Composición de Relaciones)

Sea  $R \subseteq A \times B$  y  $S \subseteq B \times C$  se llama "Relación compuesta de  $S$  y  $R$ " denotada por  $S \circ R$ , la relación de  $A$  a  $C$  definida por:

$$S \circ R = \{ (X, Y) \in A \times C \mid \exists Z \in B \text{ m } (X, Z) \in R \wedge (Z, Y) \in S \}$$



Ejemplos:

1) Sean  $R$  y  $S$  definidos como:

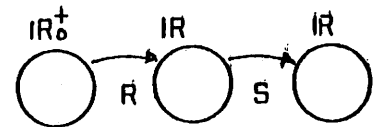
$$R = \{ (1, 3), (2, 3) \} \quad \text{y} \quad S = \{ (3, 1) \}$$

$$\therefore S \circ R = \{ (1, 1), (2, 1) \}$$

2) Sean  $R$  y  $S$  dos relaciones definidas en  $\mathbb{R}$  tales que:

$$R = \{ (X, Y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \mid Y = \sqrt{X} \}$$

$$S = \{ (X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid Y = X + 2 \}$$



Entonces:

$$S \circ R = \{ (X, Y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \mid \exists Z \in \mathbb{R} \text{ m } (X, Z) \in R \wedge (Z, Y) \in S \}$$

$$S \circ R = \{ (X, Y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid \exists Z \in \mathbb{R} \text{ m } Z = \sqrt{X} \wedge Y = Z + 2 \}$$



$$\text{SoR} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \mid Y = \sqrt{X} + 2\}$$

Observación:

- 1) Todo lo dicho para SoR es válido para RoS
- 2) En general  $\text{SoR} \neq \text{RoS}$

### Definición (Función)

Sea  $f \subseteq A \times B$ ,  $f$  se llama "función de A a B" ssi cumple las siguientes propiedades.

- 1)  $\text{Dom } f = A$
- 2) Si  $(a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \implies b = c$

Observación:

- 1) Si  $f$  es una función de A a B escribimos:

$$f: A \longrightarrow B \quad \text{o} \quad A \xrightarrow{f} B$$

- 2) De la definición se tiene que  $\text{Rec } f \subseteq B$
- 3) De la definición se tiene que distintos elementos en el dominio pueden estar relacionados con un mismo elemento en el recorrido.
- 4) Si  $f$  es una función de A a B entonces  $f$  se puede escribir:

a) En forma "implícita":

$$f = \{(X, Y) \in A \times B \mid f(X, Y) = 0\}$$

b) En forma "explícita":

$$f = \{(X, Y) \in A \times B \mid Y = f(X)\}$$



- 5)  $(a,b) \in f \iff a \in \text{Dom } f \iff b = f(a)$
- 6) Las funciones se denotan por las letras minúsculas  $f, g, h, \dots$

Ejemplos:

- 1) Sea  $A = \{1, 2, 3\}$  y  $B = \{a, b\}$  entonces:  
 $f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$  es una función de  $A$  a  $B$  pues:

- i)  $\text{Dom } f = \{1, 2, 3\} = A$   
 ii) A cada elemento de  $A$  le corresponde un único elemento de  $B$ .

- 2) Sea  $A = \mathbb{N}$  y  $B = \{X \mid X = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ ; entonces

$$f = \{(X, Y) \in A \times B \mid Y = 2X + 4\}$$

es una función pues:

- i)  $\text{Dom } f = \mathbb{N} = A$   
 ii) Si  $(a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \implies$   
 $\implies b = 2a + 4 \wedge c = 2a + 4$   
 $\implies b = c$

### Definición (Imagen)

Sea  $f: A \longrightarrow B$ . Sea  $X \in A$  entonces el único elemento  $Y \in B$  tal que  $(X, Y) \in f$  se llama "imagen de  $X$  por  $f$ " y escribimos  $Y = f(X)$ .

Observación:

- 1) Si  $Y \in B$  es la imagen de  $X$  por  $f$ , entonces  $X$  se llama



ma "pre-imagen".

2) Como  $f: A \longrightarrow B$  es también una relación, las definiciones de Dominio y Recorrido son también válidas para  $f$ ; es decir:

$$\text{Dom } f = \{X \in A \mid (X, Y) \in f\}$$

$$\text{Rec } f = \{Y \in B \mid (X, Y) \in f\}$$

**Definición (Func. Inyectiva)**

Sea  $f: A \longrightarrow B$  entonces "f es inyectiva" ssi:

$$f(X) = f(Y) \implies X = Y$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X \longrightarrow f(X) = 2X - 1$$

entonces f es inyectiva pues:

$$f(X) = f(Y) \implies 2X - 1 = 2Y - 1$$

$$\implies 2X = 2Y$$

$$\implies X = Y$$

**Definición (Func. Epiyectiva)**

Sea  $f: A \longrightarrow B$  entonces "f es sobreyectiva o epiyectiva" ssi:  $\text{Rango } f = B$

$$\text{O bien: } \forall Y \in B \exists X \in A \text{ m } Y = f(X)$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X \longrightarrow f(X) = X + 1$$



entonces  $f$  es epiyectiva pues  $\text{Rec } f = \mathbb{R}$

### Definición (Func. Biyectiva)

Sea  $f: A \longrightarrow B$  entonces se dice que " $f$  es biyectiva" ssi  $f$  es inyectiva y epiyectiva a la vez.

Ejemplo:

$$\text{Sea } f: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$x \longmapsto f(x) = x^2$$

entonces  $f$  es biyectiva pues :

i)  $f$  es inyectiva:

$$f(x) = f(y) \longrightarrow x^2 = y^2 \implies x = y$$

ii)  $f$  es epiyectiva:

$$\text{Rec } f = \{y \in \mathbb{R}_0^+ \mid x = \sqrt{y}\} = \mathbb{R}_0^+$$

### Definición (Func. Inversa)

Sea  $f: A \longrightarrow B$  biyectiva se llama "función inversa de  $f$ " denotada por  $f^{-1}$  a la función de  $B$  a  $A$  definida así:

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in f\}$$

Observación:

$$1) \quad (x, y) \in f^{-1} \iff (y, x) \in f$$

$$2) \quad (y, x) \in f^{-1} \iff (x, y) \in f$$



Ejemplo:

Como  $f: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$  m  $f(X) = X^2$  es biyectiva,

Entonces:

$$f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \text{ m } f^{-1}(X) = \sqrt{X}$$

**Definición (Func. Constante)**

Sea  $f: A \longrightarrow B$ , se dice que "f es función constante" ssi  $\text{Rec } f = \{b\} \quad \forall X \in A$ ; es decir:

$$f = \{(X, Y) \in A \times B \mid f(X) = b ; b \in B, \forall X \in A\}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X \longmapsto f(X) = 5$$

es la función cte. igual a cinco.

**Definición (Func. Idéntica)**

Sea A conj. cualquiera y  $f: A \longrightarrow A$  se dice que "f es función idéntica" ssi:

$$f: A \longrightarrow A$$

$$X \longmapsto f(X) = X$$

Observación:

Generalmente la función idéntica definida en A se denota por  $I_A$ .



Ejemplo:

$$I_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow I_{\mathbb{R}}(x) = x$$

Es decir:  $I_{\mathbb{R}} = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x \}$

Es la función idéntica definida en  $\mathbb{R}$ .

**Definición (Func. Lineal)**

Sea  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ;  $f(x) = ax + b$ ;  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ;  $a \neq 0$

entonces  $f$  se llama "función lineal".

**Observación:**

$$\text{Dom } f = \text{Rec } f = \mathbb{R}$$

**Definición (Función Cuadrática)**

Sea  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = ax^2 + bx + c$

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ ;  $a \neq 0$  entonces " $f$  se llama función cuadrática".

**Ejemplo:**

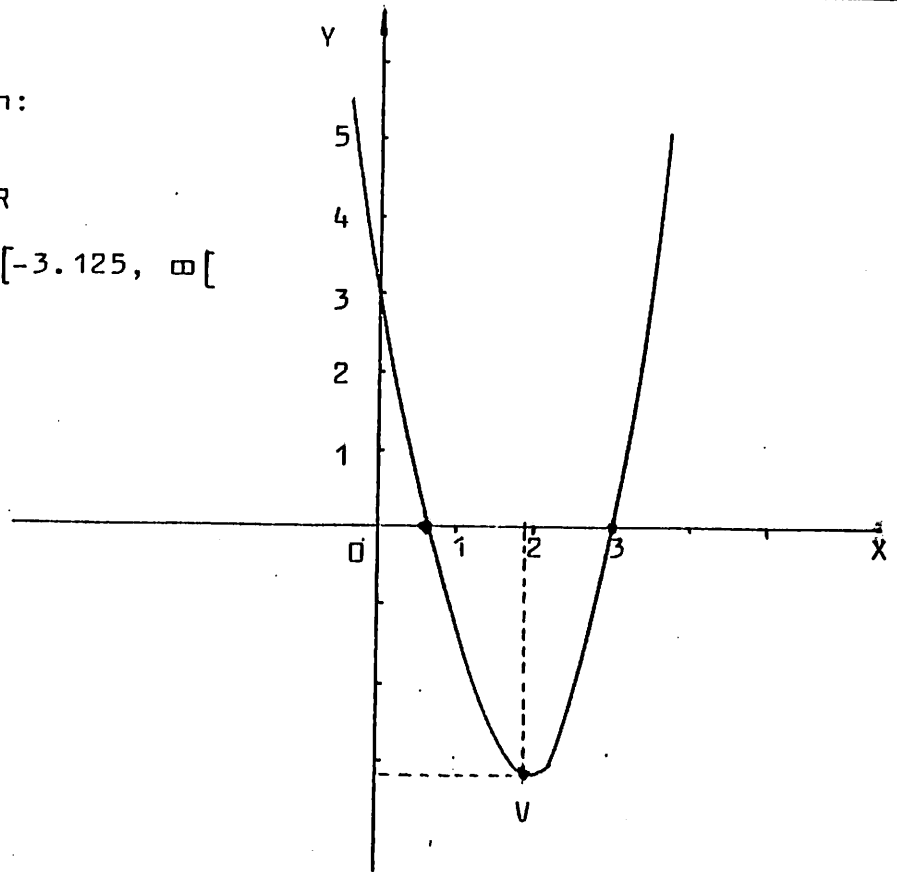
Hacer el gráfico de:  $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$



Solución:

Dom  $f = \mathbb{R}$

Rec  $f = [-3.125, \infty[$



Observación:

- 1) El gráfico de la función cuadrática se llama "parábola".
- 2) Para determinar el vértice de la parábola se usa la expresión:
 
$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$
- 3) Si  $a > 0$  las ramas de la parábola se abren hacia arriba y se  $a < 0$  las ramas de la parábola se abren hacia abajo.
- 4)
  - a) Si  $b^2 - 4ac > 0$ : La parábola corta al eje X en dos puntos.
  - b) Si  $b^2 - 4ac = 0$ : La parábola corta al eje X en un solo punto.



c) Si  $b^2 - 4ac < 0$ : La parábola no corta al eje X.

5)

a)  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

b)  $\text{Rec } f = \left[ \frac{4ac - b^2}{4a}, \infty \right[$  si  $a > 0$

$\text{Rec } f = \left] -\infty, \frac{4ac - b^2}{4a} \right]$  si  $a < 0$

### Definición (Función Polinómica)

Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

Dónde:

$a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ ;  $a_n \neq 0$ ; entonces  $f$  se llama "función polinómica"

Ejemplo:

$f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 3x - 4$  es una función polinómica de grado 4.

Observación:

- 1)  $n$  es el grado del polinomio
- 2)  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ ;  $\text{Rec } f = ?$

### Definición (Función Racional)

Sea  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0}$$



$$\text{O bien : } x \longrightarrow f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Donde  $a_m, \dots, a_0, b_n, \dots, b_0 \in \mathbb{R}$ ;  $a_m \neq 0, b_n \neq 0$   
entonces  $f$  se llama "función racional".

Observación:

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid b_n x^n + \dots + b_0 \neq 0\}$$

Ejemplo:

La función  $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^4 - 3}$  es una función racional,

donde:  $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\sqrt[4]{3}\}$

Definición: (Función Par)

Se dice que una función  $f$  es "par" si:

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \text{Dom } f$$

Observación:

Una función par es simétrica c/r al eje  $Y$ .

Ejemplo:

$f(x) = 2x^2 + x^4$  es función par, pues:

$$f(-x) = 2(-x)^2 + (-x)^4 = 2x^2 + x^4 = f(x)$$



**Definición (Función Impar)**

Se dice que una función "f es impar" si:

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \text{Dom } f$$

**Observación:**

Una función impar es simétrica c/r al origen de coordenadas.

**Ejemplo:**

La función  $f(x) = x^3$  es impar pues:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

**Definición (Función Periódica)**

Se dice que f es una "función periódica" si:

$$f(x + h) = f(x) \quad \forall h \neq 0$$

**Ejemplo:**

La función  $f(x) = 5$  es periódica pues:

$$f(x + h) = 5 = f(x)$$

**Definición (Func. Creciente y Decreciente)**

- 1) Se dice que una función f es "creciente" (estrictamente creciente) si:

$$x_2 > x_1 \implies f(x_2) \geq f(x_1)$$

$$(x_2 > x_1 \implies f(x_2) > f(x_1))$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \forall x_1, x_2 \in \text{Dom } f$$



2) Se dice que una función  $f$  es "decreciente" (estrictamente decreciente) si:

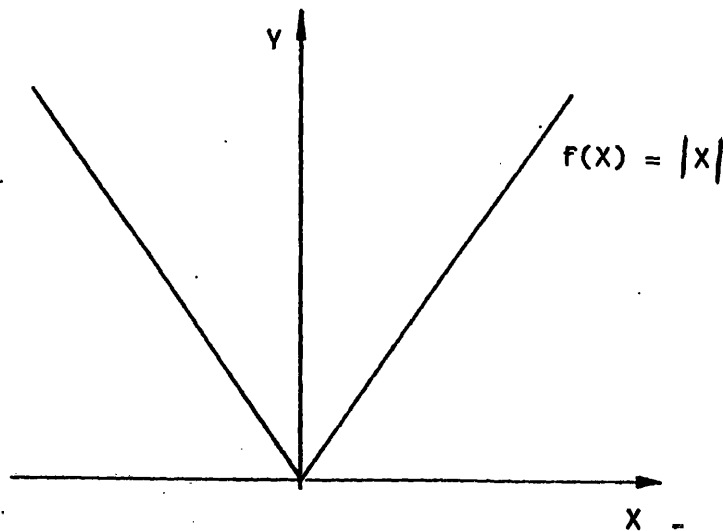
$$\left. \begin{array}{l} x_2 > x_1 \implies f(x_2) \leq f(x_1) \\ (x_2 > x_1 \implies f(x_2) < f(x_1)) \end{array} \right\} \forall x_1, x_2 \in \text{Dom } f$$

### Definición (Función Valor Absoluto)

La función "valor absoluto" se define de la manera siguiente:

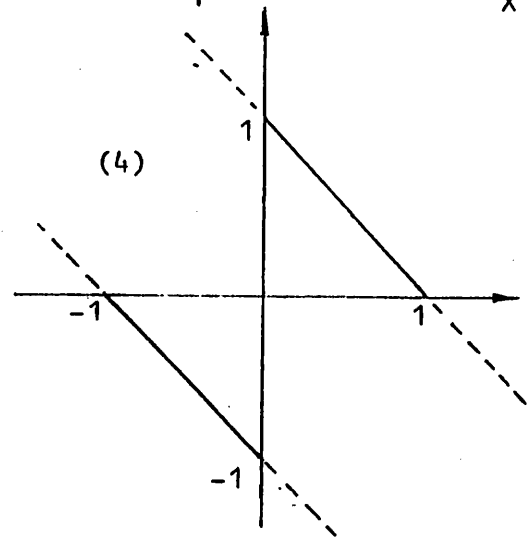
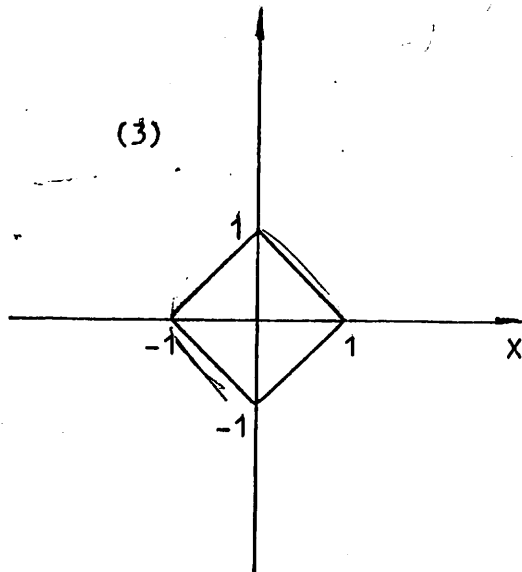
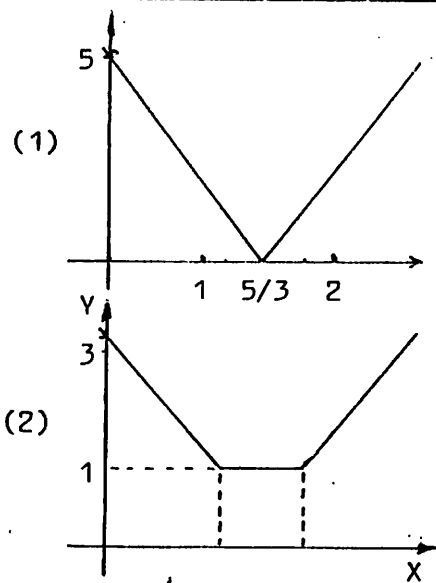
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\longmapsto f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}; \quad \text{Rec } f = \mathbb{R}_0^+$$



Ejemplos:

- 1)  $f(x) = |3x - 5|$
- 2)  $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$
- 3)  $|x| + |y| = 1$
- 4)  $|x + y| = 1$



**Definición (Func. Mayor Valor Entero)**

La función "mayor valor entero" se define de la siguiente manera:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$x \mapsto f(x) = \lfloor x \rfloor$$

donde  $\lfloor x \rfloor = n \in \mathbb{Z}$  con  $x = n + d$ ;  $0 \leq d < 1$

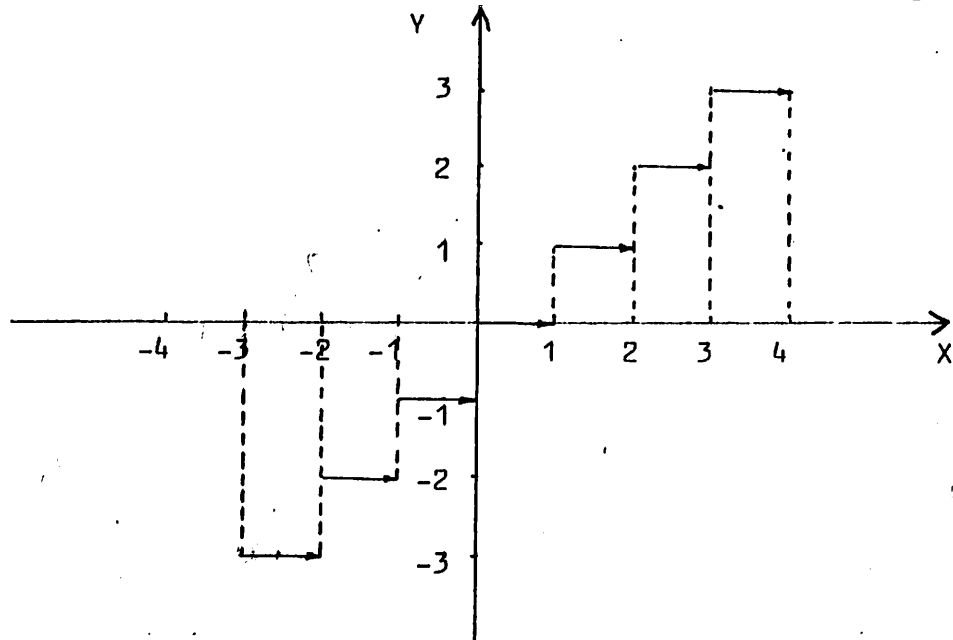


Ejemplos:

1)  $\llbracket 3.5 \rrbracket = \llbracket 3 + 0.5 \rrbracket = 3$

2)  $\llbracket 0.1 \rrbracket = \llbracket 0 + 0.1 \rrbracket = 0$

3)  $\llbracket -1.8 \rrbracket = \llbracket -2 + 0.2 \rrbracket = -2$

El gráfico de la función  $f(x) = \llbracket x \rrbracket$  es el siguiente:

$$-3 \leq x < -2 \implies \llbracket x \rrbracket = -3 \implies y = -3$$

$$-2 \leq x < -1 \implies \llbracket x \rrbracket = -2 \implies y = -2$$

$$-1 \leq x < 0 \implies \llbracket x \rrbracket = -1 \implies y = -1$$

$$0 \leq x < 1 \implies \llbracket x \rrbracket = 0 \implies y = 0$$

$$1 \leq x < 2 \implies \llbracket x \rrbracket = 1 \implies y = 1$$

$$2 \leq x < 3 \implies \llbracket x \rrbracket = 2 \implies y = 2$$

$$3 \leq x < 4 \implies \llbracket x \rrbracket = 3 \implies y = 3$$

Además:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} ; \quad \text{Rec } f = \mathbb{Z}$$



## Definición (F. exponencial)

Sea  $a > 0$  ;  $a \neq 1$  se define la "función exponencial de base  $a$ ", como:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \longrightarrow f(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

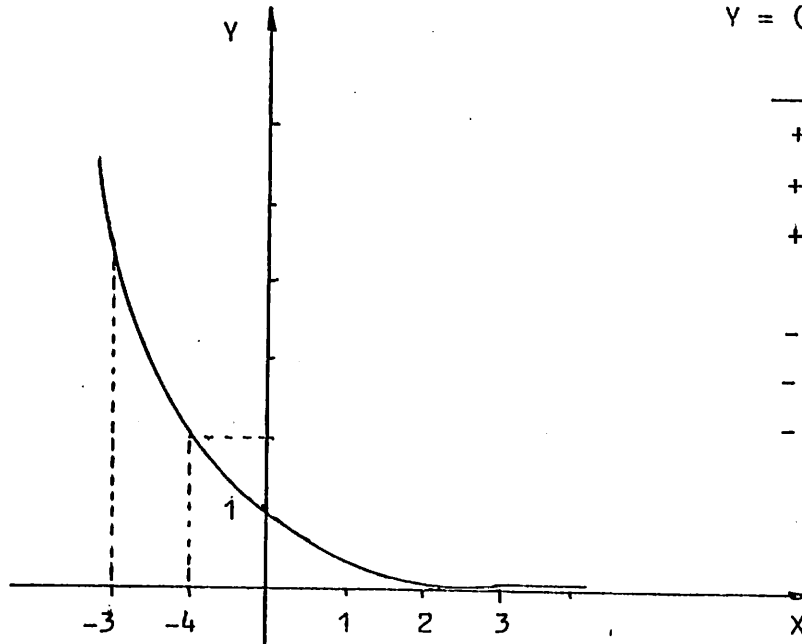
## Propiedades:

- 1)  $f(x) = 1 \implies a^x = 1 \implies x = 0$
- 2)  $f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$
- 3)  $[f(x)]^\alpha = (a^x)^\alpha = a^{x\alpha} = f(x\alpha) ; \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- 4)  $f(x-y) = a^{x-y} = a^{x+(-y)} = a^x \cdot a^{-y}$   
 $= a^x \cdot f(-y) = a^x (a^y)^{-1} = \frac{a^x}{a^y}$
- 5) Si  $0 < a < 1$  entonces  $f(x) = a^x$  es Estrictamente Decrec.
- 6) Si  $a > 1$  entonces  $f(x) = a^x$  es Estrictamente Crec.
- 7) La función  $f(x) = a^x$  también se puede escribir como  $f(x) = \exp_a(x)$
- 8) La función  $y = a^x$  es biyectiva pues:
  - a)  $f(x) = f(y) \implies a^x = a^y$   
 $\implies a^{x-y} = 1$   
 $\implies x - y = 0$   
 $\implies x = y$
  - b)  $\text{Rec } f = \mathbb{R}^+$
- 9) de (8) se tiene que  $f(x) = a^x$  admite función inversa
- 10) Si  $a = e$  entonces  $y = \exp(x)$



Gráfico de la función exponencial

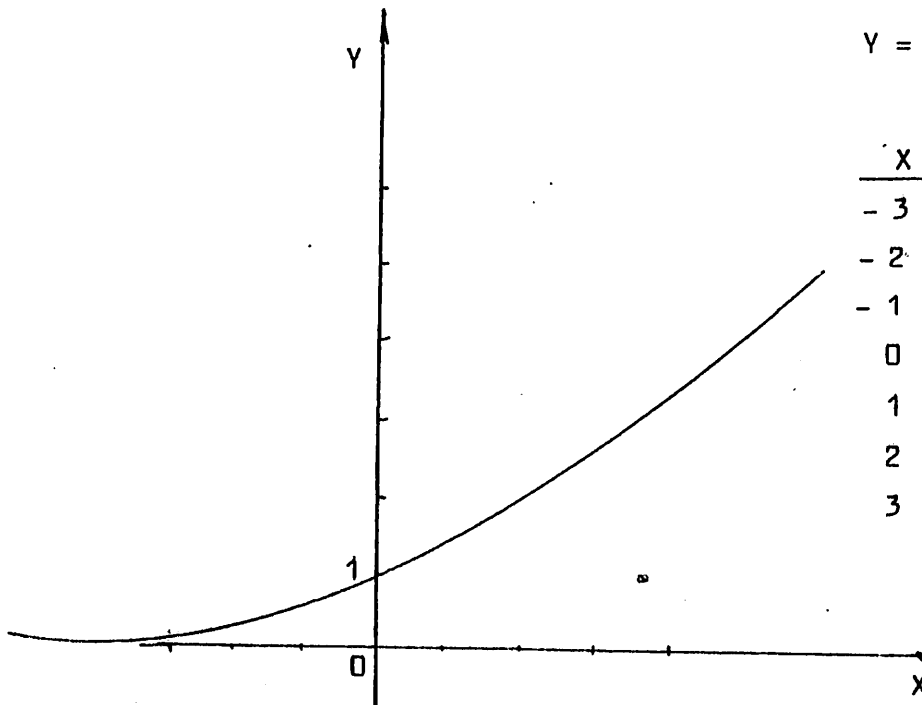
1er. Caso:  $0 < a < 1$



$$y = (1/2)^x$$

X	Y
+3	1/8
+2	1/4
+1	1/2
0	1
-1	2
-2	4
-3	8

2º Caso:  $a > 1$



$$y = 2^x$$

X	Y
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8



## Definición (Función Logaritmo)

La "función logaritmo" se define como la inversa de la función exponencial y está dada como:

$$\log_a: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y = \log_a(x); \quad a > 0; \quad a \neq 1$$

## Observación:

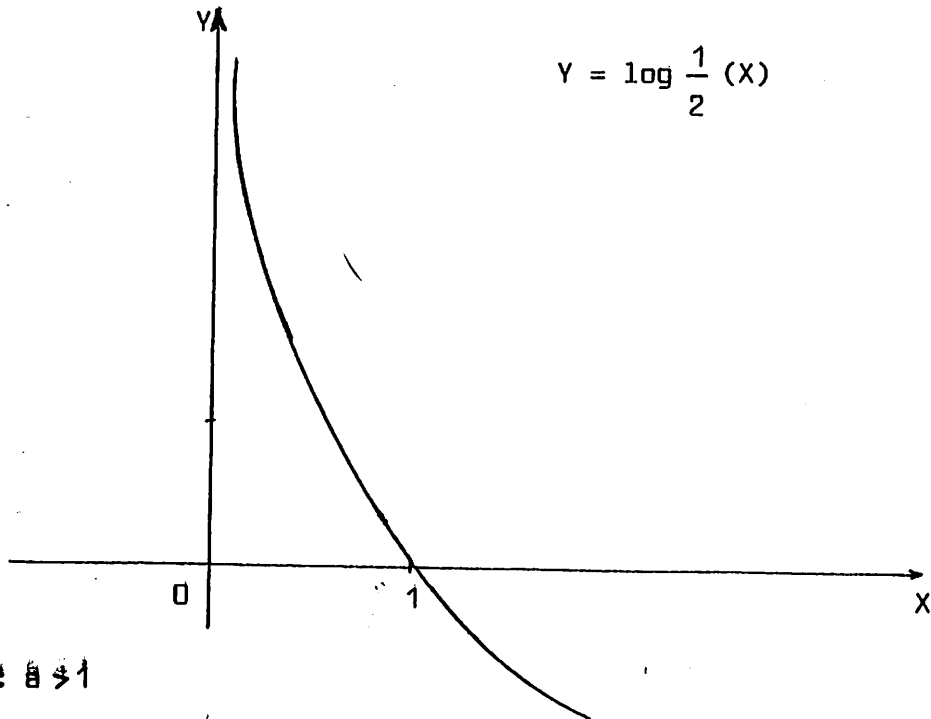
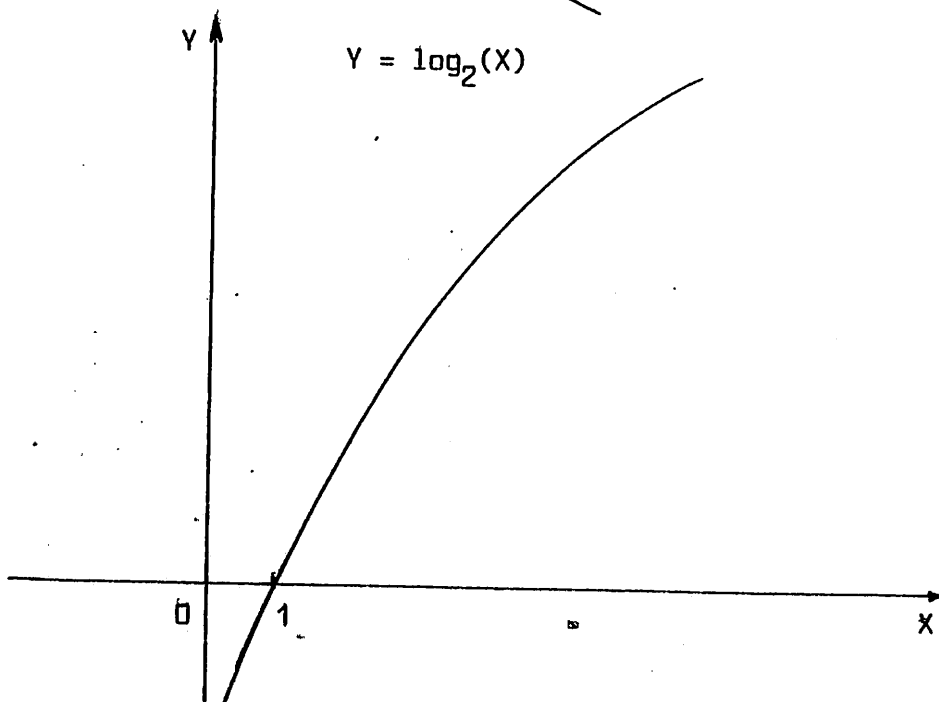
- 1) Si  $y = \log_a x \iff a^y = x$ .
- 2) Si  $y = a^x \iff x = \log_a y$
- 3) En lugar de escribir  $\exp_a^{-1}(x)$  escribimos  $\log_a(x)$

## Propiedades:

- 1) La función  $y = \log_a(x)$  es biyectiva.
- 2)  $\log_a(1) = 0$
- 3)  $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- 4)  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- 5)  $\log_a x^n = n \log_a x; \quad n \in \mathbb{R}$
- 6)  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$  (cambio de base)
- 7) Si  $0 < a < 1$  entonces  $y = \log_a(x)$  es Estrictamente Decrec.
- 8) Si  $a > 1$  entonces  $y = \log_a(x)$  es Estrictamente Crec.
- 9) Si  $a = 10$  entonces  $y = \log_{10}(x)$  son los llamados "logaritmos decimales o de Briggs"
- 10) Si  $a = e$  entonces  $y = \log_e(x) = \ln x$  se llaman "logaritmos naturales o neperianos".



## Gráfico de la función logaritmo

1er. Caso:  $0 < a < 1$ 2o Caso:  $a > 1$ 

## Definición (Composición de funciones)

Sea  $f: A \rightarrow B$  y  $g: B \rightarrow C$ , entonces la "composición de  $f$  y  $g$ ", denotada por  $g \circ f$  se define como:

$$g \circ f = \{ (x, y) \in A \times C \mid \exists z \in B \text{ tal que } (x, z) \in f \wedge (z, y) \in g \}$$

## Teorema

Sean  $f: A \rightarrow B$  y  $g: B \rightarrow C$  entonces:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) ; \forall x \in A$$

## Observación:

- 1) Análogamente se define  $f \circ g$
- 2)  $\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom } f \mid f(x) \in \text{Dom } g\}$
- 3) La composición de funciones no es conmutativa; **ES** decir  $g \circ f \neq f \circ g$
- 4) La composición de funciones es asociativa; es decir:  
 $[f \circ (g \circ h)](x) = [(f \circ g) \circ h](x)$

## Ejemplos:

$$1) \text{ Sean } f = \{(1, 2)(3, 4)(8, 6)(5, 1)\}$$

$$g = \{(2, 7)(4, 5)(6, 9)(1, 11)\}$$

$$\therefore g \circ f = \{(1, 7)(3, 5)(8, 9)(5, 11)\}$$

$$2) \text{ Sean } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = 2x + 1$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow g(x) = x^2 - 2; \text{ entonces:}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2$$



$$f(x) = 4x^2 + 4x - 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2) + 1$$

$$f \circ g(x) = 2x^2 - 3$$

Teorema

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$$

Demostración:

$$\text{Sabemos que: } (x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1}$$

$$\text{o bien } y = f(x) \implies x = f^{-1}(y); \text{ entonces:}$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = I(y)$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = I(x)$$

$$\text{Luego: } f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) = 2x - 1, \text{ entonces:}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{2}$$

Luego:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x-1) = \frac{2x-1+1}{2} = x$$



Observación:

- 1) La composición de dos funciones inyectivas es inyectiva
- 2) La composición de dos funciones epiyectivas es epiyectiva.
- 3) La composición de dos funciones biyectivas es biyectiva.

**Definición (Igualdad de funciones)**

Sean  $f: A \rightarrow B$  y  $g: A \rightarrow B$ , se dice que las funciones  $f$  y  $g$  son iguales ssi:

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$$

**Definición (Algebra de Funciones)**

Sean  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:  $A \cap B \neq \emptyset$  entonces "la suma, diferencia, producto y cociente" de las funciones  $f$  y  $g$  se definen como:

- 1)  $(f+g)(x) = f(x) + g(x) ; \quad \forall x \in A \cap B$
- 2)  $(f-g)(x) = f(x) - g(x) ; \quad \forall x \in A \cap B$
- 3)  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) ; \quad \forall x \in A \cap B$
- 4)  $(f/g)(x) = f(x)/g(x) ; \quad \forall x \in (A \cap B - \{x | g(x) = 0\})$

Ejemplos:

- 1) Sean  $f = \{(4, 3)(5, 6)(0, 5)(3, 2)(8, 11)\}$   
 $g = \{(5, -4)(0, 6)(3, 3)(8, 9)(7, 10)\}$

Entonces:

$$\text{Dom } f = \{0, 3, 4, 5, 8\}$$

$$\text{Dom } g = \{0, 3, 5, 7, 8\}$$



$$\text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \{0, 3, 5, 8\}$$

$$f + g = \{(0, 11)(3, 5)(5, 2)(8, 20)\}$$

$$f - g = \{(0, -1)(3, -1)(5, 10)(8, 2)\}$$

$$f \cdot g = \{(0, 30)(3, 6)(5, -24)(8, 99)\}$$

$$f/g = \{(0, 5/6)(3, 2/3)(5, -3/2)(8, 11/9)\}$$

2) Sean  $f: \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = x + 2 \quad \text{entonces:}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x+1} + x + 2$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x+1} - x - 2$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{\frac{1}{x+1}}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

$$\text{Dom } (f \pm g) = \text{Dom } (fg) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\text{Dom } (f/g) = \mathbb{R} - \{-1\} - \{-1, -2\} = \mathbb{R} - \{-1, -2\}$$



## Ejercicios:

1) Cuáles de las siguientes relaciones son funciones:

a)  $R_1 = \{(3,2)(4,6)(5,-1)\}$

b)  $R_2 = \{(3,6)(4,7)(3,7)\}$

c)  $R_3 = \{(1,4)(3,4)(7,3)\}$

2) Dadas las funciones:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2$

$g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Calcular:

$f(0); g(2); g(0); h(-5); h(0)$  y  $h(7)$

b) Calcular:  $\text{Rec } f; \text{Rec } g; \text{Rec } h$

3) Sea  $f(x) = \frac{1}{3} \sqrt{9 - x^2}$  Hallar  $\text{Dom } f$  y  $\text{Rec } f$

4) Dada la función  $f(x) = 2x - 3$

a) Determine  $\text{Dom } f$

b) Calcule  $f(-5); f(-1); f(0); f(3/2)$

c) Determine  $\text{Rec } f$

d) Calcule  $f(f(-1)); f(f(0))$

e) Calcule  $f(x+1); f(x+h)$

f) Calcule  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

5) Si  $f$  es la función definida por:



$$f(x) = \begin{cases} [2x] & \text{si } x \in [0, 3] \\ 2 \cdot [x] & \text{si } x \in ]3, 5] \end{cases}$$

a) Determine  $f(1/2)$ ;  $f(2/3)$ ;  $f(3/2)$ ;  $f(4)$ ;  $f(10/3)$

b) Grafique  $f$

6) Demuestre que:

a)  $[x + n] = [x] + n$  si  $n \in \mathbb{Z}$

b)  $[x] + [-x] = 0$  o  $(-1)$

c)  $[x] + [y] \leq [x + y]$

7) Graficar:

a)  $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$

b)  $|x| + |y| = 1$

c)  $|x| + |y| = 1$

8) Determine dominios y recorridos de las funciones siguientes:

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$

b)  $f(x) = x^2 - 5x + 6$

c)  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

9) Determine Dom y recorrido de:

1)  $y = 2x - 1$

6)  $y = 2\sqrt{x}$

2)  $y = x^2 - 1$

7)  $y = -\sqrt{1 + x^2}$

3)  $y = \sqrt{2 - x}$

8)  $y^2 = \frac{x(x-2)}{x+3}$

4)  $y = x^2 + x + 1$

9)  $y = \sqrt{x^2 - 16}$



$$5) \quad y = \frac{(X+1)(X-1)}{X-1}$$

$$10) \quad y = -\sqrt{-X}$$

- 10) Restringir adecuadamente el Dom y/o Recorrido si es necesario para que las siguientes relaciones sean funciones:

$$(1) \quad 2X^2 - Y^2 = 1$$

$$(2) \quad X^2 \cdot Y + X = 1$$

$$(3) \quad 3X - 4Y = 5$$

$$11) \quad \text{Sean } R_1 = \{ (X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid Y = \sqrt{X-2} \}$$

$$R_2 = \left\{ (X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid Y = \frac{1}{1 + X^2} \right\}$$

- a) ¿Son  $R_1$  y  $R_2$  funciones?  
 b) Si son funciones ¿son biyectivas?  
 c) ¿Se pueden determinar  $R_1^{-1}$  y  $R_2^{-2}$  ?

$$12) \quad \text{Demostrar que la función } f(X) = \frac{3X + 1}{X - 1} \text{ es inyectiva}$$

- 13) Verifique que la función:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad f(X) = 6X^2 + 11 \text{ no es inyectiva.}$$

$$14) \quad \text{Sea } f: \mathbb{R} - \{1/2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1/2\}, \quad f(X) = \frac{X + 3}{1 - 2X}$$

Demuestre que  $f$  es biyectiva y encuentre  $f^{-1}$

- 15) Determinar si:

$$f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$X \longrightarrow f(X) = \frac{3X}{X + 1}$$



es biyectiva, en caso de serlo determine  $f^{-1}$

16) Sea  $f: \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$

$$x \longrightarrow f(x) = \frac{x-2}{x-3}$$

Determinar  $f^{-1}$ , si existe.

17) Sea  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$$

Hacer  $f$  biyectiva y posteriormente determinas  $f^{-1}$ .

18) Encuentre  $f \circ g$  y  $g \circ f$  si  $f$  y  $g$  están definidas por:

a)  $f(x) = 2x^2 + 5$  ;  $g(x) = 4 - 7x$

b)  $f(x) = \frac{1}{3x + 1}$  ;  $g(x) = \frac{2}{x^2}$

c)  $f(x) = x^2 + 4$  ;  $g(x) = 7 \cdot x^2 + 1$

19) Encuentre  $f+g$ ,  $f-g$ ,  $f \cdot g$  y  $f/g$  si:

a)  $f(x) = x^2$  ;  $g(x) = 4x^3$

b)  $f(x) = x(x^2 - 9)$  ;  $g(x) = x^2(x + 3)$

20) Si  $f(x) = \frac{x}{x-1}$  obtenga:

a)  $f\left(\frac{1}{x}\right)$     b)  $f(-x)$     c)  $f(f(x))$     d)  $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$

21) Sea  $f(x) = ax + b$  ;  $g(x) = cx + d$  ¿Qué condición deben satisfacer  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  para que  $f \circ g \neq g \circ f$ ?



22) Si  $f(x) = a + bx$ . Obtenga  $f^n(x)$  donde:

$f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ , n veces



## SUMAS Y PRODUCTOS

Sean  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . La expresión:

$a_1 + a_2 + \dots + a_n$  se puede expresar mediante la notación abreviada:

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

Es decir:  $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

que se lee: "suma o sumatoria de los  $a_k$  desde  $k=1$  hasta  $k=n$ "

Observación:

- 1) La letra  $k$  se llama "índice mudo"
- 2) El elemento  $a_k$  se llama "término genérico"

Ejemplos:

$$1) \quad \sum_{j=1}^m x_j = x_1 + x_2 + \dots + x_m$$

$$2) \quad \sum_{k=3}^8 k = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$$

$$3) \quad \sum_{i=1}^3 f(i) = f(1) + f(2) + f(3)$$

$$4) \quad \sum_{k=0}^1 a_k = a_0 + a_1$$



Observación:

$$1) \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1}$$

$$2) \quad \sum_{k=1}^{n+1} f(k) = \sum_{k=1}^n f(k) + f(n+1)$$

Propiedades de la sumatoria

$$1) \quad \sum_{k=1}^n c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^n a_k$$

Demostración:

$$\sum_{k=1}^n c \cdot a_k = c a_1 + c a_2 + \dots + c a_n$$

$$\% = c (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

$$\% = c \sum_{k=1}^n a_k$$

$$2) \quad \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^r a_k + \sum_{k=r+1}^n a_k; \quad 1 < r < n$$

Demostración:

$$\sum_{k=1}^n a_k = (a_1 + a_2 + \dots + a_r) + (a_{r+1} + \dots + a_n)$$

$$\% = \sum_{k=1}^r a_k + \sum_{k=r+1}^n a_k$$



$$3) \quad \sum_{k=1}^n C = nC$$

Demostración

$$\sum_{k=1}^n C = \underbrace{C + C + \dots + C}_{n \text{ veces}} = nC$$

Observación:

Observe que:  $\sum_{k=1}^n 1 = n$

$$4) \quad \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

Demostración:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n)$$

$$\% = (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n)$$

$$\% = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$5) \quad \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 \quad (\text{Prop. Telescópica})$$



Demostración:

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1})$$

$$\% = a_n - a_0$$

Observación:

$$\sum_{k=1}^n (a_{k-1} - a_k) = a_0 - a_n$$

Ejemplos:

1) Calcular: 1)  $\sum_{k=1}^4 (4k-1)$  Resp: 36

2)  $\sum_{i=0}^5 (2i+1)$  Resp: 36

3)  $\sum_{k=1}^5 \frac{1}{k(k+1)}$  Resp: 5/6

2) Usando las propiedades de sumatoria demostrar que

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

Demostración:

Hágamos:  $k^2 - (k-1)^2 = k^2 - (k^2 - 2k + 1)$

$$\% = k^2 - k^2 + 2k - 1$$



$$\% \quad = 2k-1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n (2k-1) = \sum_{k=1}^n (k^2 - (k-1)^2)$$

$$\% \quad = n^2 - 0^2$$

$$\% \quad = n^2$$

3) Demuestre que  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Demostración:

Hagamos  $k = (2k-1) - (k-1)$

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n (2k-1) - \sum_{k=1}^n (k-1)$$

$$\% \quad = n^2 - \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

$$\% \quad \sum_{k=1}^n k = n^2 + n$$

$$\% \quad \sum_{k=1}^n k = n(n+1) \implies \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$



Otras sumas importantes:

$$1) \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

--- Demostración:

$$1) \quad 2 \sum_{k=1}^n k = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$\% = (1 + 2 + \dots + n) + (1 + 2 + \dots + n)$$

$$\% = (n + (n+1) + \dots + 1) + (1 + 2 + \dots + n)$$

$$\% = (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1)$$

$$\% = n(n + 1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2) \quad \sum_{k=1}^n (1+k)^3 = \sum_{k=1}^n (1 + 3k^2 + 3k + k^3)$$

$$\% = \sum_{k=1}^n 1 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k^3$$



$$\sum_{k=1}^n (1+k)^3 - \sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^n 1 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k$$

$$(1+n)^3 - 1^3 = n + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2}$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n = n + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{3(n)(n+1)}{2}$$

$$\therefore 3 \sum_{k=1}^n k^2 = n^3 + 3n^2 + 2n - \frac{3}{2}n(n+1)$$

$$\% = n^3 + 3n^2 + 2n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$$

$$\% = n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\% = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}$$

$$\% = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



## PRODUCTO

Sean  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . La expresión:

$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$  se puede expresar mediante la notación abreviada  $\prod_{k=1}^n a_k$  es decir:

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n \quad \text{que se lee "pro-"} \\ \text{ducto de los } a_k \text{ desde } k=1 \text{ hasta } k=n"$$

Ejemplos:

$$1) \quad \prod_{j=1}^5 j = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$2) \quad \prod_{i=1}^3 a_{ij} = a_{1j} \cdot a_{2j} \cdot a_{3j}$$

$$3) \quad \prod_{j=3}^6 \frac{j+5}{2j} = \frac{3+5}{6} \cdot \frac{4+5}{8} \cdot \frac{5+5}{10} \cdot \frac{6+5}{12} \\ \% = \frac{\cancel{8}}{6} \cdot \frac{9}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{10}}{\cancel{10}} \cdot \frac{11}{12} = \frac{11}{8}$$

$$4) \quad \prod_{i=1}^3 (i+j) = (1+j)(2+j)(3+j)$$

Propiedades del producto:

$$1) \quad \prod_{k=1}^n a_k b_k = \prod_{k=1}^n a_k \cdot \prod_{k=1}^n b_k$$



Demostración:

$$\prod_{k=1}^n a_k b_k = (a_1 b_1)(a_2 b_2) \dots (a_n b_n)$$

$$\% = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n) (b_1 \cdot b_2 \dots b_n)$$

$$\% = \prod_{k=1}^n a_k \cdot \prod_{k=1}^n b_k$$

$$2) \prod_{k=1}^n c = c^n$$

Demostración:

$$\prod_{k=1}^n c = \underbrace{c \cdot c \cdot c \dots c}_{n \text{ veces}} = c^n$$

$$3) \prod_{k=1}^n c a_k = c^n \prod_{k=1}^n a_k$$

Demostración:

$$\prod_{k=1}^n c a_k = (c a_1)(c a_2)(c a_3) \dots (c a_n)$$

$$\% = c^n (a_1 \cdot a_2 \dots a_n)$$

$$\% = c^n \prod_{k=1}^n a_k$$

$$4) \prod_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=1}^n a_k}{\prod_{k=1}^n b_k} \quad b_k \neq 0; \forall k \in \mathbb{N}$$



Demostración:

$$\prod_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} = \left(\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \left(\frac{a_2}{b_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

$$\% = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n}$$

$$\% = \frac{\prod_{k=1}^n a_k}{\prod_{k=1}^n b_k}$$

5) Propiedad telescópica:

$$a) \quad \prod_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0}$$

$$b) \quad \prod_{k=1}^n \frac{a_{k-1}}{a_k} = \frac{a_0}{a_n}$$

Demostración:

$$a) \quad \prod_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{\cancel{a_1}}{a_0} \cdot \frac{\cancel{a_2}}{\cancel{a_1}} \cdot \frac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_2}} \cdot \dots \cdot \frac{\cancel{a_n}}{\cancel{a_{n-1}}} \cdot \frac{a_n}{\cancel{a_{n-1}}}$$

$$\% = \frac{a_n}{a_0}$$

b) Se demuestra en forma análoga a (a)



## PROGRESIONES

## Definición (Progresión aritmética)

Se dice que los números reales  $a_1, a_2, \dots$  están en "progresión aritmética" (P.A) si existe  $d \in \mathbb{R}$  llamado diferencia de la progresión tal que:  $a_k - a_{k-1} = d ; \forall k$

Ejemplo:

2, 4, 6, 8, ..... están en P.A.

Teorema:

Si  $a_1, a_2, \dots, a_n$  están en P.A, entonces:

$$1) \quad a_n = a_1 + (n - 1) d$$

$$2) \quad S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

Donde:  $a_n$  : término de orden  $n$

$a_1$  : primer término

$n$  : número de términos

$d$  : diferencia de la P.A

$S_n$  : suma de los  $n$  primeros términos de la P.A.

Demostración:

1) Si se tiene la progresión aritmética:

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$



entonces esta P.A se puede escribir:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots, a_1 + (n-1)d$$

Luego el término de orden  $n$  de una P.A está dado por

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$2) \quad S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + \dots + (a_1 + d) + a_1$$

$$2S_n = (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + \dots + 2a_1 + (n-1)d$$

$$2S_n = n[2a_1 + (n-1)d]$$

$$2S_n = n[a_1 + a_n]$$

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

Ejemplos:

- 1) Los números 7, 10, 13, 16, 19 son los cinco primeros números de una P.A.

Determinar:  $a_1, a_5, a_{15}, d$



Solución:

$$a_1 = 7, a_5 = 19, d = 3$$

$$a_{15} = a_1 + 14d = 7 + 14 \cdot 3$$

$$a_{15} = 7 + 42 = 49$$

2) En una P.A  $a_4 = 24$  y  $a_8 = 36$ . Determinar  $a_1$ ,  $a_{12}$ ,  $S_{12}$ .

Solución:

$$a_4 = 24 = a_1 + 3d$$

$$a_8 = 36 = a_1 + 7d$$

$$4d = 12 \implies d = 3$$

$$\therefore a_1 = 24 - 3d = 24 - 9 = 15$$

$$\therefore a_{12} = a_1 + 11d = 15 + 11 \cdot 3$$

$$\therefore a_{12} = 15 + 33 = 48$$

$$S_{12} = \frac{12}{2} [15 + 48]$$

$$S_{12} = 6 [63]$$

$$S_{12} = 378$$



## Definición (Medio aritmético)

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ .  $A \in \mathbb{R}$  se llama "medio aritmético entre  $a$  y  $b$ " si  $a, A, b$ , están en P.A

## Teorema

Sea  $A$  el medio aritmético entre  $a$  y  $b$  entonces

$$A = \frac{a + b}{2}$$

## Demostración:

Como  $a, A, b$  están en P.A entonces:

$$d = A - a = b - A, \quad \text{luego:}$$

$$2A = a + b$$

$$A = \frac{a + b}{2}$$

## Ejercicio:

Determine el valor de  $k$ , de modo que:

$8k+4, 6k-2, 2k-7$  estén en P.A

## Solución:

$$6k-2 - 8k-4 = d$$

$$2k-7 - 6k+2 = d$$

$$-2k-6 = -4k-5$$

$$2k = + 1$$

$$k = + \frac{1}{2}$$



## Definición (Progresión geométrica)

Se dice que los números reales:

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

están en "progresión geométrica" (PG) si existe  $r \in \mathbb{R}$  llamado razón de la progresión tal que:

$$r = \frac{a_k}{a_{k-1}} \quad \forall k$$

Ejemplos:

- 1)  $2, 2^2, 2^3, \dots$  están en PG
- 2)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$  están en PG

Teorema:

Si  $a_1, a_2, \dots, a_n$  están en PG entonces:

- 1)  $a_n = a_1 r^{n-1}$
- 2)  $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$  ;  $r \neq 1$

donde:

$a_n$  : término de orden  $n$

$a_1$  : primer término

$n$  : número de términos

$r$  : razón de la PG



Demostración:

1) Si se tiene la progresión geométrica:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

entonces esta PG se puede escribir:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, \dots, a_1 r^{n-1}$$

Luego el término de orden n es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$2) \quad S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1}$$

$$r S_n = a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$$

$$S_n - r S_n = a_1 - a_1 r^n$$

$$\therefore (1-r) S_n = a_1 - a_1 r^n$$

$$S_n = \frac{a_1 (1-r^n)}{1-r}$$

Ejemplos:

1) Los 5 primeros términos de una PG son: 1, 2, 4, 8, 16.  
Determinar  $a_1$ ,  $r$ ,  $a_{10}$

Solución:

$$a_1 = 1; \quad r = 2; \quad a_{10} = 1 \cdot 2^9 = 2^9 = 512$$



2) En una PG  $a_1 = 3$ ,  $r = 2$ ,  $a_n = 768$

Determinar  $n$  y  $S_n$

Solución:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$\therefore 768 = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore 768 \cdot 2 = 3 \cdot 2^n$$

$$\therefore 2^n = \frac{768 \cdot 2}{3}$$

$$2^n = 2^9 \implies n = 9$$

$$S_9 = \frac{3(1-2^9)}{1-2} = \frac{3(-511)}{-1} = 1533$$

Definición (Medio geométrico)

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ .  $G$  se llama "medio geométrico" entre  $a$  y  $b$  si  $a, G, b$  están en P.geométrica.

teorema:

Sea  $G$  el medio geométrico entre  $a$  y  $b$  entonces :

$$G = \sqrt{ab}$$

Demostración:

Como  $G$  es el medio geométrico entre  $a$  y  $b$ , entonces:

$a, G, b$  están en PG entonces:

$$a \cdot r = G \implies G = a \cdot r$$

$$G \cdot r = b \implies G = \frac{b}{r}$$



$$G^2 = a \cdot x \cdot \frac{b}{x} = ab \implies G = \sqrt{ab}$$

### Definición (Progresión armónica)

Se dice que los números reales distintos de cero:  $a_1, a_2, \dots$  están, en "progresión armónica" (P.H) si sus recíprocos están en P.A

Ejemplos:

1)  $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \dots$  están en P.H

2)  $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \dots$  están en P.H

teorema:

Tres números  $a, b, c$  están en P.H si:

$$\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$$

Demostración:

$$a(b-c) = c(a-b)$$

$$ab - ac = ac - bc \quad /: abc$$

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$

Luego:

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \text{ están en P.A}$$



Luego:  $a, b, c$  están en P.H

### Definición

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ .  $H$  se llama "medio armónico" entre  $a$  y  $b$  si  $a, H, b$  están en P.H

### Teorema:

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $H$  medio armónico entre  $a$  y  $b$  entonces:

$$H = \frac{2ab}{a+b}$$

### Demostración:

$a, H, b$  están en P.H  $\Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$  están en

$$P.A \implies \frac{1}{H} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{H} \implies \frac{2}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\implies \frac{2}{H} = \frac{a+b}{ab} \implies H = \frac{2ab}{a+b}$$

### Observación:

Sean  $a, b \in \mathbb{R}^+$  entonces:  $H < G < A$

### Ejemplo:

dados:  $\frac{1}{k-1}; \frac{1}{k+3}; \frac{1}{3k-1}$

- a) Encontrar el valor de  $k$  para que dichos números estén en P.H



b) Encontrar los términos de orden 5 y de orden 20.

Solución:

a)  $\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k+3}, \frac{1}{3k-1}$  están en P.H

entonces:  $k-1, k+3, 3k-1$ , están en P.A

Luego:  $k+3 - k+1 = 3k-1 - k-3$

$$4 = 2k-4$$

$$2k = 8$$

$$k = 4$$

Luego:

$\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}$  están en P.H

b)  $3, 7, 11, 15, 19$  están en P.A

Luego  $a_5 = \frac{1}{19}$

Además:  $x_{20} = x_1 + 19 \cdot d$

$$x_{20} = 3 + 19 \cdot 4 = 79$$

Luego:  $a_{20} = \frac{1}{79}$



## NUMEROS COMBINATORIOS

Definición (Factorial de un número)

Llamaremos "n factorial, denotada por  $n!$  al producto de enteros positivos siguiente:

$$\prod_{i=1}^n i = 1.2.3.4.5 \dots n = n! \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Ejemplo:

$$8! = 1.2.3.4. \dots 8$$

$$5! = 1.2.3.4.5$$

$$4! = 1.2.3.4$$

Observación:

$$n! = (n-1)!n$$

$$(n-1)! = (n-2)!(n-1)$$

$$(n+1)! = n!(n+1)$$

$$(n-k+1)! = (n-k)!(n-k+1)$$

Definición

$$1) \quad 1! = 1$$

$$2) \quad 0! = 1$$

Definición (Números combinatorios)

El número "combinatorio  $\binom{n}{k}$ " se lee "n sobre k" y se define como:



$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad ; \quad k \leq n; n, k \in \mathbb{Z}^+$$

Ejemplos:

$$1) \quad \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}2!} = 10$$

$$2) \quad \binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2! \cancel{3!}} = 10 \quad \wedge \cdot 2$$

$$3) \quad \binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}2!} = 15$$

Teorema:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Demostración:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

De ambas igualdades tenemos que:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Teorema:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots \dots \dots (n-k+1)}{k!}$$



Ejemplos:

$$1) \quad \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$$

$$2) \quad \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$$

$$3) \quad \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$$

teorema:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

teorema:

$$\binom{n}{1} = n ; \quad \binom{n}{0} = 1 ; \quad \binom{n}{n} = 1$$

## TEOREMA DEL BINOMIO

teorema:

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  ;  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Entonces:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots +$$

$$\binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1} + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$\text{Es decir: } (a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



En el desarrollo de  $(a+b)^n$  el término de lugar  $k$ , en símbolos  $\mu_k$  está dado por:

$$\mu_k = \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}$$

Ejemplos:

- 1) Escribir el 4o. término de :  $(a-5)^{13}$

Solución:

$$\mu_4 = \binom{13}{3} a^{10} (-5)^3$$

$$\mu_4 = - \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{10} \cdot 125 = -35.750 a^{10}$$

- 2) Determinar el término en  $x^{26}$  del desarrollo de:

$$(x^3 - 2x)^{10}$$

Solución:

$$\mu_k = \binom{n}{k-1} (x^3)^{n-k+1} (-2x)^{k-1}$$

$$\mu_k = \binom{n}{k-1} x^{3n-3k+3} x^{k-1} (-2)^{k-1}$$

$$\mu_k = \binom{10}{k-1} x^{30-3k+3} x^{k-1} (-2)^{k-1}$$

$$\mu_k = \binom{10}{k-1} x^{32-2k} (-2)^{k-1}$$



Luego:

$$x^{26} = x^{32-2k} \implies 26 = 32-2k$$

$$\implies 2k = 6$$

$$\implies \boxed{k = 3}$$

$$\therefore \mu_3 = \binom{10}{2} x^{26} (-2)^2$$

$$\mu_3 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} x^{26} \cdot 4 = 180 x^{26}$$

- 3) Hallar el término independiente de X en el desarrollo de:  $(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{3} x)^9$

Solución:

$$\mu_k = \binom{9}{k-1} \left(\frac{3}{2} x^2\right)^{9-k+1} \left(-\frac{1}{3} x\right)^{k-1}$$

$$\mu_k = \binom{9}{k-1} \left(\frac{3}{2} x^2\right)^{10-k} \left(-\frac{1}{3x}\right)^{k-1}$$

$$\mu_k = \binom{9}{k-1} \left(\frac{3}{2}\right)^{10-k} (x^2)^{10-k} (-1)^{k-1} (3x)^{1-k}$$

$$\mu_k = \binom{9}{k-1} \left(\frac{3}{2}\right)^{10-k} x^{20-2k} (-1)^{k-1} 3^{1-k} x^{1-k}$$

$$\mu_k = \binom{9}{k-1} \left(\frac{3}{2}\right)^{10-k} (-1)^{k-1} 3^{1-k} x^{21-3k}$$

$$\therefore 21 - 3k = 0 \implies 21 = 3k \implies \boxed{k = 7}$$

$$\therefore \mu_7 = \binom{9}{6} \left(\frac{3}{2}\right)^3 (-1)^6 3^{-6} \cdot x^0$$



$$\mu_7 = \binom{9}{3} \frac{x^3}{2^3} \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{9 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{9 \cdot 7 \cdot 8}{6^4} = \frac{7}{18}$$

4) Hallar el término central de :  $(1 - \frac{x^2}{2})^{14}$

Solución:

$$\mu_8 = \binom{14}{7} 1^7 \left(-\frac{x^2}{2}\right)^7$$

$$\mu_8 = \binom{14}{7} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^7 = - \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{x^{14}}{2^7}$$

$$\mu_8 = - \frac{429}{16} x^{14}$$

5) Hallar los términos centrales de  $(3a - \frac{a^3}{6})^9$

Solución:

$$\mu_5 = \binom{9}{4} (3a)^5 \left(-\frac{a^3}{6}\right)^4 = \frac{189}{8} a^{17}$$

$$\mu_6 = \binom{9}{5} (3a)^4 \left(-\frac{a^3}{6}\right)^5 = - \frac{21}{16} a^{19}$$

La fórmula para  $(a + b)^n$ ;  $\forall n \in \mathbb{Z}$  es también válida  $\forall n \in \mathbb{Q}$ , con la diferencia de que cuando  $n$  es racional, la suma de términos no es finita.

$$(a+b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{(n)(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k$$



Como  $k \in \mathbb{Z}^+$  y  $n \in \mathbb{Z}^-$  entonces  $n-k$  no será nunca cero y los términos se continuarán indefinidamente.

Como  $k \in \mathbb{Z}^+$  y  $n \in \mathbb{Q}$  entonces  $n-k$  tampoco será nunca cero.

Ahora bien, esta suma tendrá límite sólo en el caso en que  $a=1$  y  $|b| < 1$ ;  $b \in \mathbb{R}$ . Luego:

$$\therefore (1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2!} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} b^3 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} b^k + \dots$$

Ejemplos:

$$1) \quad \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ m } |x| < 1$$

$$2) \quad (1-x)^{-2} = 1 + (-2)(-x) + \frac{(-2)(-2-1)}{2!}(-x)^2 + \dots$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ m } |x| < 1$$

$$3) \quad (2+3x)^{-4} = \left[2\left(1+\frac{3}{2}x\right)\right]^{-4} = 2^{-4} \left(1+\frac{3}{2}x\right)^{-4}$$

$$= 2^{-4} \left[1 + (-4)\frac{3}{2}x + \frac{(-4)(-5)}{2!}\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{24} \left[1 - 6x + \frac{45}{2}x^2 + \dots\right] \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ m } \left|\frac{3}{2}x\right| < 1$$

$$4) \quad \text{Encontrar: } \sqrt[3]{1,03} = \sqrt[3]{1+0.03} = (1+0.03)^{+1/3} =$$



$$= 1 + \frac{1}{3} (0.03) + \frac{\frac{1}{2} (\frac{1}{3} - 1)}{2!} 0.03^2 + \dots = 1 + 0.01 - \frac{1}{9} (0.0009) + \dots = 1 + 0.01 - 0.0001 + \dots$$

5) Encontrar:

$$\begin{aligned} \sqrt{26} &= (26)^{1/2} = (1+25)^{1/2} = \left[ 25 \left( 1 + \frac{1}{25} \right) \right]^{1/2} \\ &= 25^{1/2} \left[ 1 + \frac{1}{25} \right]^{1/2} = 5 \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{25} + \frac{\frac{1}{2} (\frac{1}{2} - 1)}{2!} \left( \frac{1}{25} \right)^2 + \frac{\frac{1}{2} (\frac{1}{2} - 1) (\frac{1}{2} - 2)}{3!} \left( \frac{1}{25} \right)^3 + \dots \right] \\ &= 5 + 0.1 - 0.001 + 0.00004 \approx 5.09994 \end{aligned}$$



## EJERCICIOS

1) Calcular:

a) 
$$\sum_{k=1}^5 \frac{5k-10}{2}$$

b) 
$$\sum_{k=0}^5 \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2}$$

c) 
$$\sum_{i=1}^{30} 7$$

d) 
$$\sum_{i=1}^{n-1} i^3$$

e) La suma de los enteros impares entre 2 y 50

f) 
$$\sum_{k=1}^6 \frac{(-1)^k + 1}{2}$$

g) 
$$\sum_{i=1}^n (2i)^2$$

g') 
$$\sum_{i=6}^{52} (2i + 3)$$

h) La suma de los n primeros términos de la serie:

$$1 \cdot 1 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 + \dots$$

2) Encontrar el término n-ésimo de las siguientes sucesiones:

a)  $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$

b)  $\{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$

c)  $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$

d)  $\{1, 8, 27, 64, \dots\}$

e)  $\left\{0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \dots\right\}$  Resp.  $\frac{(-1)^k + 1}{k}$

f)  $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right\}$

g)  $\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{6}, \frac{5}{8}, \frac{7}{10}, \frac{9}{12}, \dots\right\}$

3) Usando el símbolo  $\Pi$  anote los productos siguientes:

a)  $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$



b)  $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10$

c)  $1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \dots n^2$

4) Resuelva los siguientes productos:

a)  $\prod_{i=2}^8 (1 - \frac{1}{i})$  Resp:  $\frac{1}{8}$

d)  $\prod_{i=2}^n \frac{i^3}{(i-1)^3}$  Resp:  $n^3$

b)  $\prod_{i=1}^n \frac{3^i}{3^{i-1}}$  Resp:  $3^n$

e)  $\prod_{i=3}^{25} (\frac{4}{i+1} + \frac{i-4}{i+1})$  Resp:  $\frac{3}{26}$

c)  $\prod_{i=8}^{25} (\frac{i-1}{i})$  Resp:  $\frac{7}{25}$

f)  $\prod_{k=3}^7 C$  Resp.:  $C^5$

5) Demostrar que:

$$\prod_{k=1}^n (1 + x^{2^{k-1}}) = \frac{1 - x^{2^n}}{1 - x}$$

6) Calcular el valor de:

$$\sum_{i=1}^n (i^2 + 5)(i - 1)$$

7) Demostrar que:

$$\sum_{i=1}^n (3i - 2) = \frac{1}{2} n (3n - 1)$$



8) Hallar el valor de:

$$a) \prod_{i=1}^n \left( \frac{i}{2i+1} + \frac{i-1}{2i+1} \right)$$

$$b) \prod_{k=2}^{2n+1} \left( 1 - \frac{2k-1}{k^2} \right)$$

9) El tercer término de una P.A es 7 y el 8º término es 17. Encuentre:

a) La diferencia Resp: 2

b) El 1º término Resp: 3

c) El término de orden 20 Resp: 41

10) En una P.G : 18, -12, 8, ..... ¿Qué lugar ocupa 512/729  
Resp: n = 9

11) Interpolar cuatro medios aritméticos entre -1 y 14.  
Resp.: -1, 2, 5, 8, 11, 14.

12) Interpolar 3 medios geométricos entre 27/8 y 2/3

13) Interpolar X ∈ ℕ medios aritméticos entre X² y 1.  
Resp: d = 1 - X

14) La suma de 5 números en P.A es 40 y la suma de sus cuadrados es 410. Encontrar los números. Resp: 2, 5, 8, 11, 14

15) Hallar tres números en P.G cuya suma sea 19 y cuyo producto sea 216. Resp.: 4, 6, 9



16) Si  $a, b, c$  son términos que están en P.A, demostrar que la ecuación  $aX^2 + 2bX + C = 0$  admite como raíz a  $(-1)$ .

17) En una P.G  $S_6$  es igual a 9 veces  $S_3$ . Hallar  $r$ .  
Resp:  $r = 2$

18) Dados:  $\frac{1}{k-1}$  ;  $\frac{1}{k+3}$  ;  $\frac{1}{3k-1}$

a) Encontrar el valor de  $k$  para que la presión sea una P.H

b) Encontrar los términos  $X_5$  y  $X_{20}$

Resp: a)  $k = 4 \implies \frac{1}{3}$  ,  $\frac{1}{7}$  ,  $\frac{1}{11}$  están en P.H

.. b)  $X_5 = \frac{1}{19}$  ;  $X_{20} = \frac{1}{79}$

19) En una P.G de  $n$  términos se tiene que el primero es 7, el último es 448 y su suma es 889. Obtenga la razón y el número de términos.

20) Determine tres números en P.G tales que su suma sea 119 y su producto sea 39.304

21) Calcular el valor de  $n$  en:

$$\frac{(3n + 1)!}{(3n - 2)!} = 105 n \quad \text{Sol: } n=2$$

22) Calcular el valor de  $n$  es:

$$\binom{2n}{3} : \binom{n}{2} = \frac{44}{3} \quad \text{Sol: } n=6$$



23) Calcular el valor de  $n$  en:

$$a) \binom{n+1}{3} = 2 \binom{n}{2} \quad b) \binom{n+2}{4} = 6 \binom{n}{2}$$

24) Calcular el valor de  $n$  en:

$$\binom{n}{4} : \binom{n+1}{3} = 5:6$$

25) Demostrar que:

$$r \binom{n}{r} = n \binom{n-1}{r-1}$$

26) Hallar el 9º término de  $(2 + \frac{x}{4})^{15}$

27) Hallar el término en  $x^7$  de  $(2x - 3)^{10}$

28) Hallar el término en  $\frac{x^2}{y^2}$  de  $(\frac{x}{y} - \frac{y^2}{2x^2})^8$

29) Hallar el término central de  $(2 + \frac{3}{x})^{10}$

30) Encontrar el valor de  $n$  para que los terceros términos de los desarrollos de:

$$(x^2 + \frac{1}{x})^n \quad (x^3 + \frac{1}{x^2})^n \quad \text{sean iguales}$$

31) Demostrar que:

$$i) \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$$ii) \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$



## MATRICES Y DETERMINANTES

## Definición:

Una "matriz" es un arreglo rectangular de números. La forma usual de presentar una matriz de  $r$  filas y  $c$  columnas es:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots & m_{1c} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \dots & m_{2c} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \dots & m_{3c} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{r1} & m_{r2} & m_{r3} & \dots & m_{rc} \end{bmatrix}$$

Diremos que la matriz  $M$  es de orden  $r$  por  $c$  ( $rx c$ ), si el número de filas es  $r$ , y el número de columnas es  $c$ .

Un elemento genérico de la matriz  $M$  lo denotaremos por  $m_{ij}$ , así,  $m_{ij}$  es el elemento que ocupa la posición  $ij$  (donde  $i$  indica la fila y  $j$  la columna) dentro del arreglo. Con esto, la matriz  $M$  la podemos escribir como:

$$M = (m_{ij}) \begin{matrix} 1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq c \end{matrix}$$

## Definición:

Sean  $M_1 = (m_{ij})$  y  $M_2 = (m'_{ij})$  dos matrices de orden  $rx c$ . Diremos que:

$$M_1 = M_2 \iff m_{ij} = m'_{ij} \quad \begin{matrix} \forall i \in \{1, 2, \dots, r\} \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, c\} \end{matrix}$$



Ej. 1: La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0.5 & 7 \end{bmatrix}$$

es de orden  $2 \times 3$ , tiene dos filas y tres columnas. El elemento  $a_{13} = \sqrt{2}$ . 0 es el elemento que ocupa la posición 21, e.d.  $a_{21} = 0$ .

Definición:

La matriz  $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq c}}$  se dirá una "matriz cuadrada" si  $r = c$  (e.d. si el número de filas es igual al número de columnas) y en tal caso diremos que es una matriz de orden  $r$ .

Ej. 2: La matriz D,

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

es una matriz cuadrada de orden 3.

Ej. 3: La matriz R,

$$R = \left[ \frac{7}{2} \quad 5 \quad 0 \quad 6 \right]$$

es una matriz de 1 por 4, generalmente llamada vector fila.

Ej. 4: La matriz C,



$$C = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

es una matriz de  $3 \times 1$ , generalmente llamada vector columna.

### Definición:

Sea  $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  una matriz cuadrada de orden  $n$ .

A los elementos  $m_{11}, m_{22}, m_{33}, \dots, m_{nn}$  de la matriz  $M$  se les llama "elementos diagonales". Una matriz cuadrada  $D$  se llama una "matriz diagonal", si todos sus elementos no diagonales son iguales a cero. Es decir  $D = (d_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ , es una matriz diagonal si  $d_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$ . La matriz  $D$  se denota por

$$D = D_g [d_{11} \quad d_{22} \quad d_{33} \quad \dots \quad d_{nn}]$$

Si  $d_{ii} = 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces  $D$  se denota por  $I_n$  y se le llama "matriz idéntica" de orden  $n$ .

La matriz del ejemplo 2 es una matriz diagonal de orden 3.

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = D_g [4 \quad 7 \quad -1]$$

### Definición:

Sea  $M = (m_{ij})$  una matriz cuadrada de orden  $n$ .

Diremos que  $M$  es una "matriz triangular superior", si sus elementos bajo la diagonal son todos nulos, e.d., si



$$m_{ij} = 0 \quad \text{para } i > j.$$

M se dice una "matriz triangular inferior", si sus elementos sobre la diagonal son todos nulos, e.d., si  $m_{ij} = 0$  para  $i < j$ .

Ej. 5:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es una matriz triangular inferior de orden 3.

$$U = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

es una matriz triangular superior de orden 3.

#### Definición:

Una "submatriz" de una matriz M, es una matriz que se obtiene de M eliminando ciertas filas y/o columnas de M.

Son importantes las siguientes submatrices de la matriz M de orden  $r \times c$ .

a)  $Ren_i(M) = [m_{i1} \ m_{i2} \ m_{i3} \ \dots \ m_{ic}]$  i-ésima fila de M.

b)  $Col_j(M) = \begin{bmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \\ m_{rj} \end{bmatrix}$ , j-ésima columna de M



- c) La submatriz de orden  $(r-1)$  por  $(c-1)$  obtenida de  $M$ , al eliminar la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna de  $M$  se llama "el menor del elemento  $m_{ij}$ ", que denotaremos por  $Men_{ij}(M)$ .

Ej. 6:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$Ren_2(A) = [5 \quad 6 \quad 7 \quad 8]$$

$$Col_3(A) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Men_{22}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 9 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad Men_{34}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

### Operaciones Aritméticas con Matrices:

Definición:

Sean  $A = (a_{ij})$  y  $B = (b_{ij})$  dos matrices de orden  $m \times n$ , entonces la suma  $A+B = (s_{ij})$  es una matriz de orden  $m$  por  $n$ , tal que:

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$$



Ej. 7: Si

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & 7 \\ 10 & 9 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{entonces } A + B = \begin{bmatrix} 3 + 2 & -2 + 4 & 4 + 6 & 6 + 8 \\ 0 + 0 & -3 + 1 & -1 + 3 & 7 + 5 \\ 10 + 7 & 9 + 9 & 5 - 2 & 0 - 4 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 10 & 14 \\ 0 & -2 & 2 & 12 \\ 17 & 18 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Ej. 8: Si

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & -6 \\ -7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{entonces } M + S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema:

Sean A, B, C matrices de orden m x n. Entonces la suma de matrices tiene las siguientes propiedades:

- 1) Propiedad Conmutativa:  $A+B = B+A$
- 2) Propiedad Asociativa:  $(A+B)+C = A+(B+C)$
- 3) Propiedad del Elemento idéntico para la adición de matrices: existe una matriz única Z tal que

UNIVERSIDAD DE A.  
B.  
C.  
BIBLIOTECA CENTRAL  
INVENTARIO



$A+Z = Z+A = A$  , para toda matriz  $A$ .

- 4) Existencia de elemento inverso aditivo; para cada matriz  $A$  existe una única matriz  $-A$  , tal que  $A+(-A)=Z$ .
- 5) Propiedad Cancelativa: Si  $A+B=A+C$  , entonces  $B=C$ .

Observación:

- 1) El elemento  $Z = (Z_{ij})$  postulado en (3), es tal que  $Z_{ij}=0 \forall i,j$  y se llama "matriz nula", denotada por  $\theta$ .
- 2) El elemento  $-A$  postulado en (4), es tal que  $-A=(-a_{ij})$ .

Definición:

Sea  $b \in \mathbb{R}$  y  $A=(a_{ij})$  una matriz de orden  $m \times n$ .

La matriz  $bA = (\alpha_{ij})$  es de orden  $m \times n$  y es tal que  $\alpha_{ij} = b a_{ij} \forall i,j$ .

Teorema:

Sean  $A$  y  $B$  matrices de orden  $m \times n$ , y sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos números reales. Entonces:

- 1)  $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$
- 2)  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- 3)  $\alpha(\beta A) = (\alpha \beta) A = \beta(\alpha A)$
- 4)  $1 A = A$
- 5)  $0 A = \theta$



Ej. 9: Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 8 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{entonces}$$

$$\begin{aligned} 2A - 3B &= 2A + (-(3B)) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 8 & 0 & 10 \end{bmatrix} + \left( - \begin{bmatrix} 12 & -21 & 9 \\ 24 & 21 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 8 & 0 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 21 & -9 \\ -24 & -21 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -10 & 25 & -15 \\ -16 & -21 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Definición:

Sea  $R = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_m]$  una matriz  $1 \times m$  y
$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad \text{una matriz de } m \times 1$$
Definimos el producto  $RC$  como el número

$$RC = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_m] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$



$$= r_1 c_1 + r_2 c_2 + \dots + r_m c_m$$

$$= \sum_{i=1}^m r_i c_i$$

Definición:

Sea  $A = (a_{ij})$  una matriz de orden  $m$  por  $n$ , y sea  $B = (b_{ij})$  una matriz de orden  $n$  por  $p$ . El "producto"  $AB = (p_{ij})$  se define como la matriz de orden  $m \times p$  tal que:

$$p_{ij} = \text{Ren}_i (A) \text{Col}_j(B)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

$$= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Ej. 10: Dadas

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 6 & -4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$



Calcular AB y BA.

$$AB = \begin{bmatrix} \text{Ren}_1(A) \text{ Col}_1(B) & \text{Ren}_1(A) \text{ Col}_2(B) \\ \text{Ren}_2(A) \text{ Col}_1(B) & \text{Ren}_2(A) \text{ Col}_2(B) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -14 & 4 \\ 0 & -24 \end{bmatrix}$$

Similarmente:

$$BA = \begin{bmatrix} \text{Ren}_1(B) \text{ Col}_1(A) & \text{Ren}_1(B) \text{ Col}_2(A) & \text{Ren}_1(B) \text{ Col}_3(A) \\ \text{Ren}_2(B) \text{ Col}_1(A) & \text{Ren}_2(B) \text{ Col}_2(A) & \text{Ren}_2(B) \text{ Col}_3(A) \\ \text{Ren}_3(B) \text{ Col}_1(A) & \text{Ren}_3(B) \text{ Col}_2(A) & \text{Ren}_3(B) \text{ Col}_3(A) \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 0 \\ -4 & -18 & 8 \\ 26 & 17 & -12 \end{bmatrix}$$



Observar que  $AB \neq BA$

Ej. 11: Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix}$$

y

$$BA = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix}$$

En este caso  $AB = BA$

Ej. 12: Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 28 \\ -7 & -14 \end{bmatrix}$$

En este caso  $AB \neq BA$



Observación:

La multiplicación de matrices no es conmutativa.

## Teorema:

Propiedad Asociativa: Si A, B y C son matrices tales que los productos AB y BC están definidos, entonces  $A(BC) = (AB)C$ .

## Teorema:

Propiedad Distributiva: Si A, B y C son matrices tales que A+B y AC están definidos, entonces:

$$(A+B)C = AC+BC$$

Si A+B y CA están definidos, entonces:

$$C(A+B) = CA+CB$$

## Definición:

Si A es una matriz cuadrada y B satisface  $AB=BA=I$ , entonces B es el inverso multiplicativo de A. Si A tiene inverso multiplicativo, entonces diremos que A es "no singular", o "invertible". Si A no tiene inverso multiplicativo, entonces A se dice "singular", o "no invertible".

Ej. 13: La matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  <sup>2x2</sup> tiene a

$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  como inverso multiplicativo



Ej. 14: El inverso multiplicativo de:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

es

$$U = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 8 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Ej. 15: La matriz

$$P = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

tiene como inverso multiplicativo a ella misma,  $P^2 = I$ .

Observación:

Si  $A$  es no singular, entonces su inverso multiplicativo es único. En efecto: Si  $B$  y  $C$  son inversos multiplicativos de  $A$  entonces:

$$AB = BA = I \quad \text{y} \quad AC = CA = I$$

podemos escribir:

$$C(AB) = CI = C, \quad \text{y por propiedad asociativa,}$$

$$C = C \cdot I = C(AB) = (CA)B = IB = B$$



## Definición:

Al único inverso multiplicativo de una matriz no singular  $A$  se le denota por  $A^{-1}$  y se le llama inversa de  $A$ .

## Teorema:

El inverso multiplicativo satisface las siguientes propiedades:

- 1) Si  $A^{-1}$  existe, entonces  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- 2) Si  $\alpha \neq 0$  y  $A^{-1}$  existe, entonces  $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$ .
- 3) Si  $A^{-1}$  y  $B^{-1}$  existen, entonces  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

## Definición:

Si  $A = (a_{ij})$  es una matriz  $m$  por  $n$ , definimos la "traspuesta" de  $A$ , que denotamos por  $A^t = (\alpha_{ij})$  de orden  $n$  por  $m$ , por

$$\alpha_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$$

La matriz  $A^t$  se obtiene de la matriz  $A$  mediante intercambio de filas por columnas.

Ej. 16:

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} \text{ entonces } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Ej. 17: Para la matriz columna

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C^t = [1 \quad -2 \quad 3 \quad 0]$$



## Teorema:

La traspuesta de una matriz satisface las siguientes propiedades:

- 1)  $(A^t)^t = A$  para toda matriz  $A$
- 2)  $(A+B)^t = A^t + B^t$  si  $A+B$  está definida
- 3)  $(aB)^t = aB^t$  para cada  $a \in \mathbb{R}$ , cualquiera sea  $B$
- 4)  $(AB)^t = B^t A^t$  si el producto  $AB$  está definido.

## Equivalencia por filas y Operaciones Elementales entre filas:

Se dice que una matriz  $A$  es "equivalente por filas" a una matriz  $B$  si  $B$  se puede obtener de  $A$  por medio de una sucesión finita de las operaciones siguientes llamadas "operaciones elementales" entre filas:

$[E_1]$  : Intercambiar la fila  $i$ -ésima y la fila  $j$ -ésima:  
 $R_i \longleftrightarrow R_j$ .

$[E_2]$  : Multiplicar la fila  $i$ -ésima por un escalar  $K$  diferente de cero:  $R_i \longrightarrow KR_i$ ,  $K \neq 0$

$[E_3]$  : Reemplazar la fila  $i$ -ésima por  $K$  veces la fila  $j$ -ésima más la fila  $i$ -ésima:  $R_i \longrightarrow KR_j + R_i$

En la práctica aplicaremos  $[E_2]$  y luego  $[E_3]$  en un sólo paso, es decir, la operación:

$[E]$  : Reemplazar la fila  $i$ -ésima por  $K'$  veces la fila  $j$ -ésima más  $K$  (diferente de cero) veces la fila  $i$ -ésima:  
 $R_i \longrightarrow K' R_j + K R_i$ ,  $K \neq 0$

Observación:

Si  $A$  y  $B$  son equivalentes, escribiremos  $A \sim B$ .



Algoritmo para Reducir por filas una matriz a una matriz esca  
lonada:

Definición:

Una matriz  $A = (a_{ij})$  es una matriz "escalonada", o se dice que está en la forma escalonada, si el número de ceros anteriores a la primera componente distinta de cero de una fila crece fila a fila hasta llegar a filas en las que todas sus componentes sean iguales a cero; esto es, si existen componentes distintas de cero:

$$a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}, \text{ donde } j_1 < j_2 < \dots < j_r$$

con la propiedad de que  $a_{ij} = 0$  para  $i < r$ ,  $j < j_i$  y para  $i > r$ .

Llamamos  $a_{1j_1}, \dots, a_{rj_r}$  los elementos distinguidos de la matriz escalonada A.

Ej. 18:

Las matrices siguientes son escalonadas y los elementos distinguidos se han encerrado en un círculo.

$$\begin{bmatrix} \textcircled{2} & 3 & 2 & 0 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & \textcircled{7} & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{6} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Definición:**

- 1) Llamaremos "rango columna" de una matriz A, al número de columnas no nulas de A en su forma escalonada.
- 2) Llamaremos "rango fila" de una matriz A, al número de filas no nulas de A en su forma escalonada.
- 3) El rango fila es igual al rango columna. A este número lo llamaremos rango de A y lo denotaremos por  $\text{ran}(A)$ .

Propiedad: Si  $A \sim B$  entonces  $\text{ran}(A) = \text{ran}(B)$ .

**Algoritmo:**

Paso 1: Supongamos que  $j_1$  es la primera columna con una componente distinta de cero. Se intercambian las filas de tal manera que esta componente distinta de cero aparezca en la primera fila, esto es, tal que  $a_{1j_1} \neq 0$ .

Paso 2: Para cada  $i > 1$ , se aplica la operación

$$R_i \longrightarrow -a_{1j_1} R_1 + a_{1j_1} R_i$$

Se repiten los pasos 1 y 2 con la submatriz formada por todas las filas excluyendo la primera. Se continúa el proceso hasta que la matriz esté en la forma escalonada.



Ej. 19:

Reducir a la forma escalonada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow -5R_2 + 4R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = B$$

Se tiene así que  $A \sim B$ . Luego  $\text{ran}(A) = \text{ran}(B)$ , pero  $\text{ran}(B) = 3$ , por lo tanto  $\text{ran}(A) = 3$ .

Ej. 20:

Reducir a la forma escalonada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 11 \end{bmatrix}$$



$$A \xrightarrow{-\frac{3}{2}R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & 7 \end{bmatrix}$$

$$-R_1 + R_3$$

$$-2R_1 + R_4$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} 3R_3 + R_4 \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \end{array}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} 2R_3 \\ \frac{1}{5}R_4 \end{array}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_3 + R_4} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = B$$

Se tiene  $A \sim B$ ,  $\text{ran}(A) = \text{ran}(B) = 4$

Funciones escalares sobre Matrices. Traza y Determinantes:

Definición:

Para cada matriz  $A = (a_{ij})$  de orden  $n$ , definimos la



"traza de A" (que denotamos por  $\text{tr}(A)$ ) por:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Ej. 21:

Dada  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$  calcular  $\text{tr}(A)$ .

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^3 a_{ii} = 1 + 5 + 9 = 15$$

**Teorema:**

Si A y B son matrices cuadradas de orden n y  $\alpha$  y  $\beta$  escalares, entonces:

- 1)  $\text{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{tr}(A) + \beta \text{tr}(B)$
- 2)  $\text{tr}(A^t) = \text{tr}(A)$
- 3)  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

**Definición:**

Si una matriz está formada por sólo un elemento, entonces el determinante de dicha matriz, es el elemento. Si A es una matriz de orden n,  $n \geq 2$ , definimos el "determinante de A" por:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{1k} \text{cof}_{1k}(A)$$

$$= a_{11} \text{cof}_{11}(A) + a_{12} \text{cof}_{12}(A) + \dots + a_{1n} \text{cof}_{1n}(A)$$



donde, en general:

$$\text{cof}_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det(\text{Men}_{ij}(A))$$

es el "cofactor de  $a_{ij}$ ".

Observación:

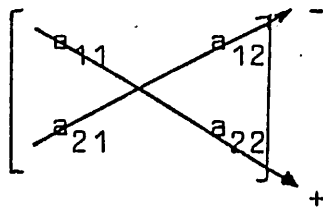
La definición anterior es una definición inductiva ya que el valor del  $\det(A)$  está dada en términos de determinantes de matrices de orden menor que A.

En general para una matriz de orden 2,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}(-1)^{1+1} \det [a_{22}] + a_{12}(-1)^{1+2} \det [a_{21}] \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned}$$

El determinante de una matriz de orden 2; puede ser fácilmente recordado, utilizando el diagrama siguiente:



Calcular el determinante de  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$



$$\det(A) = 1 \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + 3 \det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= (45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = 0$$

Para una matriz, cualquiera, de orden 3;

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} +$$

$$a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

Esta fórmula es bastante difícil de recordar, un esquema fácil de recordar es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

+ + +



Observación:

Los esquemas anteriores son sólo válidos para determinantes de orden menor o igual a 3.

## Propiedades de los Determinantes:

- 1) Para cualquier matriz cuadrada  $A$ ,  $\det(A^t) = \det(A)$ .
- 2) Si  $T$  es una matriz triangular (inferior o superior) entonces  $\det(T) = t_{11}t_{22}\dots t_{nn}$ , e.d., es el producto de los elementos de la diagonal de  $T$ .
- 3) Si la matriz  $B$  se obtiene de la matriz  $A$  por el intercambio de  $\text{Ren}_i(A)$  y  $\text{Ren}_j(A)$ , ( $R_i \longleftrightarrow R_j$ ), entonces  $\det(B) = -\det(A)$ .
- 4) Si la matriz  $A$  tiene una fila nula o columna nula, entonces  $\det(A) = 0$ .
- 5) Si la matriz  $A$  tiene dos filas o dos columnas iguales, entonces  $\det(A) = 0$ .
- 6) Extensión de Laplace: Para cualquier matriz  $A$  de orden  $n$ ,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \text{cof}_{ik}(A) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ik} \text{cof}_{ik}(A) \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

- 7) Si  $B$  se obtiene de  $A$  por la multiplicación de cada elemento de  $\text{Ren}_i(A)$  o  $\text{col}_j(A)$  por un escalar  $c$ , entonces  $\det(B) = c \det(A)$ .
- 8) Si  $B$  se obtiene de  $A$  por el reemplazo del  $\text{Ren}_i(A)$  por  $s\text{Ren}_j(A) + \text{Ren}_i(A)$  ( $sR_j + R_i$ ), entonces el



$\det(B)=\det(A)$ . Similarmente, si B se obtiene de A por el reemplazo de  $Col_i(A)$  por  $sCol_j(A) + Col_i(A)(sC_j+C_i)$ , entonces  $\det(B) = \det(A)$ .

En la tabla siguiente se presenta un resumen de algunas de las propiedades anteriores y su efecto:

Tipo	Notación	Descripción	Efecto sobre el Determinante.	Si el resultado es la matriz B, entonces
R-I	$R_i \leftrightarrow R_j$	Intercambiamos $Ren_i(A)$ y $Ren_j(A)$	Cambio de Signo	$\det(B) = -\det(A)$
R-II	$KR_i$	Multiplicamos $Ren_i(A)$ por K	Multiplicado por K	$\det(B) = K\det(A)$
R-III	$KR_j + R_i$	Sumamos $KRen_j(A)$ a $Ren_i(A)$	No hay efecto	$\det(B) = \det(A)$
C-I	$C_i \leftrightarrow C_j$	Intercambiamos $Col_i(A)$ y $Col_j(A)$	Cambio de signo	$\det(B) = -\det(A)$
C-II	$KC_i$	Multiplicamos $Col_i(A)$ por K	Multiplicado por K.	$\det(B) = K\det(A)$
C-III	$KC_j + C_i$	Sumamos $KCol_j(A)$ a $Col_i(A)$	No hay efecto	$\det(B) = \det(A)$

Ej. 22:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Operación usada

$$\% = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$-2R_1 + R_2$$

$$-4R_1 + R_3$$

$$-R_1 + R_4$$



$$\% = 4 \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{4} R_2$$

$$\% = 4 \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -5 R_2 + R_3 \\ -3 R_2 + R_4 \end{array}$$

$$\% = -16 \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & +2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad -\frac{1}{4} R_3$$

$$\% = -16 \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \quad -4 R_3 + R_4$$

$$\% = -16 (-8) = 128$$

### Definición:

Si  $A$  es una matriz de orden  $n$ , "la adjunta de  $A$ " es una matriz de orden  $n$ , que denotamos por  $\text{Adj}(A) = (\alpha_{ij})$ , donde

$$\alpha_{ij} = \text{cof}_{ji}(A) = (-1)^{j+i} \det(\text{Men}_{ji}(A))$$



Observación:

La  $\text{Adj}(A)$  se obtiene de  $A$  mediante el reemplazo de los elementos de  $A$  por sus cofactores, y posteriormente tomando la traspuesta de dicha matriz.

Ej. 23:

$$\text{Para } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 6 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{determinar } \text{Adj}(B)$$

$$\text{Adj}(B) = \begin{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ -\det \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} & -\det \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} & \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^t$$

$$\text{Adj}(B) = \begin{bmatrix} 13 & -8 & 3 \\ -9 & 7 & -5 \\ 34 & -18 & 21 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 13 & -9 & 34 \\ -8 & 7 & -18 \\ 3 & -5 & 21 \end{bmatrix}$$

**Teorema:**

Para cualquier matriz  $B$  de orden  $n$ ,

$$B \text{ Adj}(B) = \text{Adj}(B)B = \det(B) I_n$$

Corolario: Si  $\det(B) \neq 0$ , entonces  $B^{-1}$  existe y está dada por:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \text{Adj}(B)$$



Para la matriz B del ejemplo 23:

$$B^{-1} = \frac{1}{19} \text{Adj}(B) = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 13 & -9 & 34 \\ -8 & 7 & -18 \\ 3 & -5 & 21 \end{bmatrix}$$

Observación:

Si  $B^{-1}$  existe, entonces  $B B^{-1} = B^{-1} B = I$ .

Propiedad: Si el producto AB está definido, entonces  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .

Observación:

Como  $B^{-1} B = I$  entonces  $\det(B^{-1} B) = \det(I) = 1$ , es decir:  $\det(B^{-1}) \det(B) = 1$ , de donde:  $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)}$ .

**Cálculo de Matrices Inversas Usando Operaciones Elementales de fila.**

**Teorema:**

Si A es una matriz de orden n y si

$$[A | I_n] \sim [I_n | P],$$

$$\text{entonces } P = A^{-1}$$

Observación:

El resultado de este teorema es una técnica muy eficiente para determinar  $A^{-1}$ .



Ej. 24: Encontrar  $A^{-1}$  si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -11 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 83 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid I_4] = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -11 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 83 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \\ R_3 \rightarrow -4R_1 + R_3 \\ R_4 \rightarrow -R_1 + R_4 \end{array} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -19 & -13 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 80 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_2 + R_1} \\ R_3 \rightarrow -5R_2 + R_3 \\ R_4 \rightarrow -3R_2 + R_4 \end{array} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 6 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 92 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{R_1 \rightarrow 2R_3 + R_1} \\ R_2 \rightarrow 4R_3 + R_2 \\ R_4 \rightarrow -13R_3 + R_4 \end{array} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 13 & 11 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 24 & 22 & -19 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 6 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -73 & 62 & -13 & 1 \end{array} \right]$$



$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} \\ R_3 \rightarrow -7R_4 + R_3 \\ R_2 \rightarrow -24R_4 + R_2 \\ R_1 \rightarrow -13R_4 + R_1 \end{array} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 960 & -815 & 171 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1774 & -1507 & 316 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 517 & -439 & 92 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -73 & 62 & -13 & 1 \end{array} \right]$$

Por el teorema anterior

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 960 & -815 & 171 & -13 \\ 1774 & -1507 & 316 & -24 \\ 517 & -439 & 92 & -7 \\ -73 & 62 & -13 & 1 \end{bmatrix}$$

Ej. 25:

Encontrar  $B^{-1}$  si  $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

Los pasos convenientes los encerraremos en un círculo

$$[B \mid I_3] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\quad} \begin{array}{l} R_1 \leftrightarrow R_3 \end{array} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$



$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\ R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3 \end{array} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 8 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\ R_2 \rightarrow -R_3 + R_2 \\ R_2 \rightarrow -R_2 \end{array} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\ R_1 \rightarrow 3R_2 + R_1 \\ R_3 \rightarrow -8R_2 + R_3 \end{array} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 8 & 5 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\ R_3 \rightarrow -R_3 \\ R_1 \rightarrow 6R_1 \\ R_2 \rightarrow 6R_2 \end{array} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 18 & 18 & -18 & -12 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & -8 & -5 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\ R_2 \rightarrow -R_3 + R_2 \\ R_1 \rightarrow -3R_3 + R_1 \end{array} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & -8 & -5 \end{array} \right]$$



$$\begin{array}{l}
 \xrightarrow{\hspace{10em}} \\
 R_1 \rightarrow \frac{1}{6} R_1 \\
 R_2 \rightarrow \frac{1}{6} R_2 \\
 R_3 \rightarrow \frac{1}{6} R_3
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & 0 & -3 & 6 & 3 \\
 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 7 & -8 & -5
 \end{array} \right]$$

Luego :

$$B^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 7 & -8 & -5 \end{bmatrix}$$

Ejercicios:

1. Para  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  Determinar todas las matrices de orden 2 que conmuten con A.

2. Calcular, se existe,  $C^{-1}$  si:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mediante la matriz de cofactores.

3. Si,  $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  determinar, si existe,

$E^{-1}$  mediante el método  $[I, A] \sim [I | P]$



## TRIGONOMETRIA

Definición: (Radián y Grados)

- 1) Si un ángulo considerado como ángulo central de un círculo, subtiende un arco de longitud igual al radio del círculo, se dice entonces que el ángulo mide un radián.
- 2) Si la longitud del arco es de  $1/360$  de la circunferencia del círculo, entonces la medida del ángulo es de 1 grado sexagesimal.
- 3) Si la longitud del arco es de  $1/400$  de la circunferencia del círculo, entonces la medida del ángulo es de 1 grado centesimal.

Angulo en posición normal:

Un ángulo está en posición normal si tiene su vértice en el origen del sistema de coordenadas rectangulares y su lado inicial coincide con el eje positivo de las abscisas. Si se considera la rotación de un rayo con respecto a su posición inicial y final, esta rotación determina un ángulo que puede ser positivo o negativo según si, el sentido de rotación sea inverso a las manecillas del reloj o en el sentido de las manecillas del reloj respectivamente.

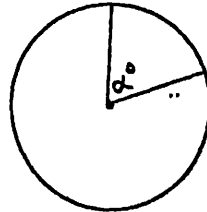
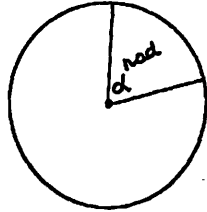
Se dice que un ángulo pertenece al cuadrante en que se encuentra su lado terminal.

**Conversión de grados a radianes y de radianes a grados:**

Como la circunferencia del círculo es igual a  $2\pi$  veces el radio; un rayo genera un ángulo de  $2\pi$  radianes al descri-



bir una revolución completa. También genera un ángulo de  $360^\circ$ .  
Es decir:



$$\frac{\alpha^{\text{rad}}}{2\pi \text{radianes}} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

$$\frac{\alpha^{\text{rad}}}{\pi} = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ}$$

$$\alpha^{\text{rad}} = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha^\circ$$

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha^{\text{rad}}$$

Ejs.:

- 1) convertir  $255^\circ$  en radianes.

Solución:

$$\alpha^{\text{rad}} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 255^\circ = \frac{17}{12} \pi \text{ radianes}$$

- 2) Convertir  $3\pi/5$  radianes en grados.

Solución:

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{5} = 108^\circ$$



Teorema: (Longitud de arco)

La longitud de arco  $l$  de una circunferencia de radio  $r$  está dada por:

$$l = \alpha^{\text{rad}} \cdot r$$

Demostración:

$$\frac{\alpha^{\text{rad}}}{2\pi} = \frac{l}{2\pi r}$$

$$\therefore \boxed{l = \alpha^{\text{rad}} \cdot r}$$

Teorema: (Area de 1 sector circular)

El área  $A$  del sector circular de un círculo de radio  $r$  está dado por:

$$\boxed{A = \frac{l \cdot r}{2}}$$

Demostración:

$$\frac{\alpha^{\text{rad}}}{2\pi} = \frac{A}{\text{Area círculo}}$$

$$\frac{\alpha^{\text{rad}}}{2\pi} = \frac{A}{\pi r^2}$$

$$A = \frac{\alpha^{\text{rad}} \cdot r^2}{2} = \frac{\alpha^{\text{rad}} r \cdot r}{2} = \frac{l \cdot r}{2}$$



Ej.:

Calcular  $l$  y  $A$  de un sector circular cuyo ángulo del centro mide  $135^\circ$  y cuyo radio es igual a 12 cm.

Solución:

$$\alpha^{\text{rad}} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 135^\circ = 0.75 \pi$$

$$l = \alpha^{\text{rad}} \cdot r = 0.75 \pi \cdot 12 \text{ cm.}$$

$$l = 9 \pi \text{ cm.}$$

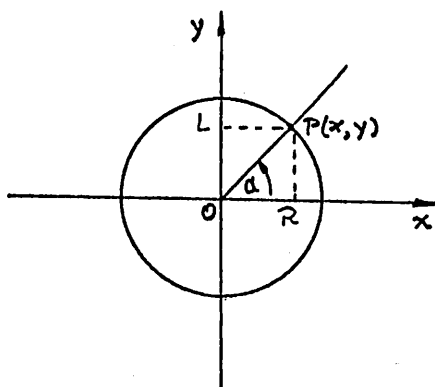
$$A = \frac{l \cdot r}{2} = \frac{9 \pi \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm}}{2}$$

$$A = 54 \pi \text{ cm}^2$$

**Circunferencia unitaria o circunferencia goniométrica:**

Se llama así a la circunferencia con centro en el origen y radio igual a uno.

**Definición:** (Función seno y coseno)



Sea  $\alpha$  un ángulo en posición normal, sea  $P(x,y)$  el punto en que el lado terminal del ángulo  $\alpha$  corta a la circunferencia, entonces:

Llamaremos "seno del ángulo  $\alpha$ ", al valor de la ordenada del punto  $P$ ; es decir:

$$\text{Sen } \alpha = \overline{OL} = y$$

Llamaremos "coseno del ángulo  $\alpha$ "; al valor de la abscisa del punto  $P$ , es decir:

$$\text{Cos } \alpha = \overline{OR} = x$$

Observación:

1) De la definición tenemos que:

$$\overline{OR}^2 + \overline{PR}^2 = \overline{OP}^2$$

Como :  $\overline{OR} = \cos \alpha$  ;  $\overline{PR} = \overline{OL} = \sin \alpha$  ;  $\overline{OP} = 1$  entonces:

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

2) Rango seno =  $[-1, 1]$

Rango cos =  $[-1, 1]$

Definición: (Tangente y cotangente)

Dado  $\alpha$ , llamaremos "tangente del ángulo  $\alpha$ " al cuo  
ciente:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$



y llamaremos "cotangente del ángulo  $\alpha$ " al cociente:

$$\cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sen \alpha}$$

Observación:

De lo anterior se tiene que:

$$\tg \alpha \cdot \cotg \alpha = 1$$

Definición: (Secante y Cosecante)

Dado  $\alpha$ , llamaremos "secante del ángulo  $\alpha$ " al valor recíproco de coseno de  $\alpha$ , es decir:

$$\Sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

y llamaremos "cosecante del ángulo  $\alpha$ " al valor recíproco del seno de  $\alpha$ ; es decir:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sen \alpha}$$

Observación:

1) De las definiciones anteriores podemos expresar dichas funciones de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \text{a) Seno : } \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \\ \quad \quad \quad X \longrightarrow y = \sen X \end{array}$$



$$\begin{array}{l} \text{b) Coseno : } \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \\ X \longmapsto Y = \cos X \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c) Tangente: } D_1 \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longrightarrow Y = \operatorname{tg} X \end{array}$$

$$\text{donde : } D_1 = \operatorname{Dom}(\operatorname{tg}) = \left\{ X \in \mathbb{R} \mid X \neq (2N+1) \frac{\pi}{2}; N \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{d) Cotangente: } D_2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longmapsto Y = \operatorname{cotg} X \end{array}$$

$$\text{donde : } D_2 = \operatorname{Dom}(\operatorname{cotg}) = \{ X \in \mathbb{R} \mid X \neq N\pi : N \in \mathbb{Z} \}$$

$$\begin{array}{l} \text{e) Secante: } D_1 \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longmapsto Y = \operatorname{Sec} X \end{array}$$

$$\text{donde } D_1 = \operatorname{Dom}(\operatorname{sec}) = \operatorname{Dom}(\operatorname{tg})$$

$$\begin{array}{l} \text{f) Cosecante: } D_2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longrightarrow Y = \operatorname{cosec} X \end{array}$$

$$\text{donde: } D_2 = \operatorname{Dom}(\operatorname{cosec}) = \operatorname{Dom}(\operatorname{cotg})$$

2) De las definiciones anteriores se deducen también las siguientes identidades:

$$\text{a) } \operatorname{Sec} \alpha \cdot \cos \alpha = 1$$

$$\text{b) } \operatorname{Cosec} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha = 1$$

$$\text{c) Como: } \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad /: \cos^2 \alpha$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$




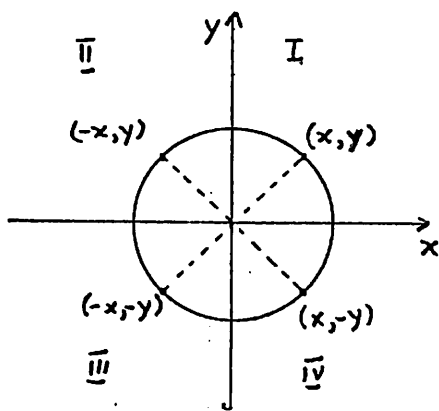
$$\boxed{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \operatorname{sec}^2 \alpha}$$

d) Como:  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \quad / : \operatorname{sen}^2 \alpha$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$\boxed{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha}$$

 SIGNO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS



$$\operatorname{sen} \alpha = Y$$

$$\operatorname{cos} \alpha = X$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{X}{Y}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{X}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{Y}$$

$\operatorname{sen}^+$	$\operatorname{cosec}^+$	todas +
$\operatorname{tg}^+$	$\operatorname{cotg}^+$	$\operatorname{cos}^+$
		$\operatorname{sec}^+$

Definición: (Angulo Cuadrantal)

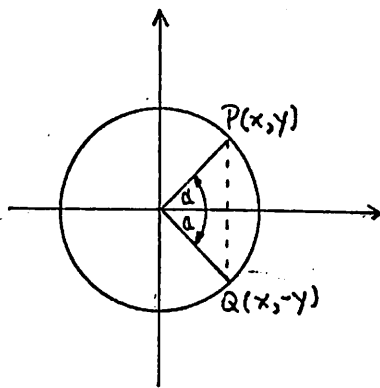
"Angulo Cuadrantal" es aquel ángulo cuyo lado terminal es un eje coordenado.

Daremos a continuación una tabla de ángulos cuadrantales en grados y radianes y el seno y coseno de dichos ángulos.



$\alpha$ en grados	$\alpha$ en radianes	seno $\alpha$	coseno $\alpha$
$0^\circ$	0	0	1
$90^\circ$	$\pi/2$	1	0
$180^\circ$	$\pi$	0	-1
$270^\circ$	$3\pi/2$	-1	0
$360^\circ$	$2\pi$	0	1

### FUNCION TRIGONOMETRICA DE ANGULOS NEGATIVOS



$$\text{Sen}(-\alpha) = -Y = -\text{Sen } \alpha$$

$$\text{Cos}(-\alpha) = X = \text{cos } \alpha$$

De las expresiones anteriores tenemos que:

$$\text{tg}(-\alpha) = \frac{\text{sen}(-\alpha)}{\text{cos}(-\alpha)} = \frac{-\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = -\text{tg } \alpha$$

$$\text{cotg}(-\alpha) = \frac{\text{cos}(-\alpha)}{\text{sen}(-\alpha)} = \frac{\text{cos } \alpha}{-\text{sen } \alpha} = -\text{cotg } \alpha$$

$$\text{sec}(-\alpha) = \frac{1}{\text{cos}(-\alpha)} = \frac{1}{\text{cos } \alpha} = \text{sec } \alpha$$

$$\text{cosec}(-\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(-\alpha)} = \frac{1}{-\text{sen } \alpha} = -\text{cosec } \alpha$$



Observación:

- 1) De las expresiones anteriores se tiene que:
- a) Las funciones seno, tg, cotg y cosec son funciones impares.
- b) Las funciones coseno y secante son funciones pares.

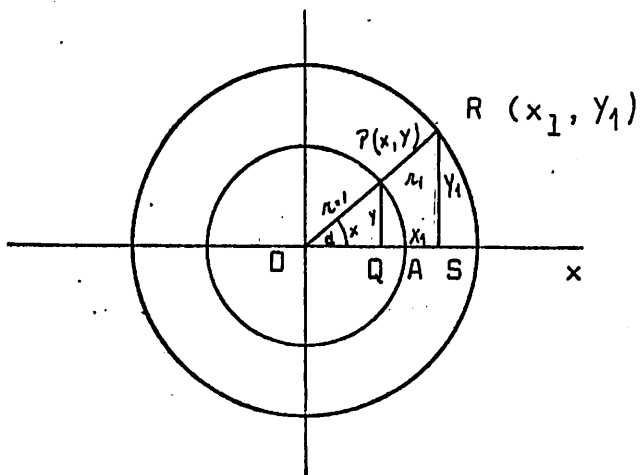
2) Además tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} \text{Sen}(\alpha + 2K\pi) &= \text{sen } \alpha \\ \text{Cos}(\alpha + 2K\pi) &= \text{cos } \alpha \end{aligned} \right\} \forall k \in \mathbb{Z}$$

Es decir las funciones seno y coseno son periódicas de período  $2\pi$ .

3) Si sabemos el comportamiento de las funciones  $\forall \alpha \in [0, 2\pi[$  sabemos el comportamiento de la función en general.

Si consideramos una  $\odot$  con centro en el origen y radio  $r = 1$  tal que:



$$r = \overline{OP} = 1 \quad ; \quad A(1,0)$$

$$\triangle OPQ \sim \triangle OSR$$

$$1) \frac{y_1}{r_1} = \frac{y}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{y_1}{r_1}$$

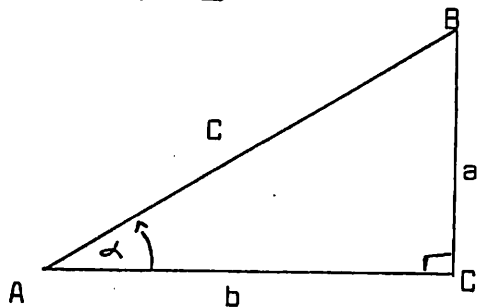
$$2) \frac{x_1}{r_1} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \frac{x_1}{r_1}$$



Luego :

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{x_1}{r_1} \\ \text{sen } \alpha = \frac{y_1}{r_1} \end{cases}$$

Usando estas relaciones, si se tiene el  $\triangle ABC$  rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c entonces:

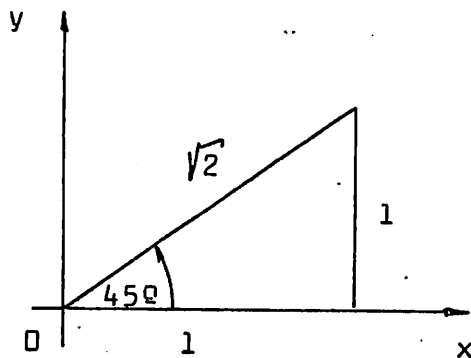


$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b}$$

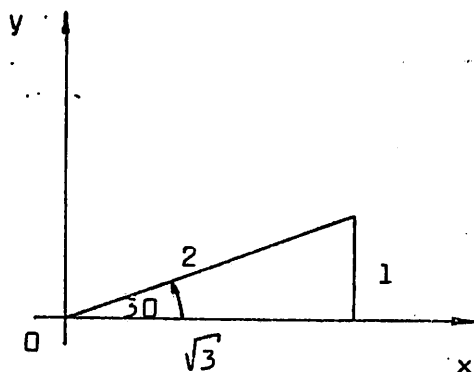
FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ .



$$\text{sen } 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = 1$$

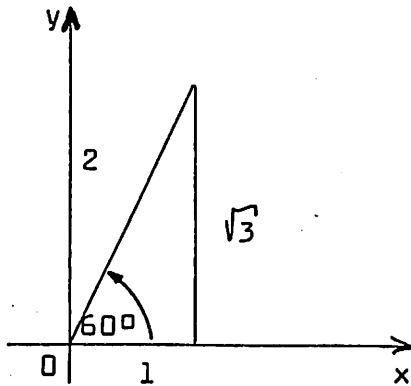


$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$





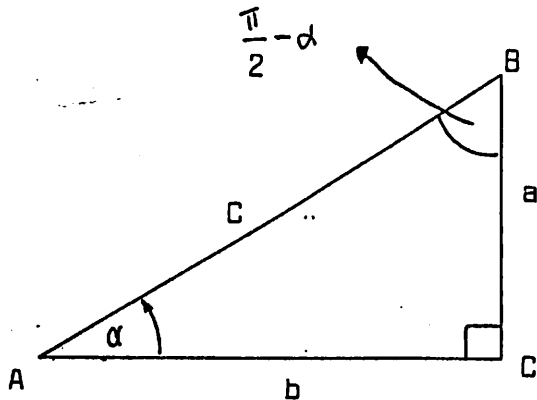
$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$$

### FUNCIONES CIRCULARES DE ANGULOS RELACIONADOS ENTRE SI.

- 1) Funciones Circulares de  $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ :

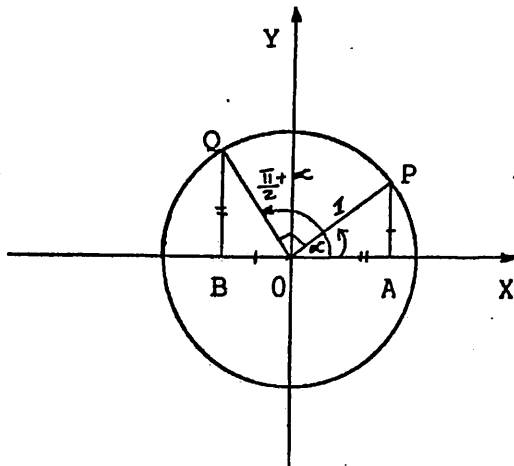


$$\text{Sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{b}{c} = \text{cos } \alpha$$

$$\text{cos}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{a}{c} = \text{sen } \alpha$$

$$\text{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{b}{a} = \text{cotg } \alpha$$

- 2) Funciones circulares de  $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ :



$$\text{Sen}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \overline{BQ} = \overline{OA} = \text{cos } \alpha$$

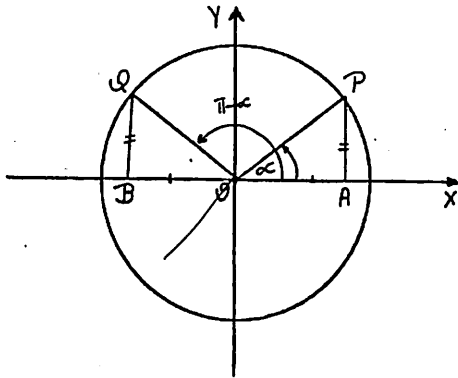
$$\text{cos}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \overline{OB} = -\overline{PA} = -\text{sen } \alpha$$

$$\text{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\text{cos}(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \frac{\text{cos } \alpha}{-\text{sen } \alpha}$$

$$= -\text{cotg } \alpha .$$



3) Funciones circulares de  $(\pi - \alpha)$ :

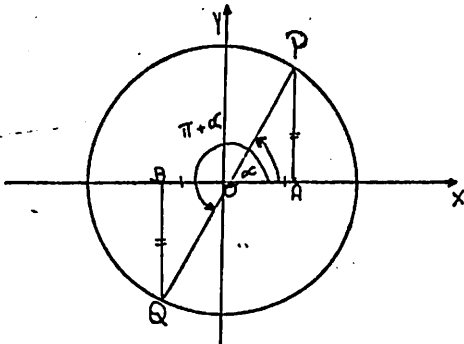


$$\text{Sen}(\pi - \alpha) = \overline{BQ} = \overline{PA} = \text{Sen } \alpha$$

$$\text{Cos}(\pi - \alpha) = \overline{OB} = -\overline{OA} = -\text{Cos } \alpha$$

$$\text{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\text{Sen}(\pi - \alpha)}{\text{Cos}(\pi - \alpha)} = \frac{\text{Sen } \alpha}{-\text{Cos } \alpha} = -\text{tg } \alpha$$

4) Funciones circulares de  $(\pi + \alpha)$ :



$$\text{Sen}(\pi + \alpha) = \overline{BQ} = -\overline{PA} = -\text{Sen } \alpha$$

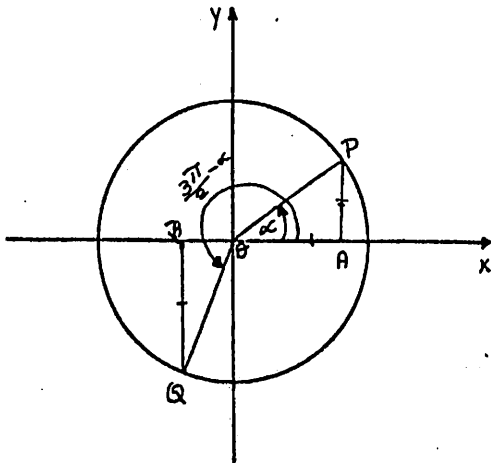
$$\text{Cos}(\pi + \alpha) = \overline{OB} = -\overline{OA} = -\text{Cos } \alpha$$

$$\text{tg}(\pi + \alpha) = \frac{\text{Sen}(\pi + \alpha)}{\text{Cos}(\pi + \alpha)} = \frac{-\text{Sen } \alpha}{-\text{Cos } \alpha} = \text{tg } \alpha$$

Observación:

De aquí tenemos que la función tangente es periódica de período  $\pi$ .

5) Funciones circulares de  $(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ :

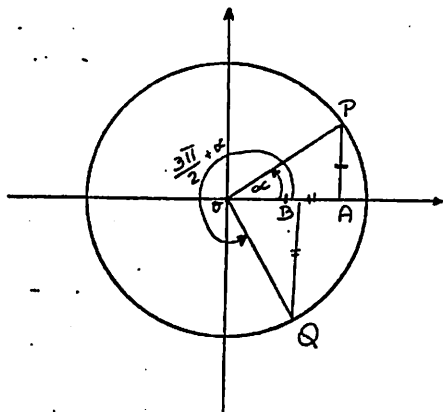


$$\text{Sen}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \overline{BQ} = -\overline{OA} = -\text{Cos } \alpha$$

$$\text{Cos}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \overline{OB} = -\overline{PA} = -\text{Sen } \alpha$$

$$\text{tg}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \frac{\text{Sen}(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}{\text{Cos}(\frac{3\pi}{2} - \alpha)} = \frac{-\text{Cos } \alpha}{-\text{Sen } \alpha} = \text{Cotg } \alpha$$

6) Funciones circulares de  $(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ :



$$\text{Sen}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \overline{BQ} = -\overline{OA} = -\text{Cos} \alpha$$

$$\text{Cos}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \overline{OB} = \overline{PA} = \text{Sen} \alpha$$

$$\text{tg}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \frac{\text{Sen}(\frac{3\pi}{2} + \alpha)}{\text{Cos}(\frac{3\pi}{2} + \alpha)} = \frac{-\text{Cos} \alpha}{\text{Sen} \alpha} = -\text{Cotg} \alpha$$

7) Funciones circulares de  $(n \cdot 2\pi - \alpha)$ :

Si  $n \in \mathbb{Z}$ , la línea límite de  $(n \cdot 360 - \alpha)$  coincide con la de  $(-\alpha)$ . Luego el valor de cada función de  $(n \cdot 360 - \alpha)$  es igual a la función correspondiente de  $(-\alpha)$ .

$$\text{Sen}(n \cdot 2\pi - \alpha) = \text{Sen}(-\alpha) = -\text{Sen} \alpha$$

$$\text{Cos}(n \cdot 2\pi - \alpha) = \text{Cos}(-\alpha) = \text{Cos} \alpha$$

$$\text{tg}(n \cdot 2\pi - \alpha) = \text{tg}(-\alpha) = -\text{tg} \alpha$$

8) Funciones circulares de  $(n \cdot 2\pi + \alpha)$ :

Si  $n \in \mathbb{Z}$  entonces  $n \cdot 2\pi$  representa  $n$  revoluciones completas del radio vector, por lo tanto la línea límite de  $(n \cdot 2\pi + \alpha)$  coincide con la del  $\alpha$  de manera que las funciones coinciden.

$$\text{Sen}(n \cdot 2\pi + \alpha) = \text{Sen} \alpha$$

$$\text{Cos}(n \cdot 2\pi + \alpha) = \text{Cos} \alpha$$

$$\text{tg}(n \cdot 2\pi + \alpha) = \text{tg} \alpha$$



Los resultados anteriores se pueden resumir en el siguiente teorema:

Teorema:

Sea  $f$  una de las seis funciones trigonométricas fundamentales, entonces:

$$f\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \begin{cases} \pm f(\alpha) & \text{Si } n \text{ es par} \\ \pm \text{Co-}f(\alpha) & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Además  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  y el signo se elige de acuerdo al cuadrante en que se encuentra el  $\alpha$  original.

Ejs.:

$$1) \text{ Sen } (280^\circ) = \text{ Sen } (270^\circ + 10^\circ) = -\text{Cos } 10^\circ$$

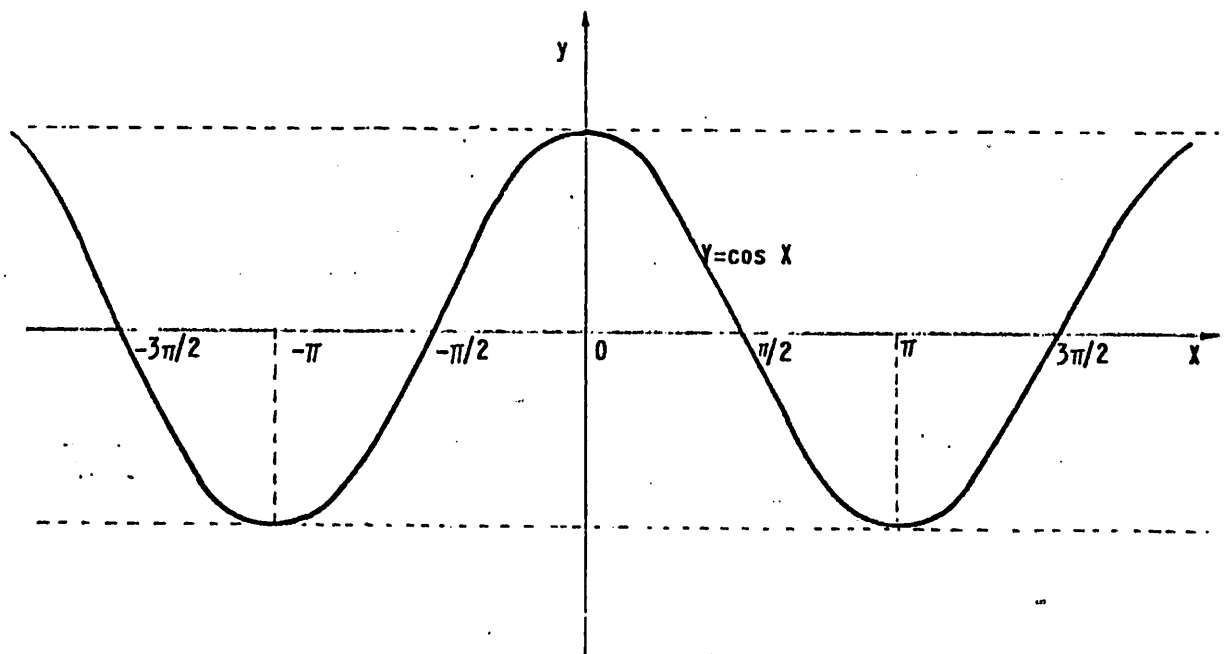
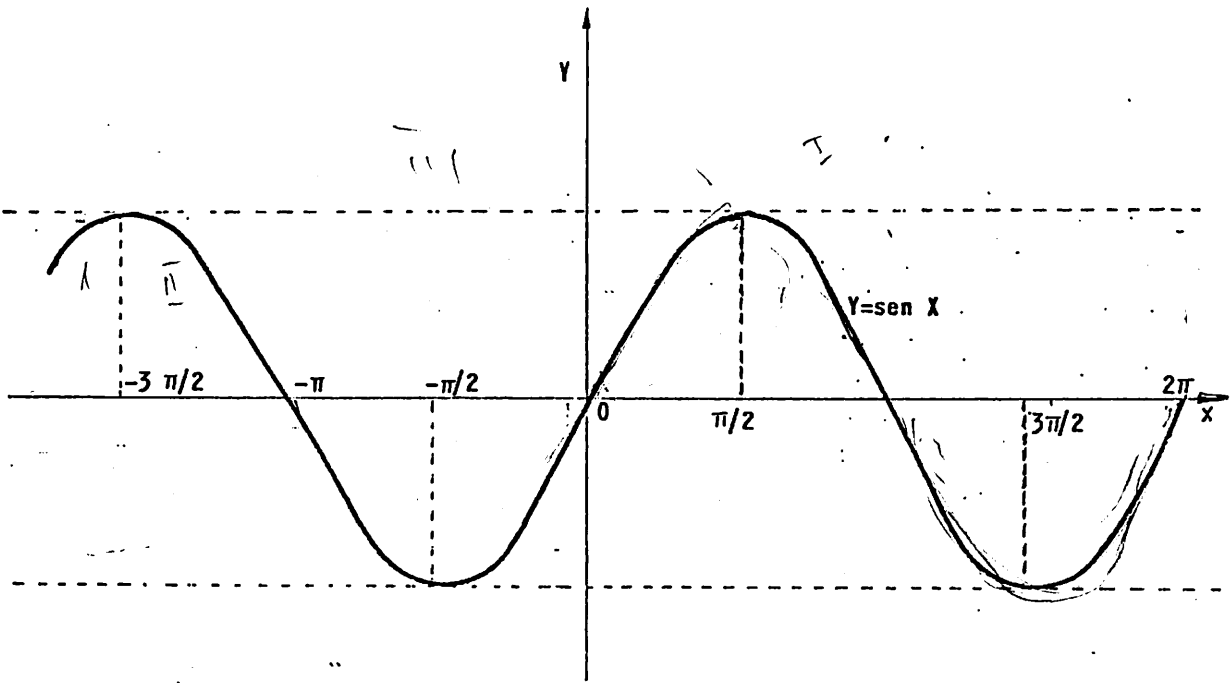
$$2) \text{ Cos } (135^\circ) = \text{ Cos } (180^\circ - 45^\circ) = -\text{Cos } 45^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

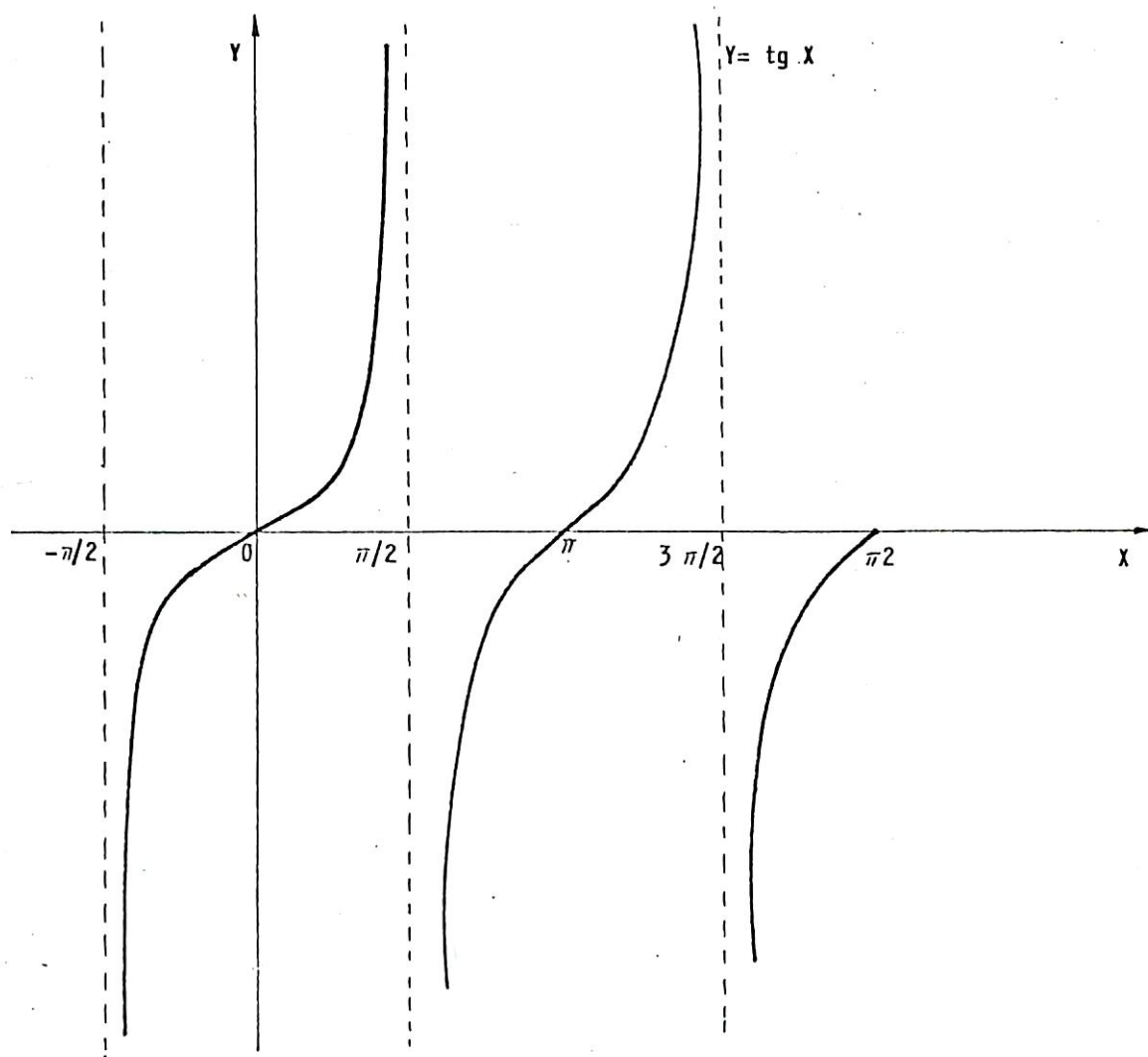
$$3) \text{ tg } (300^\circ) = \text{ tg } (360^\circ - 60^\circ) = -\text{tg } 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$4) \text{ Cos } (640^\circ) = \text{ Cos } (360^\circ + 280^\circ) = \text{ Cos } 280^\circ = -\text{Sen } 10^\circ$$



Gráfico de las funciones seno, coseno y tangente:





Ejercicios:

1) En una circunferencia de 4,5 cm de diámetro. Hallar la longitud del arco interceptado por un ángulo central de  $42^{\circ} 50' 23''$ .

2) Hallar el área de un sector circular, sabiendo que el ángulo central es de  $120^{\circ}$  y que el diámetro del círculo es de 56.0 cm.

3) Dos circunferencias concéntricas tienen radios de 5 y 6 cm. Hallar la parte del área del sector del círculo mayor que está fuera del círculo menor, cuando el ángulo central es de  $37^{\circ}$ .

4) Un caballo es atado a una estaca ¿Qué longitud deberá tener la cuerda para que, cuando el caballo sujeto al extremo de la cuerda tirante recorra 52,36 m, el ángulo descrito por la cuerda es de  $75^{\circ}$  grados?

5) Resolver las identidades:

$$1) \frac{\cos x \operatorname{cosec} x}{\cotg^2 x} = \operatorname{tg} x$$

$$2) \operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$$

$$3) \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cotg x} = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

$$4) \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \sec^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x$$

$$5) \frac{\operatorname{cosec} x}{\operatorname{tg} x + \cotg x} = \cos x$$



6) Hallar el valor numérico de:

$$1) \cos 60^\circ - \operatorname{tg}^2 45^\circ + \frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ = 0$$

$$2) \frac{1}{3} \operatorname{sen}^2 60^\circ - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{tg}^2 30^\circ + \frac{4}{3} \operatorname{sen}^2 45^\circ \operatorname{tg}^2 60^\circ$$

7) 1) Si  $5 \operatorname{tg} \alpha = 4$ , encuentre el valor de:

$$\frac{5 \operatorname{sen} \alpha - 3 \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{cos} \alpha}$$

2) Si  $\operatorname{tg} x = \frac{2pq}{p^2 - q^2}$ . Hallar  $\operatorname{cos} x$  y  $\operatorname{cosec} x$

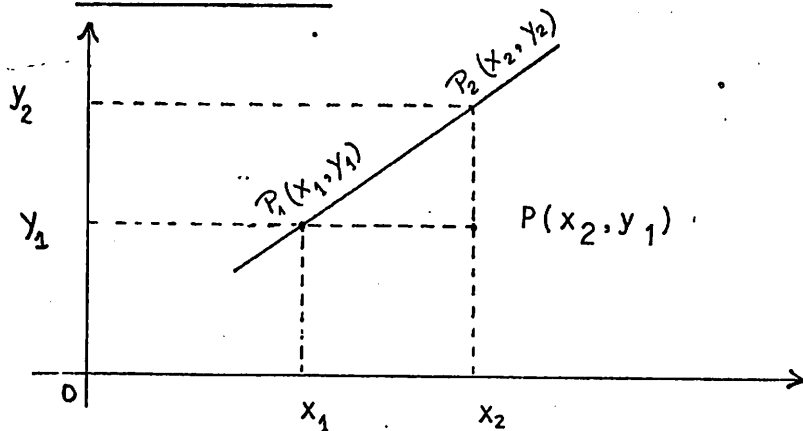


## FUNCIONES DE ANGULOS COMPUESTOS

Distancia entre dos puntos:Teorema:

Sean  $P_1(X_1, Y_1)$  y  $P_2(X_2, Y_2)$  puntos del plano. Entonces la distancia entre  $P_1$  y  $P_2$  está dada por:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}$$

Demostración:

$$|P_1P_2|^2 = |P_1P|^2 + |PP_2|^2$$

Pero  $|P_1P| = |X_2 - X_1|$  y  $|PP_2| = |Y_2 - Y_1|$

$$|P_1P_2|^2 = |X_2 - X_1|^2 + |Y_2 - Y_1|^2$$

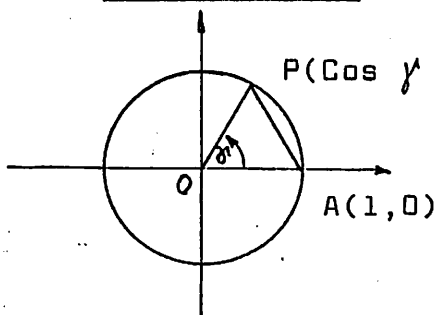
$$|P_1P_2|^2 = (X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2$$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}$$



**Teorema:**

Si a una cuerda del círculo unitario centrado en el origen le corresponde un ángulo del centro  $\gamma$  entonces su magnitud es  $\sqrt{2 - 2\cos \gamma}$ .

**Demostración:**

Si  $A=(1,0)$  entonces P tiene coordenadas  $(\cos \gamma, \text{Sen } \gamma)$  y usando la fórmula de la distancia se tiene:

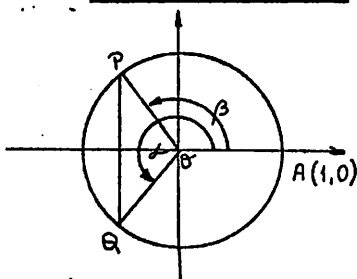
$$|A-P| = \sqrt{(1-\cos \gamma)^2 + (0-\text{Sen } \gamma)^2} = \sqrt{1-2\cos \gamma + \cos^2 \gamma + \text{Sen}^2 \gamma}$$

$$\therefore |A-P| = \sqrt{2 - 2\cos \gamma}$$

**Identidad fundamental:**

Para todo  $\alpha, \beta$  se tiene:

$$(1) \quad \boxed{\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \text{Sen } \alpha \text{ Sen } \beta}$$

**Demostración:**

Sea  $A = (1,0) : \gamma = \alpha - \beta$ , luego:

$$P = (\cos \beta, \text{Sen } \beta)$$

$$Q = (\cos \alpha, \text{Sen } \alpha)$$



Y usando la fórmula de distancia entre dos puntos se tiene:

$$|PQ| = \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2}$$

Usando el teorema anterior:

$$|PQ| = \sqrt{2-2\cos \gamma} = \sqrt{2-2\cos(\alpha - \beta)}, \text{ entonces:}$$

$$\sqrt{2-2\cos(\alpha - \beta)} = \sqrt{\cos^2 \alpha - 2\cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta}$$

$$\sqrt{2-2\cos(\alpha - \beta)} = \sqrt{2-2\cos \alpha \cos \beta - 2\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\therefore 2-2\cos(\alpha - \beta) = 2-2\cos \alpha \cos \beta - 2\sin \alpha \sin \beta$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

A partir de esta expresión podemos demostrar que:

$$(2) \quad \boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

Demostración:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta))$$

$$\% \quad = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta)$$

$$\% \quad = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$(3) \quad \boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha}$$



Demostración:

$$\text{Sen}(\alpha - \beta) = \text{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right)$$

$$\% = \text{Cos}\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right)$$

$$\% = \text{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\text{Cos}\beta - \text{Sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\text{Sen}\beta$$

$$\% = \text{Sen}\alpha \text{Cos}\beta - \text{Cos}\alpha \text{Sen}\beta$$

$$(4) \quad \boxed{\text{Sen}(\alpha + \beta) = \text{Sen}\alpha \text{Cos}\beta + \text{Sen}\beta \text{Cos}\alpha}$$

Demostración:

$$\text{Sen}(\alpha + \beta) = \text{Sen}(\alpha - (-\beta)) = \text{Sen}\alpha \text{Cos}(-\beta) - \text{Sen}(-\beta)\text{Cos}\alpha$$

$$\% = \text{Sen}\alpha \text{Cos}\beta + \text{Sen}\beta \text{Cos}\alpha$$

$$(5) \quad \boxed{\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha \text{tg}\beta}}$$

Demostración:

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{Sen}(\alpha + \beta)}{\text{Cos}(\alpha + \beta)}$$

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{Sen}\alpha \text{Cos}\beta + \text{Sen}\beta \text{Cos}\alpha}{\text{Cos}\alpha \text{Cos}\beta - \text{Sen}\alpha \text{Sen}\beta}$$

$$\% = \frac{\frac{\text{Sen}\alpha \text{Cos}\beta}{\text{Cos}\alpha \text{Cos}\beta} + \frac{\text{Sen}\beta \text{Cos}\alpha}{\text{Cos}\alpha \text{Cos}\beta}}{\frac{\text{Cos}\alpha \text{Cos}\beta}{\text{Cos}\alpha \text{Cos}\beta} - \frac{\text{Sen}\alpha \text{Sen}\beta}{\text{Cos}\alpha \text{Cos}\beta}}$$



$$\% = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$(6) \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Demostración:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(-\beta)}$$

$$\% = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Funciones del ángulo doble:

$$(1) \quad \operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$(2) \quad \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$(3) \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

$$(4) \quad \operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

$$(5) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

EJERCICIOS:

Haciendo uso de las funciones de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$

Calcular:



- (i)  $\cos 75^\circ$  (ii)  $\cos 105^\circ$  (iii)  $\sin 15^\circ$   
 (iv)  $\operatorname{tg} 135^\circ$  (v)  $\operatorname{tg} 15^\circ$  (vi)  $\operatorname{cosec} 75^\circ$   
 (vii)  $\operatorname{tg} 22,5^\circ$  (viii)  $\sec 37,5^\circ$ .

- Transformaciones de sumas de senos y cosenos en productos

$$(1) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$(2) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$(3) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$(4) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Sumando (1) + (2) tenemos:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

sumando (3) + (4) tenemos:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

restando (1) - (2) tenemos:

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$$

restando (3) - (4) tenemos:

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$



si hacemos  $\alpha + \beta = x$  y  $\alpha - \beta = y$  entonces:

$$\alpha = \frac{x + y}{2} \quad \beta = \frac{x - y}{2}$$

Luego las fórmulas anteriores quedan:

$$(1) \quad \sin x + \sin y = 2 \sin \left( \frac{x + y}{2} \right) \cos \left( \frac{x - y}{2} \right)$$

$$(2) \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \left( \frac{x + y}{2} \right) \cos \left( \frac{x - y}{2} \right)$$

$$(3) \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \left( \frac{x + y}{2} \right) \sin \left( \frac{x - y}{2} \right)$$

$$(4) \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \left( \frac{x + y}{2} \right) \sin \left( \frac{x - y}{2} \right)$$

### EJEMPLOS:

1) Expresar el producto:  $\cos 45^\circ \sin 15^\circ$  como la suma o diferencia de 2 funciones:

### Solución:

$$\cos 45^\circ \sin 15^\circ = \frac{1}{2} (\sin x - \sin y)$$

$$\frac{x + y}{2} = 45^\circ \quad \wedge \quad \frac{x - y}{2} = 15^\circ$$

$$\begin{array}{l} x + y = 90^\circ \\ x - y = 30^\circ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x = 120^\circ \\ \therefore y = 30^\circ \end{array} \Rightarrow x = 60^\circ$$

$$\cos 45^\circ \sin 15^\circ = \frac{1}{2} (\sin 60^\circ - \sin 30^\circ)$$



(2) Escriba la expresión:  $\text{Sen } 30^\circ + \text{Sen } 20^\circ$  como el producto de 2 funciones.

Solución:

$$\text{Sen } 30^\circ + \text{Sen } 20^\circ = 2 \text{ Sen} \left( \frac{30^\circ + 20^\circ}{2} \right) \text{Cos} \left( \frac{30^\circ - 20^\circ}{2} \right)$$

$$\% = 2 \text{ Sen } 25^\circ \text{Cos } 5^\circ$$



IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

Recordemos que una identidad es una proposición de igualdad válida para todos los valores posibles de las variables que aparecen en ella.

No existe un procedimiento general para resolver identidades trigonométricas, sin embargo, en algunos casos puede convenir expresar todas las funciones en términos de seno y coseno, y enseguida simplificar.

Una identidad queda demostrada transformando:

- 1) El primer miembro hasta hacerlo idéntico al segundo.
- 2) El segundo miembro hasta hacerlo idéntico al primero.
- 3) Ambos miembros por separado hasta darles una forma común.

EJEMPLOS:

$$1) \frac{\text{Sen}^3 \alpha - \text{Sen} \alpha + \text{Cos} \alpha}{\text{Sen} \alpha} = \text{c} \text{otg} \alpha - \text{Cos}^2 \alpha$$

$$\frac{\text{Sen} \alpha (\text{Sen}^2 \alpha - 1) + \text{Cos} \alpha}{\text{Sen} \alpha} = \quad \%$$

$$\frac{\text{Sen} \alpha (-\text{Cos}^2 \alpha) + \text{Cos} \alpha}{\text{Sen} \alpha} = \quad \%$$



$$\frac{-\cancel{\text{sen } \alpha} \cos^2 \alpha}{\cancel{\text{sen } \alpha}} + \frac{\cos \alpha}{\cancel{\text{sen } \alpha}} = \quad \cdot /.$$

$$- \cos^2 \alpha + \cotg \alpha = \quad \cdot /.$$

$$\cotg \alpha - \cos^2 \alpha \equiv \cotg \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$2) \frac{\sec^2 \alpha}{1 + \text{sen } \alpha} = \frac{\sec^2 \alpha - \sec \alpha \cdot \text{tg } \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

$$1 + \text{sen } \alpha \quad \cos^2 \alpha$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha (1 + \text{sen } \alpha)} = \frac{1 - \text{sen } \alpha}{\cos^4 \alpha}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha (1 + \text{sen } \alpha)} = \frac{1 - \text{sen } \alpha}{\cos^2 \alpha (1 - \text{sen}^2 \alpha)}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha (1 + \text{sen } \alpha)} = \frac{1 - \cancel{\text{sen } \alpha}}{\cos^2 \alpha (1 - \cancel{\text{sen } \alpha})(1 + \text{sen } \alpha)}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha (1 + \text{sen } \alpha)} \equiv \frac{1}{\cos^2 \alpha (1 + \text{sen } \alpha)}$$

$$3) \text{tg} \left( \frac{\alpha - 3\beta}{2} \right) = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen } 4\beta}{\cos(\alpha + \beta) + \cos 4\beta}$$



$$\begin{aligned} \% &= \frac{\cancel{2} \cos \left( \frac{\alpha + \beta + 4\beta}{2} \right) \cdot \text{Sen} \left( \frac{\alpha + \beta - 4\beta}{2} \right)}{\cancel{2} \cos \left( \frac{\alpha + \beta + 4\beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha + \beta - 4\beta}{2} \right)} \\ \% &= \frac{\cos \left( \frac{\alpha + 5\beta}{2} \right) \cdot \text{Sen} \left( \frac{\alpha - 3\beta}{2} \right)}{\cos \left( \frac{\alpha + 5\beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - 3\beta}{2} \right)} \end{aligned}$$

$$\text{tg} \left( \frac{\alpha - 3\beta}{2} \right) \equiv \text{tg} \left( \frac{\alpha - 3\beta}{2} \right)$$

### Resolución de $\Delta$

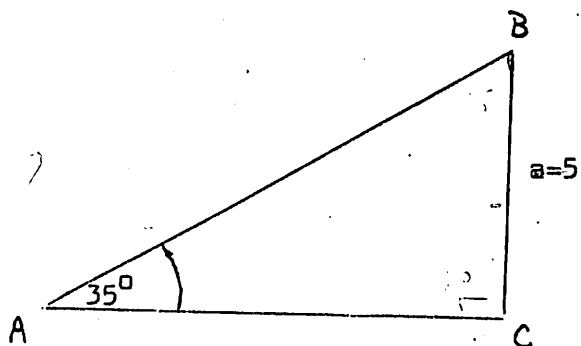
Llamaremos  $a, b, c$  los lados de  $\Delta$  y  $\alpha, \beta$  y  $\delta$  sus ángulos interiores. Tres elementos de estos seis en que al menos uno de ellos es lineal determinan un triángulo; la determinación de los elementos restantes constituye lo que se llama resolución del triángulo.

- 1) Triángulo rectángulo: Un triángulo rectángulo queda resuelto cuando se conocen, uno de sus lados y cualquier otro elemento.

#### Ejemplo:

Dados  $a = 5$  y  $\alpha = 35^\circ$

Resolver el  $\Delta$



Solución:

$$\operatorname{sen} 35^{\circ} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 5 / \operatorname{sen} 35^{\circ} \Rightarrow x = 8.7172$$

$$\therefore c = 8.7172$$

$$\operatorname{cos} 35^{\circ} = \frac{x}{8.7172} \Rightarrow x = 8.7172 \cdot \operatorname{cos} 35^{\circ} \Rightarrow x = 7.14$$

$$\therefore b = 7.14$$

$$\beta = 90^{\circ} - 35^{\circ} = 55^{\circ}$$

EJEMPLO 2

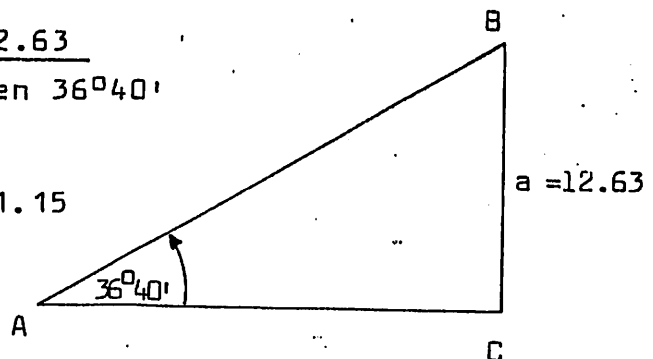
En un  $\Delta$  rectángulo  $\alpha = 36^{\circ}40'$  y  $a = 12.63$ ; resolver el triángulo.

Solución:

$$\operatorname{Sen} \alpha = \frac{a}{x}$$

$$\therefore x = \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{12.63}{\operatorname{sen} 36^{\circ}40'}$$

$$x = \frac{12.63}{0.597159} = 21.15$$



$$\therefore c = 21.15$$

$$\operatorname{tg} 36^{\circ}40' = \frac{12.63}{x} \Rightarrow x = \frac{12.63}{\operatorname{tg} 36^{\circ}40'} = \frac{12.63}{0.7445} = 16.965$$

$$\beta = 90^{\circ} - 36^{\circ}40' = 53^{\circ}20'$$



2) Triángulo cualquiera:

Para resolver un triángulo cualquiera es conveniente usar otros teoremas, llamados Ley de los senos y Ley de los cosenos.

\* 1er. Teorema (Ley de los senos)

En cualquier triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

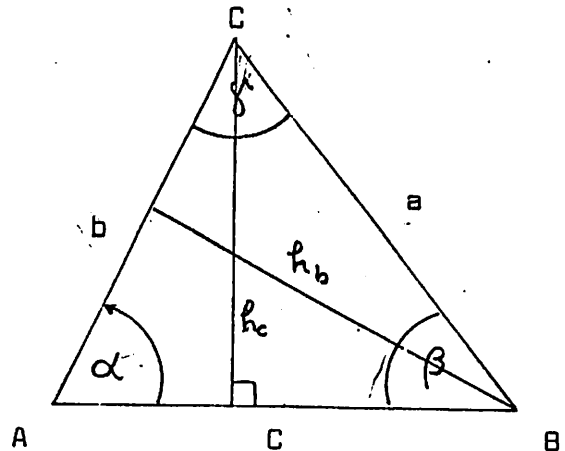
Demostración:

$$1) \text{ Sen } \alpha = \frac{hc}{b}$$

$$\therefore hc = b \text{ sen } \alpha$$

$$2) \text{ sen } \beta = \frac{hc}{a}$$

$$\therefore hc = a \text{ sen } \beta$$



De (1) y (2) tenemos:  $b \text{ sen } \alpha = a \text{ sen } \beta$

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} \quad ( * )$$

$$3) \text{ sen } \gamma = \frac{h_b}{a} \Rightarrow h_b = a \text{ sen } \gamma$$

$$4) \text{ sen } \alpha = \frac{h_b}{c} \Rightarrow h_b = c \text{ sen } \alpha$$

De (3) y (4): tenemos:  $a \text{ sen } \gamma = c \text{ sen } \alpha$

$$\therefore \frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} \quad ( * * )$$

De ( \* ) y ( \* \* ) tenemos:

$\frac{a}{\text{sen } \alpha}$	$=$	$\frac{b}{\text{sen } \beta}$	$=$	$\frac{c}{\text{sen } \gamma}$
--------------------------------	-----	-------------------------------	-----	--------------------------------



EJEMPLO 1:

Resolver  $\triangle$  para el cual  $\alpha = 35^\circ$ ;  $\beta = 65^\circ$  y  $a = 3$

Solución:

$$(1) \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{3 \cdot 0.9063}{0.573576} = 4.74$$

$$\therefore b = 4.74 \quad \gamma = 80^\circ$$

$$(2) \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{3 \cdot 0.984808}{0.573576} = 5.15$$

$$\therefore c = 5.15$$

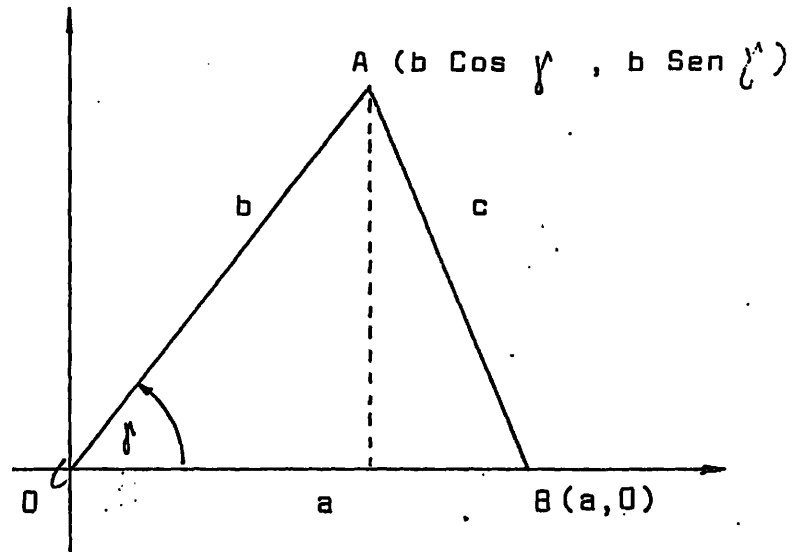
Observación:

Puede usarse la ley de los senos para resolver l triángulo cualquiera, cuando se dan un lado y 2 ángulos; o cuando se dan dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

2º Teorema: (Ley de los cosenos)

El cuadrado de cualquier lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de estos dos lados por el coseno del  $\alpha$  que forman.



Demostración:

Usando la fórmula de distancia entre dos puntos se tiene:

$$c = \sqrt{(b \cos \gamma - a)^2 + (b \operatorname{sen} \gamma - 0)^2}$$

$$c^2 = (b \cos \gamma - a)^2 + (b \operatorname{sen} \gamma)^2$$

$$c^2 = b^2 \cos^2 \gamma - 2ab \cos^2 \gamma + a^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 \gamma$$

$$c^2 = b^2 \operatorname{sen}^2 \gamma + b^2 \cos^2 \gamma - 2ab \cos \gamma + a^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 (\operatorname{sen}^2 \gamma + \cos^2 \gamma) - 2ab \cos \gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Análogamente:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

EJEMPLO:Resolver un  $\Delta$  dados  $a=2$ ;  $b=3$  y  $c=4$ Solución:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cos \gamma$$

$$16 = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos \gamma$$

$$16 = 13 - 12 \cos \gamma$$

$$12 \cos \gamma = 13 - 16$$

$$12 \cos \gamma = -3$$

$$\cos \gamma = \frac{-3}{12} = \frac{-1}{4} \implies \gamma = 104^\circ 28' 40,8''$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$4 = 9 + 16 - 2(3)(4) \cos \alpha$$

$$24 \cos \alpha = 25 - 4$$

$$\cos \alpha = \frac{21}{24} = 0.875 \implies \alpha = 28^\circ 57' 18''$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$



$$9 = 4 + 16 - 2(2)(4) \cos \beta$$

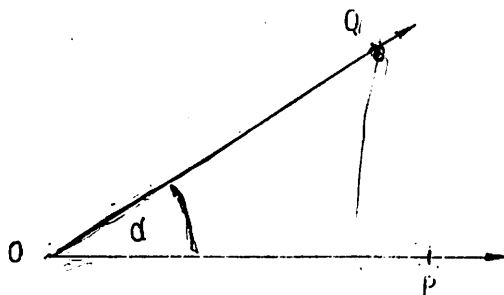
$$16 \cos \beta = -9 + 20$$

$$16 \cos \beta = 11$$

$$\cos \beta = 0.6875 \Rightarrow \beta = 46^{\circ} 34' 03''$$

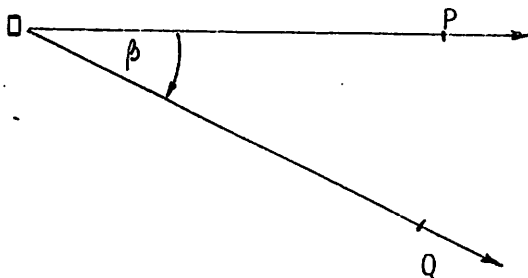
Definición: (Ángulo de elevación y depresión)

- 1) El punto Q, representa la ubicación de un objeto, como Q está ubicado sobre la horizontal  $\overline{OP}$ , el  $\sphericalangle POQ$ , lo llamamos "ángulo de elevación" del objeto Q, visto desde O.



$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle$  de elevación

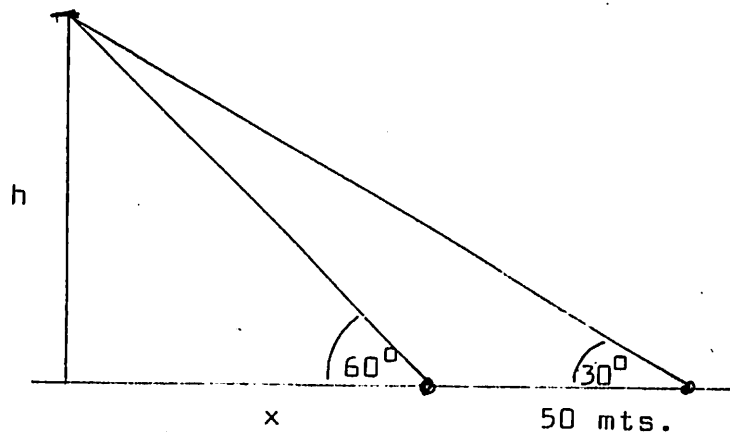
- 2) Si Q está situado por debajo de la horizontal  $\overline{OP}$ , entonces el  $\sphericalangle POQ$  se llama "ángulo de depresión" del objeto Q, visto desde el punto O.



$\sphericalangle \beta = \sphericalangle$  de depresión.

EJEMPLO:

Un observador mira la cúspide de una torre con un ángulo de elevación de  $30^\circ$ , enseguida avanza 50 mts. en dirección a la torre y observa ahora la cúspide, con un ángulo de elevación de  $60^\circ$ , ¿Cuál es la altura de la torre? ¿a qué distancia se encontraba, de la torre originalmente el observador?



$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{50+x} ; \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{x}$$

$$0.57735 = \frac{h}{50+x} ; 1.73205 = \frac{h}{x}$$

$$h = 0.57735 (50+x) ; h = x \cdot 1.73205$$

$$\therefore 0.57735(50+x) = x \cdot 1.73205$$

$$28.8675 + 0.57735 x = 1.73205 x$$

$$1.1547 x = 28.8675$$

$$x = 25$$

$$\therefore h = 1.73205 x \Rightarrow h = 1.73205 \cdot 25$$

$$\Rightarrow h = 43.3 \text{ mts.}$$

Además el observador se encuentra a  $50 + x$  mts. de la torre, es decir: 75 mts,



## Ejercicios:

Demostrar las siguientes identidades:

$$1) \quad \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}{\operatorname{cotg}^2 \alpha} = \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sec}^2 \alpha$$

$$2) \quad \frac{1}{1 - \operatorname{sen} \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{sen} \alpha} = 2 \operatorname{sec}^2 \alpha$$

$$3) \quad \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 \alpha} = 1$$

$$4) \quad (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{cotg} \alpha) \left( \frac{\cos \alpha}{1 - \operatorname{cotg} \alpha} \right) = \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha$$

$$5) \quad \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\operatorname{sec} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sec} \alpha + \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha + \operatorname{sen} \alpha$$

$$6) \quad (1 - \operatorname{sen} \alpha) (\operatorname{sec} \alpha + \operatorname{tg} \alpha) = \cos \alpha$$

$$7) \quad 4 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)^2 = 1 \quad \checkmark$$

$$8) \quad \frac{1 + 2 \operatorname{sen} \alpha - 3 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 + 3 \operatorname{sen} \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha}$$

$$9) \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{sec} \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha}$$



$$10) \quad \text{Sen } (X + y) \text{ sen}(x-y) = \cos^2 y = \cos^2 x$$

$$11) \quad \frac{1 + \cos 2x}{\cotg x} = \text{sen} 2x$$

$$12) \quad \frac{1 + \sec y}{\sec y} = 2 \cos^2 \left( \frac{y}{2} \right) =$$

$$13) \quad \frac{\text{sen } 7a - \text{sen } 5a}{\cos 7a + \cos 5a} = \text{tga}$$

$$14) \quad \text{sen}(X+Y+Z) + \text{sen}(X-Y-Z) + \text{sen}(X+Y-Z) + \text{sen}(X-Y+Z) = 4 \text{ sen} X \cos Y \cos Z$$

$$15) \quad \frac{1 + \text{sen } \theta}{\cos \theta} = \frac{1 + \text{tg } \frac{\theta}{2}}{1 - \text{tg } \frac{\theta}{2}} =$$

$$16) \quad \frac{\text{sen } x + \text{sen } 2x + \text{sen } 4x + \text{sen } 5x}{\cos x + \cos 2x + \cos 4x + \cos 5x} = \text{tg } 3x$$

$$17) \quad \frac{\text{sen } 35^\circ - \text{sen } 25^\circ}{\cos 25^\circ - \cos 35^\circ} = \frac{\cos 40^\circ + \cos 20^\circ}{\text{sen } 40^\circ + \text{sen } 20^\circ}$$

$$18) \quad \frac{\text{sen } 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \text{tg } \frac{\alpha}{2}$$

$$19) \quad \frac{\text{sen } 3\alpha}{\text{sen } \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 2$$

$$20) \quad \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{3 \text{ sen } \alpha - \text{sen } 3\alpha} = \cotg^3 \alpha$$



$$21) \frac{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha} = 3$$

$$22) \frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$23) \frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$$

$$24) \frac{\cos 3\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = 1 + 2 \sin 2\alpha$$

$$25) \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$$



## Ejercicios:

1) Resolver el triángulo con los elementos dados:

1)  $b = 4$  ,  $\beta = 35^\circ$  ,  $\gamma = 90^\circ$

2)  $a = 3$  ,  $b = 4$  ,  $c = 5$

3)  $\beta = 28^\circ$  ;  $\alpha = 62^\circ$  ;  $c = 6$

4)  $\alpha = 55^\circ$  ;  $\gamma = 90^\circ$  ;  $b = 2$

5)  $\alpha = 48^\circ$  ;  $\beta = 22^\circ$  ;  $c = 4$

6)  $a = 5$  ,  $b = 6$  ,  $c = 7$

7)  $a = 5$  ,  $b = 4$  ,  $\beta = 22^\circ$  (2 soluciones)

8)  $a = 6$  ;  $c = 5$  ,  $\gamma = 15^\circ$  (2 soluciones)

9)  $a = 6$  ;  $c = 7$  ;  $\gamma = 15^\circ$

10)  $a = 3$  ;  $b = 4$  ;  $\gamma = 27^\circ 32'$

11)  $a = 6$  ;  $b = 7$  ;  $c = 8$

12)  $b = 5$  ;  $c = 6$  ;  $\alpha = 42^\circ$

13)  $a = 4$  ;  $b = 5$  ;  $\gamma = 37^\circ$

2) Problemas:

1) El lado mayor de un terreno triangular mide 1760mts los otros lados forman ángulos de  $46^\circ 10'$  y  $61^\circ 20'$  respectivamente con el lado mayor. Calcular el área del terreno.

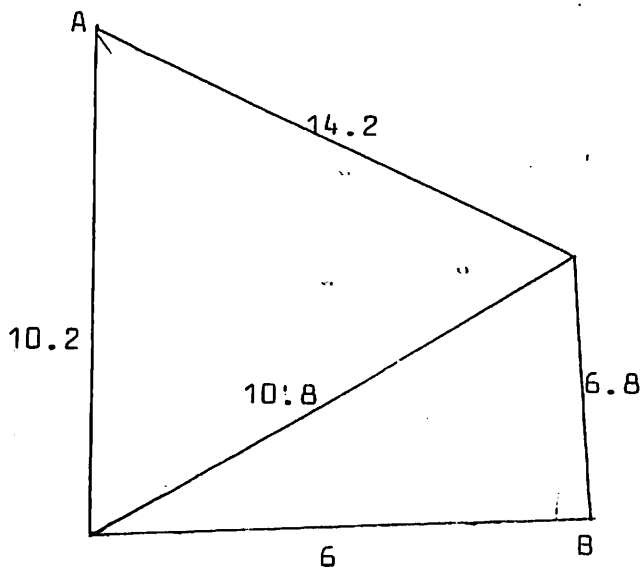
2) Dos lados de un paralelogramo y el ángulo que forman miden: 120 cm, 200 cm y  $100^\circ$  respectivamente. Determinese la longitud de la mayor de las diagonales y los otros ángulos



del paralelogramo.

3) Los puntos B y C quedan en lados opuestos de un pantano. El punto A es accesible a B y C y queda en una orilla del pantano. Se mide  $\overline{AB} = 2000$  mts y  $\overline{AC} = 3000$  mts. y el  $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ . Calcular  $\overline{BC}$ .

4) Encuentre la distancia de A hasta B dada la figura siguiente:



## Ejercicios:

1) Desde el puesto del vigía de un barco que tiene 48 mts de altura, se observa que el ángulo de depresión de un bote es de  $30^{\circ}$ . Hállese la distancia a que está del barco.

Resp.:  $48\sqrt{3}$ .

2) A la distancia de 25.98 mts del pie de una torre el ángulo de elevación de su cúspide es de  $30^{\circ}$ . Hállese la altura de la torre y la distancia del observador a la cúspide.

Resp.: 15 y 30

3) Una escalera de 13,5 mts de longitud llega justamente hasta la parte superior de un muro; si la escalera forma un ángulo de  $60^{\circ}$  con el muro; hállese la altura de éste y la distancia a él del pie de la escalera.

Resp.: 6.75 y 11.7.

4) El ángulo de elevación de la parte superior de una columna vista desde el pie de una torre, que tiene 15 mts de altura es de  $30^{\circ}$ . Hállese la altura de la columna. Resp. 22.5 mts.

5) Para determinar la altura de un puente se procede de la siguiente manera:

1) Se marcan en el puente dos puntos A y B situados a una distancia de 40 mts, es decir:  $\overline{AB} = 40$  mts.

6) Desde A y B se dirigen las visuales a un punto C situado verticalmente debajo del puente midiéndose los ángulos de depresión  $\angle BAC = 42^{\circ}36'$  y  $\angle ABC = 21^{\circ}28'$ . ¿Cuál es la altura del puente?.



Funciones trigonométricas  
inversas

Debemos recordar que la inversa de una función, es una función si y sólo si, esta es biyectiva.

Las funciones seno y coseno son periódicas por lo tanto no son inyectivas, de manera que no tienen función inversa. Pero puede obtenerse una función biyectiva si restringimos sus dominios

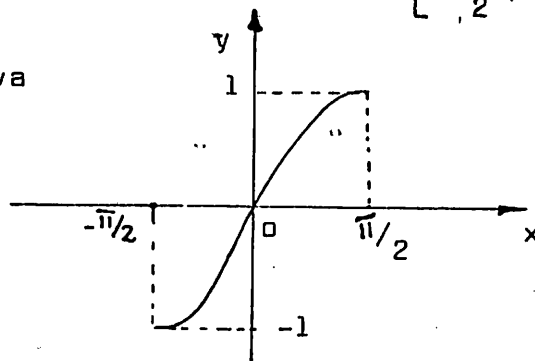
1) La función:

$$\text{seno} = \{ (x, y) \mid y = \text{sen } x \}$$

no es biyectiva pero la función

$$f = \left\{ (x, y) \mid y = \text{sen } x \wedge x \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] ; y \in [-1, 1] \right\}$$

es biyectiva



es decir: seno:  $\left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \longrightarrow [-1, 1]$  es biyectiva

Definición: (Arco seno)

La función "Arco seno" denotada por arco sen se define como la inversa de la función seno (definida biyectiva); es decir:

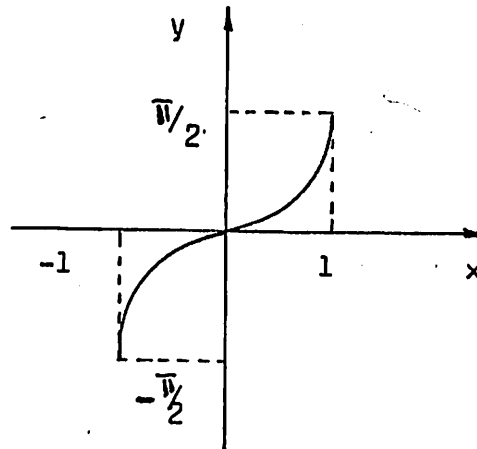
$$\text{Arco sen} : [-1, 1] \longrightarrow \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$x \longrightarrow y = \text{arco sen } x$$



Observación:

$$y = \text{arco sen } x \iff x = \text{sen } y$$

Gráfica de la función arco seno:EJEMPLOS:

1) Arco sen  $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$  Pues sen  $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  ;  $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

2) Arco sen  $\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$  Pues sen  $\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$  ;  $-\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

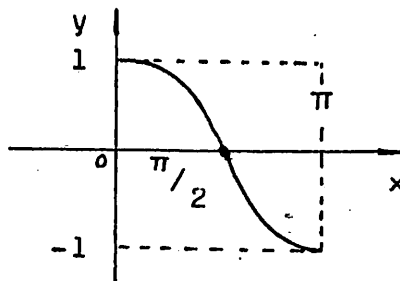
2) La función:

$$\text{coseno} = \{ (x,y) \mid y = \cos x \}$$

no es biyectiva pero la función:

$$f = \{ (x,y) \mid y = \cos x ; x \in [0, \pi] ; y \in [-1, 1] \}$$

es biyectiva



es decir:

$$\cos: [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] \text{ es biyectiva}$$

Definición: (arco coseno)

La función "Arco coseno" denotada por  $\arccos$  se define como la inversa de la función coseno (definida biyectiva) es decir:

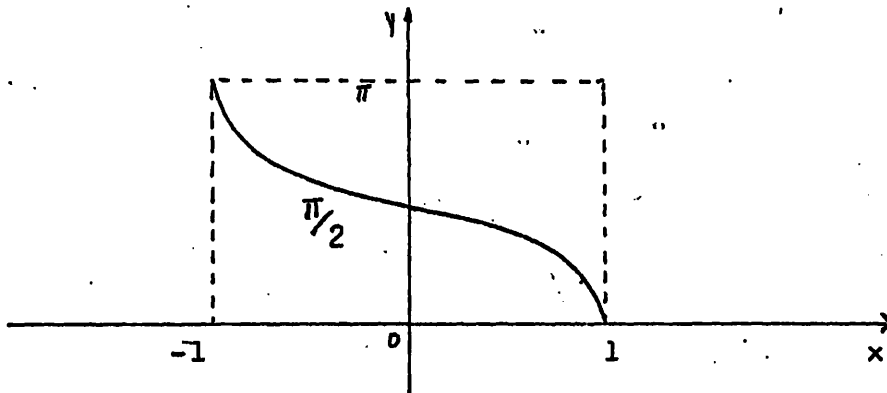
$$\arccos: [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

$$x \longmapsto y = \arccos x$$

Observación:

$$y = \arccos x \iff x = \cos y$$

Gráfico de la función arco coseno:



EJEMPLOS:

$$1) \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}; \text{ pues } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$$

$$2) \arccos \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}; \text{ pues } \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$$



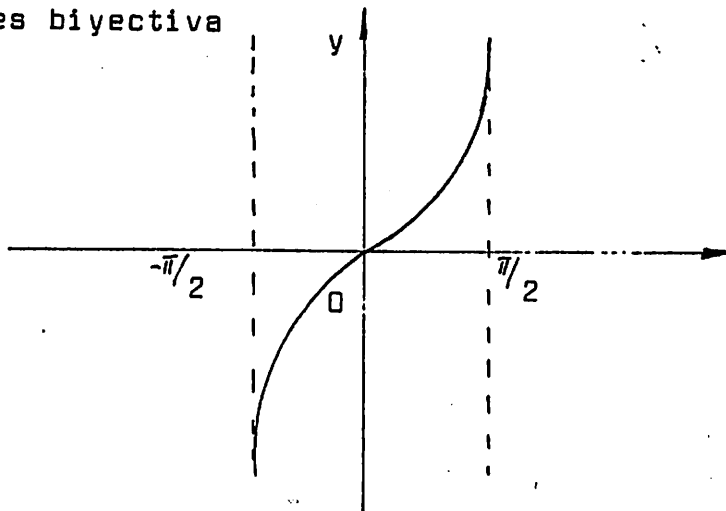
3) La función:

$$\text{tangente} = \{ (x,y) \mid y = \text{tg } x \}$$

no es biyectiva pero la función:

$$f = \{ (x,y) \mid y = \text{tg } x; x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ ; y \in \mathbb{R} \}$$

es biyectiva



es decir:

$$\text{tg} : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es biyectiva}$$

Definición: (arco Tangente)

La función "arco tangente" denotada por  $\text{arc tg}$ . se define como la inversa de la función tangente (definida biyectiva); es decir:

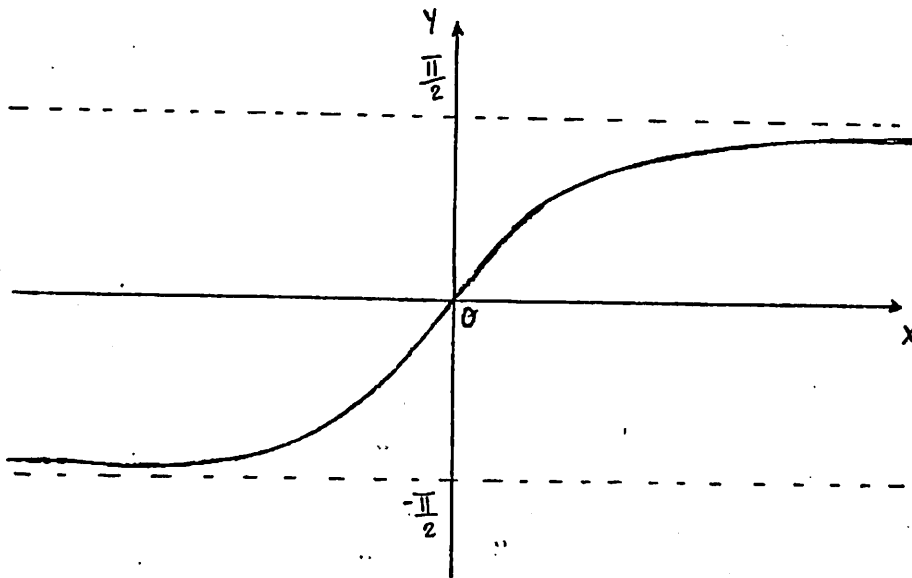
$$\text{arc tg} : \mathbb{R} \longrightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$x \longrightarrow y = \text{arc tg } x$$



Observación:  $y = \text{arc tg } x \Rightarrow x = \text{tg } y$

Gráfico de la función arco  
Tangente



EJEMPLOS:

1)  $\text{Arc tg } 1 = \pi/4$ , pues  $\text{tg } \frac{\pi}{4} = 1$ ;  $\frac{\pi}{4} \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

2) Demuestre que:

$$\text{arc tg } \frac{1}{2} + \text{arc tg } \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$



Solución:

$$\text{Sea } u = \text{arc tg } \frac{1}{2} \Rightarrow \text{tg } u = \frac{1}{2}$$

$$v = \text{arc tg } \frac{1}{3} \Rightarrow \text{tg } v = \frac{1}{3}$$

$$\text{tg}(u+v) = \frac{\text{tgu} + \text{tgv}}{1 - \text{tgu} \text{tgv}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{3 + 2}{6}}{\frac{6 - 1}{6}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\therefore \text{tg}(u+v) = 1 \Rightarrow u+v = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \text{arc tg } \frac{1}{2} + \text{arc tg } \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

3) Calcular:

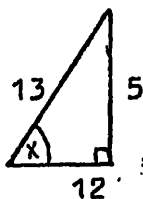
$$\cos (\text{arc sen } (-5/13))$$



Solución:

$$\text{arc sen } (-5/13) = x \Rightarrow \text{sen } x = \frac{-5}{13}$$

$$\therefore \cos x = \frac{12}{13}$$

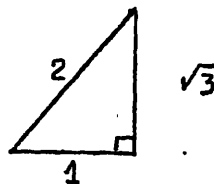
 $x \in \text{IV cuadrante}$ 

4) Calcular:

$$\text{Sen } \left( \text{arc cos } \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Sea } \text{arc cos } \frac{1}{2} = x \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}; x \in \text{I cuadrante}$$

$$\therefore \text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



5) Calcular:

$$\cos \left( \underbrace{\text{arc cos } \left( -\frac{1}{2} \right)}_u + \underbrace{\text{arc sen } \left( -\frac{1}{3} \right)}_v \right)$$

Solución:

$$\text{Sea } u = \text{arc cos } \left( -\frac{1}{2} \right) \Rightarrow \cos u = \left( -\frac{1}{2} \right) \quad u \in \text{II cuad.}$$

$$v = \text{arc sen } \left( -\frac{1}{3} \right) \Rightarrow \text{sen } v = \left( -\frac{1}{3} \right) \quad v \in \text{IV cuad.}$$

$$\cos (u+v) = \cos u \cos v - \text{sen } u \text{ sen } v$$

$$\therefore = \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{9}} - \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \cdot \left( -\frac{1}{3} \right)$$



$$\% = \frac{1}{6} [\sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{2}]$$

### ECUACIONES X

Sean  $E_1(x)$  y  $E_2(x)$  expresiones trigonométricas del ángulo  $x$  entonces la igualdad  $E_1(x) = E_2(x)$  es una ecuación si y sólo si, no es una identidad.

El conjunto solución de la ecuación  $E_1(x) = E_2(x)$  es el conjunto de elementos para los cuales se cumple que  $E_1(x) = E_2(x)$ .

Los elementos del conjunto solución de  $E_1(x) = E_2(x)$  que pertenecen al intervalo  $[0, 2\pi[$  constituyen un conjunto que llamaremos conjunto solución básica de la ecuación y la denotamos por  $S$ .

$$S = \{ x \mid E_1(x) = E_2(x) \wedge x \in [0, 2\pi[ \}$$

#### EJEMPLOS:

(1) Encontrar la solución básica de:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{cos} x \quad /: \operatorname{cos} x.$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$\therefore S = \{ x \mid \operatorname{sen} x = \operatorname{cos} x \wedge x \in [0, 2\pi[ \}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$$



7-11-1  
211  
121

(2) Determinar la solución básica.

$$4 \cos x \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x - 2 \cos x - 1 = 0$$

$$2 \operatorname{sen} x (2 \cos x + 1) - (2 \cos x + 1) = 0$$

$$(2 \operatorname{sen} x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

$$(2 \operatorname{sen} x - 1)(2 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \\ \vee \\ 2 \cos x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$1) \quad 2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

$$S_1 = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

$$2) \quad 2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$S_2 = \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3} \right\}$$

3) Determinar la solución básica de:

$$4 \operatorname{sen}^2 x + 8 \operatorname{sen} x + 3 = 0$$

$$(2 \operatorname{sen} x)^2 + 4 (2 \operatorname{sen} x) + 3 = 0$$

$$(2 \operatorname{sen} x + 1)(2 \operatorname{sen} x + 3) = 0$$

$$(2 \operatorname{sen} x + 1)(2 \operatorname{sen} x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \\ \vee \\ 2 \operatorname{sen} x + 3 = 0 \end{cases}$$



$$(1) \quad 2 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$$

$$S_1 = \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

$$(2) \quad 2 \operatorname{sen} x + 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{3}{2} \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$$

$$S_2 = \emptyset$$

$$\therefore S = S_1 \cup S_2 = \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

4) Determinar la solución básica de:

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \cos x + 1 = 0$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x + 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x + \cos x = 0$$

$$\cos x (2 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \vee \\ 2 \cos x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$1) \quad \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow S_1 = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

$$2) \quad 2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$\Rightarrow S_2 = \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$$



$$\therefore S = S_1 \cup S_2 = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

Ecuaciones con funciones trigonométricas  
inversas

---

1)  $\arccos(2x^2 + x) = \arcsin 1$

$$\therefore \arccos(2x^2 + x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \cos \frac{\pi}{2} = 2x^2 + x \Rightarrow 2x^2 + x = 0$$

$$\Rightarrow x(2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \vee 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore S = \left\{ 0, -\frac{1}{2} \right\}$$

2)  $\arctg x^2 + \arctg(1 + x^2) = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Sea } \begin{cases} \alpha = \arctg x^2 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = x^2 \\ \beta = \arctg(1+x^2) \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = 1+x^2 \end{cases}$$

$$\therefore \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\pi}{4}$$



$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^2 + (1+x^2)}{1-x^2(1+x^2)} = 1 &\Rightarrow x^2 + (1+x^2) = 1 - x^2(1+x^2) \\ &\Rightarrow x^4 + 3x^2 = 0 \\ &\Rightarrow x^2(x^2+3) = 0 \\ &\Rightarrow x^2 = 0 \vee x^2 + 3 = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \vee x^2 + 3 = 0 \\ &\Rightarrow S = \{0\} \end{aligned}$$

$$3) \quad 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} t + \operatorname{arccos} t = \pi$$

$$\text{sea } \begin{cases} \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{sen} t & \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = t \wedge \operatorname{cos} \alpha = \sqrt{1-t^2} \\ \beta = \operatorname{arc} \operatorname{cos} t & \Rightarrow \operatorname{cos} \beta = t \wedge \operatorname{sen} \beta = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

$$\therefore \operatorname{sen} (2\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \pi$$

$$\therefore \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{cos} 2\alpha \operatorname{sen} \beta = 0$$

$$2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta + (\operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen} \beta = 0$$

$$2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta + (1 - 2\operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen} \beta = 0$$

$$2t \sqrt{1-t^2} \cdot t + (1-2t^2) \cdot \sqrt{1-t^2} = 0$$

$$\sqrt{1-t^2} [2t^2 + 1 - 2t^2] = 0$$

$$\therefore \sqrt{1-t^2} = 0$$

$$\therefore 1-t^2 = 0$$

$$\therefore t = \pm 1$$

$$\therefore S = \{-1, 1\}$$



## Ejercicios:

Resolver las siguientes ecuaciones:

$$1) \cos 2x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

$$2) \operatorname{sen} x \operatorname{Sec}^2 x - 2 \operatorname{sen} x = 0$$

$$3) 3 \operatorname{Sen}^2 x + 5 \operatorname{sen} x - 2 = 0$$

$$4) \operatorname{Sec} x - \operatorname{tg} x - \operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x = 0$$

$$5) \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$$

$$6) \operatorname{Sen} x + \operatorname{sec}^2 x = 1 + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x$$

$$7) 4 \cos^2 x \operatorname{cosec} x + 8 \cos^2 x - 3 \operatorname{cosec} x - 6 = 0$$

$$8) \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} 2x$$

$$9) \cos 2x = \cos^2 x$$

$$10) \operatorname{Sen} 3x + \operatorname{sen} x = 0$$

$$11) \operatorname{Sen} 11x \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 2x = 0$$

$$12) \operatorname{Sen} 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \operatorname{sen} x$$

$$13) 2 \operatorname{sen}^2 3x + \operatorname{sen}^2 6x = 2$$

$$14) \operatorname{Sen} 2\theta \cos \theta + \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} \theta + \cos 2\theta \operatorname{sen} \theta - \cos 2\theta \cos \theta = 0$$

$$15) \operatorname{Sen} 2x \operatorname{cotg} x - \operatorname{sec}^2 x = \frac{1}{2}$$



## Ejercicios:

Demostrar las siguientes identidades:

$$1) \quad \text{arc tg } x + \text{arc tg } y = \text{arc tg } \frac{x + y}{1 - xy}$$

$$2) \quad \text{arc sec } \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \text{arc cotg } x \quad ; \quad x > 0$$

$$3) \quad \text{arc sen } x + \text{arc sen } y = \text{arc sen } (x \sqrt{1 - y^2} + y \sqrt{1 - x^2})$$

$$4) \quad \text{arc cos } x + \text{arc cos } y = \text{arc cos } (xy - \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - y^2})$$

$$5) \quad \text{arc tg } \frac{4}{3} - \text{arc tg } 1 = \text{arc tg } \frac{1}{7}$$

$$6) \quad 2 \text{ arc tg } \frac{1}{5} + \text{arc tg } \frac{1}{4} = \text{arc tg } \frac{32}{43}$$

$$7) \quad 2 \text{ arc tg } \sqrt{\frac{x}{a}} = \text{arc cos } \left( \frac{a - x}{a + x} \right)$$

$$8) \quad \text{arc cos } x = 2 \text{ arc sen } \sqrt{\frac{1 - x}{2}}$$



## Ejercicios:

Resolver las siguientes ecuaciones:

$$1) \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{5}{x} + \operatorname{arc} \operatorname{sen} 12/\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$2) \operatorname{arc} \operatorname{cotg} (x-1) - \operatorname{arc} \operatorname{cotg} (x+1) = \frac{\pi}{12}$$

$$3) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{1}{x-1} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{2}{x+1} \right) = \pi$$

$$4) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x = \frac{2\pi}{3}$$

$$5) \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x+1) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} (x-1) = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} 2$$

$$6) \operatorname{arc} \operatorname{sen} x - \operatorname{arc} \operatorname{cos} x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} (3x - 2)$$

$$7) \operatorname{arc} \operatorname{cotg} \left( \frac{x^2 - 1}{2x} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{2x}{x^2 - 1} \right) = \frac{-4\pi}{3}$$

$$8) \operatorname{arc} \operatorname{cos} x + 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} 1 = \pi$$

$$9) \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3x = \frac{\pi}{4}$$

$$10) \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + \operatorname{arc} \operatorname{sen} 2x = \frac{\pi}{3}$$



## NUMEROS COMPLEJOS

Definición: ( $\mathbb{N}^{\circ}$  complejo)

Se llama "número complejo" a una pareja ordenada de números reales  $(a,b)$  que se representa en la forma  $a+bi$  siendo  $i$  la unidad imaginaria definida por las ecuaciones  $i = \sqrt{-1}$ ;  $i^2 = -1$

Definición: (Conj. de números complejos)

$$\mathbb{C} = \{ a+bi \mid a,b \in \mathbb{R} \}$$

Observaciones:

- 1) Si  $a=0$  entonces  $0+bi = bi$  es un imaginario puro.
- 2) Si  $b=0$  entonces  $a+0i = a \in \mathbb{R}$ .
- 3) Los números complejos  $a+bi$  y  $a-bi$  se llaman complejos conjugados.

Propiedades:

1) Igualdad:

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow (a=c \wedge b=d)$$

2) Adición:

Sean  $Z_1 = (a,b)$  y  $Z_2 = (c,d)$  Entonces:

$$Z_1 + Z_2 = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$



3) Multiplicación:

Sea  $Z_1 = (a,b)$  y  $Z_2 = (c,d)$ . Entonces:

$$Z_1 Z_2 = (a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

4) Multiplicación por un escalar:

Sean  $Z = (a,b) \wedge \alpha \in \mathbb{R}$  Entonces:

$$\alpha Z = \alpha (a,b) = (\alpha a, \alpha b)$$

Definición:

(1) El Número complejo  $(1,0)$  se lo llama unidad real

(2) El Número complejo  $(0,1)$  se le llama unidad imaginaria

Forma canónica o rectangular de un Número Complejo:

1) Demostramos la equivalencia:

$$(a,b) = a + b_i$$

Demostración:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b)$$

$$\simeq = a(1,0) + b(0,1)$$

$$\simeq = a \cdot 1 + b \cdot i$$

$$\simeq = a + b_i$$

a la inversa:

$$a + b_i = a(1,0) + b(0,1) = (a,0) + (0,b) = (a,b)$$

2) Demostraremos la equivalencia:

$$i^2 = (-1,0)$$



Demostración: Como  $i = (0,1)$  entonces:

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$$

División de Nos. complejos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a,b)}{(c,d)} = \frac{a+b_i}{c+d_i} := \frac{a+b_i}{c+d_i} \cdot \frac{c-d_i}{c-d_i}$$

$$\% = \frac{ac - da_i + bc_i + bd}{c^2 + d^2}$$

$$\% = \frac{ac + bd + (bc - ad)_i}{c^2 + d^2}$$

$$\% = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

Módulo de un N<sup>o</sup> Complejo

Definición: Sea  $Z = (a,b)$   $Z \in \mathbb{C}$  ;  $a, b \in \mathbb{R}$

entonces  $|Z| = |(a,b)| = |a+b_i| = \sqrt{a^2+b^2}$  es el "módulo de Z",

además:  $|a + b_i| = 0 \Rightarrow (a=0 \wedge b = 0)$

EJEMPLOS:

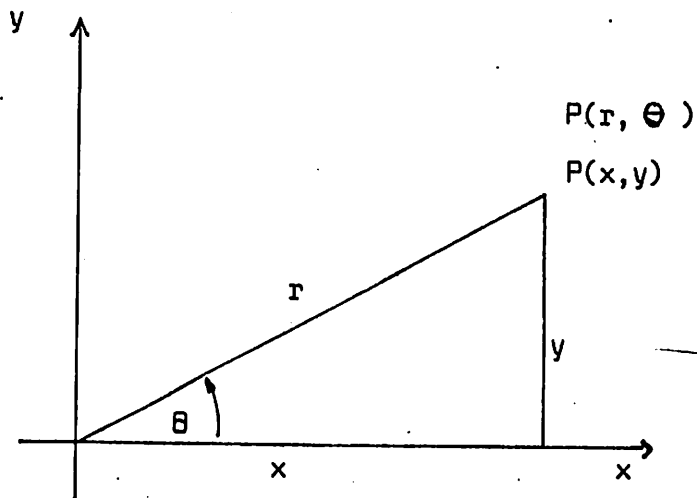
1)  $Z = (3,4)$ ; entonces  $|Z| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

2)  $Z = 1+2i$ ; entonces  $|Z| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$



$$3) \quad Z = 1-2i; \text{ entonces } |Z| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Forma trigonométrica o polar de un N° complejo



Recordemos que:

$$x = r \cdot \cos \theta \quad \wedge \quad y = r \cdot \text{sen } \theta$$

Por lo tanto el N° Complejo  $Z=(x,y)= x + iy$

se puede escribir como:

$$x + iy = r \cos \theta + i r \text{sen } \theta$$

$$x + i \cdot y = r [\cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta]$$

donde  $r$  (módulo de  $Z$ ) esta dado por:

$$\begin{cases} r = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{sen } \theta = \frac{y}{r}; \cos \theta = \frac{x}{r} \end{cases} \quad y,$$



Observación:

- 1) Al ángulo  $\theta$  lo llamaremos ángulo de  $Z = x + iy$  y esta medido en grados o radianes.
- 2) Llamaremos a: " $x+iy$ " forma rectangular o canónica de Z
- 3) Llamaremos a:  $r [\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta]$  forma trigonométrica o polar de Z.
- 4) En general:  

$$Z = x+iy = r [\cos (\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen} (\theta + 2k\pi)] ; k \in \mathbb{Z}$$

EJEMPLO:

- 1) Escribir  $Z = -1 - i\sqrt{3}$  en forma trigonométrica.

Solución:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad \wedge \quad \cos \theta = \frac{-1}{2}$$

$-60^\circ$ 
 $120^\circ$

como  $\theta \in$  III cuadrante; entonces  $\theta = 240^\circ$

$$\therefore -1 - i\sqrt{3} = 2 (\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$$

$$\text{o bien } -1 - i\sqrt{3} = 2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \right)$$

- 2) Expresar  $Z = 2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$  en forma rectangular:



Solución:  $\cos 150^\circ = \cos (180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\sin 150^\circ = \sin (180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

entonces:  $Z = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$

$$Z = 2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + i \frac{1}{2}\right)$$

$$Z = -\sqrt{3} + i$$

Teorema:

Sean  $Z_1 = r_1 [\cos \theta_1 + i \sin \theta_1]$

$$Z_2 = r_2 [\cos \theta_2 + i \sin \theta_2] ; \text{ entonces:}$$

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Demostración:

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)]$$

$$\% = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Teorema:

Si  $Z = r [\cos \theta + i \sin \theta]$  entonces

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{r} [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$$

Demostración:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{r} \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{r} \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta}$$



$$\therefore \frac{1}{z} = \frac{\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}{r(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)} = \frac{1}{r} (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)$$

$$\therefore \frac{1}{z} = \frac{1}{r} [\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)]$$

Teorema: Sean  $Z_1 = r_1 [\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1]$  y

$Z_2 = r_2 [\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2]$  entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + \operatorname{Sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

Demostración:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)} = \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)}{r_2} \frac{1}{\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos(-\theta_2) + i \operatorname{sen}(-\theta_2))] ]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

De la fórmula del producto se tiene que si  $Z_1 = Z_2$  y  $r_1 = r_2 = r$ ;  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$  entonces:

$$z^2 = \{r[(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]\}^2 = r^2 [\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta] \quad / \cdot z$$



$$z^3 = [r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^3 = r^3 [\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta]$$

El siguiente resultado general se obtiene por inducción matemática.

### Teorema:

Teorema de De Moivre, si  $n \in \mathbb{Z}$ ; entonces:

$$z^n = \{r [\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta]\}^n = r^n [\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta]$$

### EJEMPLO:

Expresar  $(\sqrt{3}+i)^8$  en la forma  $X+iy$

### Solución:

$$\sqrt{3} + i = r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \wedge \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{ó} \quad \theta = 30^\circ$$

$$(\sqrt{3}+i)^8 = r^8 \left[ \cos \theta \cdot \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \theta \cdot \frac{\pi}{6} \right] = 256 \left[ \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \right]$$

$$(\sqrt{3} + i)^8 = 256 \left[ -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = -128 - i \cdot 128 \sqrt{3}$$



Teorema:

Un N<sup>o</sup> complejo no cero  $Z = r [\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta]$  tiene para cualquier entero positivo  $n$ , precisamente  $n$  raíces  $n$ -ésimas distintas y estas se obtienen de la expresión:

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} \left[ \cos \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right]$$

Para  $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

EJEMPLO: Determinar las raíces cúbicas de  $-1$ .

Solución:

$$\begin{aligned} -1 &= \cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ \\ r &= \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1 \end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1} \left[ \cos \left( \frac{180^\circ + 2k \cdot \pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{180^\circ + 2k \pi}{3} \right) \right]$$

$$k = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{-1} = \cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{-1} = \cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ = -1$$

$$k = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{-1} = \cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$



## Ejercicios:

1) Expresar en forma trigonométrica:

a)  $1+i = (1, 1)$     (b)  $-2-2i = (-2, -2)$     (c)  $-\sqrt{3}+i = (-\sqrt{3}, 1)$

2) Expresar:  $2[\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ]$  en la forma rectangular: a+bi

3) Demostrar que:  $(1+i\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1+\sqrt{3}i)$

4) Encontrar  $\frac{1}{Z}$  si  $Z = 3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

5) Dividir:  $[12(\cos 52^\circ + i \sin 52^\circ)] : [4(\cos 7^\circ + i \sin 7^\circ)]$

6) Encontrar el valor de las siguientes expresiones en la forma rectangular a+bi, transformándolas primeramente a forma polar.

1)  $(1+i)^2$

2)  $\left[\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2$

3)  $\left[\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^3$

7) Use el Teorema de De-Moivre en los siguientes cálculos. Escriba la respuesta en la forma a+bi.

1)  $(\sqrt{2} \text{ cis } 10^\circ)^6$

2)  $(4 \text{ cis } 15^\circ)^3$

3)  $(-\sqrt{3}+i)^4 (1+i\sqrt{3})^3$

4)  $(1+i)^{-5}$



$$5) \frac{(1-i\sqrt{3})^3(1-i)^{-2}}{(1+i)^4(\sqrt{3}+i)^{-3}}$$

8) Encuentre las raíces n-ésimas que se indican, gráfíquelas en el plano complejo. ¿Qué puede observar?.

- 1) Raíces sextas de  $Z = 8 \text{ cis } 60^\circ$
- 2) Raíces cuartas de  $Z = 16 \text{ cis } 90^\circ$ .
- 3) Raíces cúbicas de  $Z = 1 + i\sqrt{3}$
- 4) Raíces cúbicas de  $Z = 8$
- 5) Raíces sextas de  $Z = i$
- 6) Raíces novenas de  $Z = -1+i$
- 7) Raíces cuartas de  $Z = 3 + 3i\sqrt{3}$

9) Resuelva las siguientes ecuaciones:

- 1)  $x^3 + 27 = 0$
- 2)  $x^5 + 32 = 0$
- 3)  $x^6 - i = 0$
- 4)  $x^3 + 125i = 0$
- 5)  $x^6 + 1 = 0$



## VECTORES

**Definición: (Vectores)**

Se llama "vector" en el espacio  $\mathbb{R}^3$  a un trío ordenado de números reales  $(X_1, X_2, X_3)$  y se denota por  $\vec{X}$  es decir:

$$\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$$

Un vector en el plano  $\mathbb{R}^2$  es un par ordenado

$$\vec{Y} = (Y_1, Y_2).$$

**Igualdad de Vectores:**

Sean  $\vec{X}$  ,  $\vec{Y}$   $\mathbb{R}^3$  tales que:

$$\vec{X} = (X_1, X_2, X_3) ; \vec{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3) \text{ entonces:}$$

$$\vec{X} = \vec{Y} \iff (X_1 = Y_1, X_2 = Y_2, X_3 = Y_3)$$

**Definición: (Componentes de un vector)**

Sea  $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$  un vector de  $\mathbb{R}^3$ ; los números reales  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$  se llaman las componentes del vector  $\vec{X}$ .

**Definición: (Suma de vectores)**

Sean  $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$  ;  $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$  entonces:

$$\vec{X} + \vec{Y} = (X_1+Y_1, X_2+Y_2, X_3+Y_3)$$

**Propiedades:**

$$1) \quad \vec{X} + \vec{Y} = \vec{Y} + \vec{X} \quad \forall \vec{X}, \vec{Y}$$



$$2) \quad (\vec{X} + \vec{Y}) + \vec{Z} = \vec{X} + (\vec{Y} + \vec{Z}) \quad \forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$$

$$3) \quad \vec{X} + \vec{0} = \vec{X} \quad \forall \vec{X} \quad (\vec{0} \text{ se llama vector nulo})$$

$$4) \quad \vec{X} + (-\vec{X}) = \vec{0}$$

**Definición:** (Multiplicación escalar)

Si  $\vec{X}$  es un vector y  $\alpha \in \mathbb{R}$  : entonces:

$$\alpha \vec{X} = \alpha (x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

Propiedades:

Sean  $\vec{X}, \vec{Y}$  vectores y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  entonces:

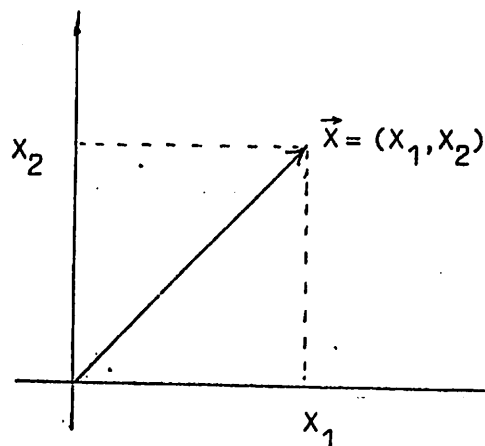
$$1) \quad 1 \cdot \vec{X} = \vec{X}$$

$$2) \quad \alpha(\beta \vec{X}) = (\alpha \beta) \vec{X}$$

$$3) \quad (\alpha + \beta) \vec{X} = \alpha \vec{X} + \beta \vec{X}$$

$$4) \quad \alpha(\vec{X} + \vec{Y}) = \alpha \vec{X} + \alpha \vec{Y}$$

**Interpretación Geométrica de 1 Vector:**



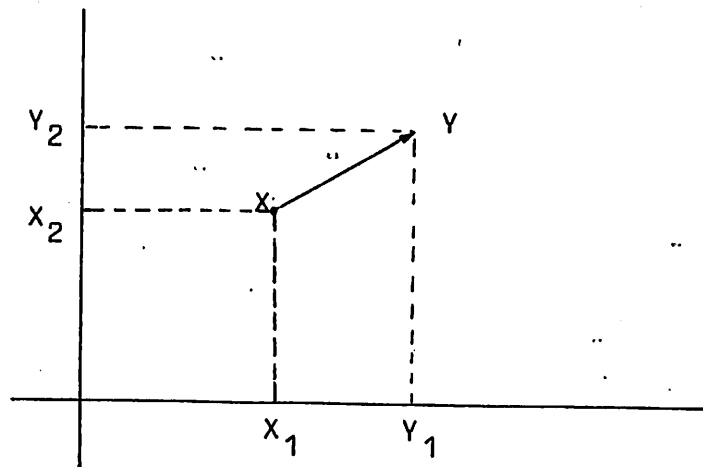
**Definición:** (Vector Geométrico)

Un vector geométrico  $\vec{XY}$  es un segmento de recta que une X con Y. Se dice que X es el punto inicial del vector e Y el punto final.

Además:

$$\begin{aligned}\vec{XY} &= Y - X = (Y_1, Y_2, Y_3) - (X_1, X_2, X_3) \\ &= (Y_1 - X_1, Y_2 - X_2, Y_3 - X_3)\end{aligned}$$

Si X es un punto de  $\mathbb{R}^2$  con coordenadas  $(X_1, X_2)$  e Y es un punto de coordenadas  $(Y_1, Y_2)$  entonces  $\vec{XY}$  es el vector siguiente:



**Definición:** (Equivalencia de vectores)

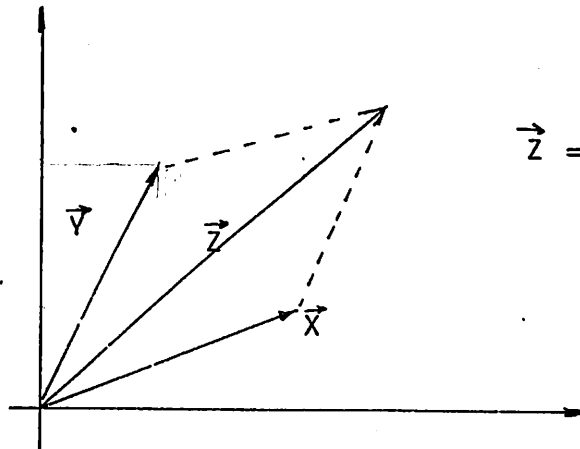
Si  $X = (X_1, X_2, X_3)$ ;  $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ ;  $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$  y  $W = (W_1, W_2, W_3)$  son los extremos de  $\vec{XY}$  y  $\vec{ZW}$  respectivamente, entonces:



$$\vec{X} \vec{Y} \sim \vec{Z} \vec{W} \iff (Y_1 - X_1 = W_1 - Z_1, Y_2 - X_2 = W_2 - Z_2, Y_3 - X_3 = W_3 - Z_3)$$

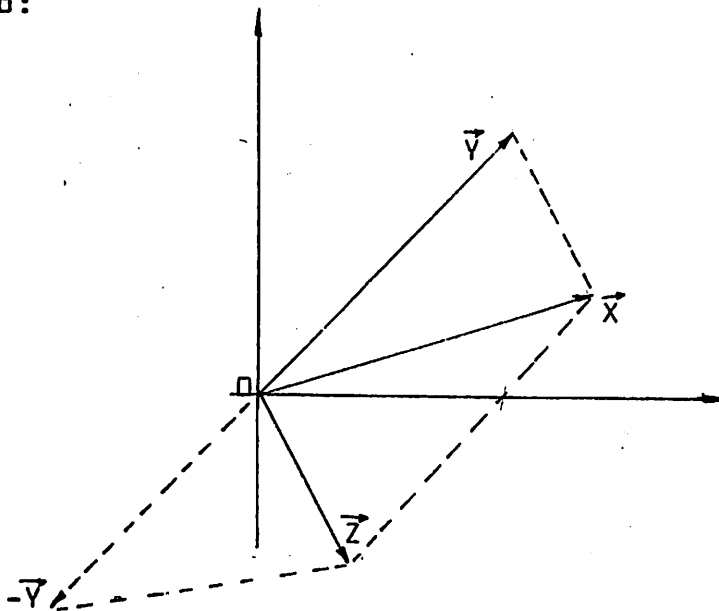
$$\text{es decir : } \vec{X} \vec{Y} \sim \vec{Z} \vec{W} \iff Y - X = W - Z$$

Representación Geométrica de la Adición de Vectores en el plano:



$$\vec{Z} = \vec{X} + \vec{Y}$$

Representación Geométrica de la Substracción de Vectores en el Plano:



$$\vec{Z} = \vec{X} - \vec{Y}$$

$$\vec{OZ} = \vec{X} - \vec{Y}$$

**Definición:** (Producto escalar o producto punto)

Sean  $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$  ;  $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$  se define el producto escalar de los vectores  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$  denotado por  $\vec{X} \cdot \vec{Y}$  al producto:

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3$$

Observación:

El producto escalar de dos vectores es un escalar y no un vector.

Propiedades:

Sean  $\vec{X}$  ,  $\vec{Y}$  ,  $\vec{Z}$  vectores; entonces:

- 1)  $\vec{X} \cdot \vec{Y} = \vec{Y} \cdot \vec{X}$
- 2)  $\vec{X} \cdot (\vec{Y} + \vec{Z}) = \vec{X} \cdot \vec{Y} + \vec{X} \cdot \vec{Z}$
- 3)  $\vec{Z} \cdot (\vec{X} \cdot \vec{Y}) = (\vec{Z} \cdot \vec{X}) \cdot \vec{Y}$
- 4)  $\vec{X} \cdot \vec{X} > 0$  ssí  $\vec{X} \neq \vec{0}$
- 5)  $\vec{X} \cdot \vec{X} = 0$  ssí  $\vec{X} = \vec{0}$

**Teorema:**

Sean  $\vec{X}$  ;  $\vec{Y}$  vectores entonces:

$$(\vec{X} \cdot \vec{Y})^2 \leq (\vec{X} \cdot \vec{X}) (\vec{Y} \cdot \vec{Y})$$

llamada desigualdad de "Cauchy - Schwartz".



Definición: (Norma de un vector)

Sea  $\vec{X}$  un vector, su "longitud o norma" denotada por  $\|\vec{X}\|$  está dada por:

$$\|\vec{X}\| = (\vec{X} \cdot \vec{X})^{1/2}$$

Observación:

1) Si  $\vec{X} \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\vec{X} = (X_1, X_2)$  entonces:

$$\|\vec{X}\| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$$

2) Si  $\vec{X} \in \mathbb{R}^3$  tal que  $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$  entonces:

$$\|\vec{X}\| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}$$

Propiedades:

Sea  $\vec{X}$  vector y  $\alpha \in \mathbb{R}$  entonces:

1)  $\|\vec{X}\| > 0$  ssi  $\vec{X} \neq \vec{0}$

2)  $\|\vec{X}\| = 0$  ssi  $\vec{X} = \vec{0}$

3)  $\|\alpha \vec{X}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{X}\|$

Observación:

La desigualdad de Cauchy - Schwartz se puede expresar como:

$$(\vec{X} \cdot \vec{Y})^2 \leq \|\vec{X}\|^2 \cdot \|\vec{Y}\|^2$$



o bien:

$$|\vec{X} \cdot \vec{Y}| \leq ||X|| \cdot ||Y||$$

**Teorema:**Sean  $\vec{X}$  ,  $\vec{Y}$  vectores entonces:

$$||\vec{X} + \vec{Y}|| \leq ||\vec{X}|| + ||\vec{Y}||$$

llamada desigualdad triangular.

Demostración:

$$\begin{aligned} ||\vec{X} + \vec{Y}||^2 &= (\vec{X} + \vec{Y}) \cdot (\vec{X} + \vec{Y}) = \vec{X} \cdot \vec{X} + 2\vec{X} \cdot \vec{Y} + \vec{Y} \cdot \vec{Y} \\ &= ||\vec{X}||^2 + 2\vec{X} \cdot \vec{Y} + ||\vec{Y}||^2 \\ &\leq ||\vec{X}||^2 + 2|\vec{X} \cdot \vec{Y}| + ||\vec{Y}||^2 \\ &\leq ||\vec{X}||^2 + 2||\vec{X}|| \cdot ||\vec{Y}|| + ||\vec{Y}||^2 \\ &\leq (||\vec{X}|| + ||\vec{Y}||)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore ||\vec{X} + \vec{Y}|| \leq ||\vec{X}|| + ||\vec{Y}||$$

**Definición:**

Los vectores  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$  son perpendiculares si y sólo si :  
 $\vec{X} \cdot \vec{Y} = 0$ .

Observación:

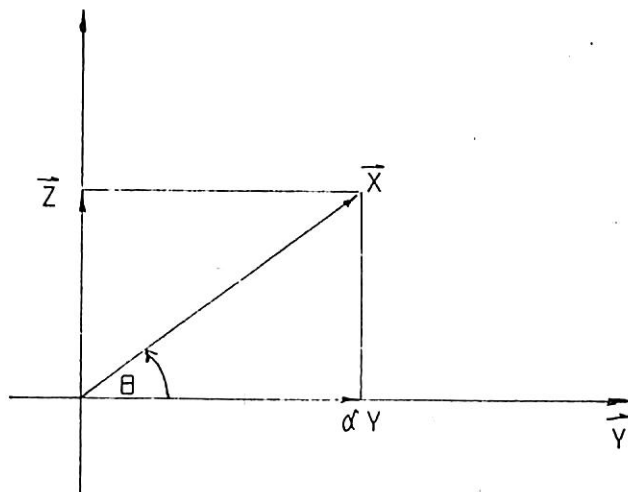
$\vec{X}$  e  $\vec{Y}$  son perpendiculares si y sólo si:

$$||\vec{X} + \vec{Y}||^2 = ||\vec{X}||^2 + ||\vec{Y}||^2$$



## Interpretación Geométrica del Producto Escalar:

Sean  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$  dos vectores que forman un ángulo  $\theta$  tal que :  $0 < \theta < \pi/2$ .



$\vec{Z}$  es perpendicular con  $\vec{Y}$

Se tiene que:

$$\vec{X} = \alpha \cdot \vec{Y} + \vec{Z}$$

donde  $\alpha \vec{Y}$  es la proyección de  $\vec{X}$  sobre  $\vec{Y}$ ; usando el producto escalar para expresar  $\alpha$  en función de  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$ , se tiene:

$$(\alpha \vec{Y} + \vec{Z}) \cdot \vec{Y} = \vec{X} \cdot \vec{Y}$$

$$\alpha \vec{Y} \cdot \vec{Y} + \vec{Z} \cdot \vec{Y} = \vec{X} \cdot \vec{Y}$$

pero  $\vec{Z} \cdot \vec{Y} = 0$  Pues  $\vec{Z} \perp \vec{Y}$

$$\therefore \alpha \vec{Y} \cdot \vec{Y} = \vec{X} \cdot \vec{Y}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\vec{X} \cdot \vec{Y}}{\vec{Y} \cdot \vec{Y}} = \frac{\vec{X} \cdot \vec{Y}}{\|\vec{Y}\|^2}$$



Por otro lado se tiene que:

$$\cos \theta = \frac{\|\alpha \vec{Y}\|}{\|\vec{X}\|} = \frac{|\alpha| \cdot \|\vec{Y}\|}{\|\vec{X}\|} = \frac{\alpha \|\vec{Y}\|}{\|\vec{X}\|}$$

$$\text{luego } \cos \theta = \frac{\vec{X} \cdot \vec{Y} \cdot \|\vec{Y}\|}{\|\vec{Y}\|^2 \cdot \|\vec{X}\|} = \frac{\vec{X} \cdot \vec{Y}}{\|\vec{X}\| \cdot \|\vec{Y}\|}$$

o bién:

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = \|\vec{X}\| \cdot \|\vec{Y}\| \cos \theta$$

De aquí que si  $\theta = 90^\circ \implies \cos \theta = 0$

( $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$  son perpendiculares):

$$\text{Luego: } \vec{X} \cdot \vec{Y} = 0 \iff \vec{X} \perp \vec{Y}$$

**Definición:** (Vectores unitarios)

Se llaman vectores unitarios, designados por  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  a los siguientes vectores:

$$\hat{i} = (1, 0, 0) ; \hat{j} = (0, 1, 0) ; \hat{k} = (0, 0, 1)$$

**Teorema:**

Todo vector  $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3$  se puede expresar como:

$$X = X_1 \hat{i} + X_2 \hat{j} + X_3 \hat{k}$$

**Definición:** (Producto vectorial o producto Cruz)

Sean  $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$  e  $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$  dos vectores de  $\mathbb{R}^3$ .



El producto vectorial de los vectores  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$  que denotaremos por  $\vec{X} \times \vec{Y}$  se define como:

$$\vec{X} \times \vec{Y} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix}$$

o bién:  $\vec{X} \times \vec{Y} = (X_2Y_3 - X_3Y_2, X_3Y_1 - X_1Y_3, X_1Y_2 - X_2Y_1)$

Propiedad:

Para todo vector  $\vec{X}$ ,  $\vec{Y}$ ,  $\vec{Z} \in \mathbb{R}^3$  y para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se tiene que:

- 1)  $\vec{X} \times \vec{Y} = -(\vec{Y} \times \vec{X})$
- 2)  $\vec{X} \times (\vec{Y} + \vec{Z}) = \vec{X} \times \vec{Y} + \vec{X} \times \vec{Z}$
- 3)  $\alpha(\vec{X} \times \vec{Y}) = (\alpha\vec{X}) \times \vec{Y}$
- 4)  $\vec{X} \cdot (\vec{X} \times \vec{Y}) = 0$
- 5)  $\vec{Y} \cdot (\vec{X} \times \vec{Y}) = 0$
- 6)  $\|\vec{X} \times \vec{Y}\|^2 = \|\vec{X}\|^2 \|\vec{Y}\|^2 - (\vec{X} \cdot \vec{Y})^2$
- 7)  $\vec{X} \times \vec{Y} = 0 \iff \vec{X} = \alpha\vec{Y} \quad \forall \alpha \neq 0$

( $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$  son vectores paralelos)

Observación:

- 1) De la definición se tiene que:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad ; \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \quad ; \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$



Como:  $\|\vec{X} \times \vec{Y}\|^2 = \|\vec{X}\|^2 \|\vec{Y}\|^2 - (\vec{X} \cdot \vec{Y})^2$

entonces:

$$\|\vec{X} \times \vec{Y}\|^2 = \|\vec{X}\|^2 \|\vec{Y}\|^2 - \|\vec{X}\|^2 \|\vec{Y}\|^2 \cos^2 \theta$$

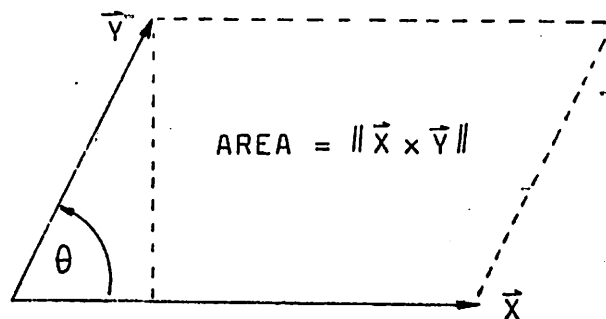
$$\% = \|\vec{X}\|^2 \|\vec{Y}\|^2 - \|\vec{X}\|^2 \|\vec{Y}\|^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$\% = \|\vec{X}\|^2 \|\vec{Y}\|^2 \text{ Sen}^2 \theta$$

Luego:

$$\|\vec{X} \times \vec{Y}\| = \|\vec{X}\| \|\vec{Y}\| \text{ Sen } \theta$$

Entonces, podemos decir que la longitud o norma de  $\vec{X} \times \vec{Y}$  puede interpretarse como el área de un paralelogramo cuyos lados son:  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$ , es decir:



**Definición:** (Vector unitario)

El vector unitario  $\hat{X}$  en la dirección del vector  $\vec{X}$  está dado por:

$$\hat{X} = \frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$$

Obs.:  $\|\hat{X}\| = 1$



$$\text{Como: } \|\vec{X} \times \vec{Y}\|^2 = \|\vec{X}\|^2 \|\vec{Y}\|^2 - (\vec{X} \cdot \vec{Y})^2$$

entonces:

$$\|\vec{X} \times \vec{Y}\|^2 = \|\vec{X}\|^2 \|\vec{Y}\|^2 - \|\vec{X}\|^2 \|\vec{Y}\|^2 \cos^2 \theta$$

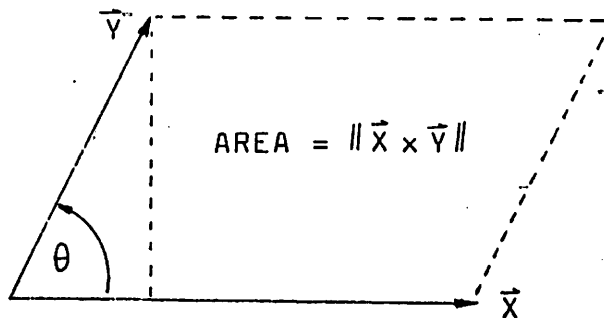
$$\% = \|\vec{X}\|^2 \|\vec{Y}\|^2 - \|\vec{X}\|^2 \|\vec{Y}\|^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$\% = \|\vec{X}\|^2 \|\vec{Y}\|^2 \text{ Sen}^2 \theta$$

Luego:

$$\|\vec{X} \times \vec{Y}\| = \|\vec{X}\| \|\vec{Y}\| \text{ Sen } \theta$$

Entonces, podemos decir que la longitud o norma de  $\vec{X} \times \vec{Y}$  puede interpretarse como el área de un paralelogramo cuyos lados son:  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$ , es decir:



**Definición:** (Vector unitario)

El vector unitario  $\hat{X}$  en la dirección del vector  $\vec{X}$  está dado por:

$$\hat{X} = \frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$$

Obs.:  $\|\hat{X}\| = 1$

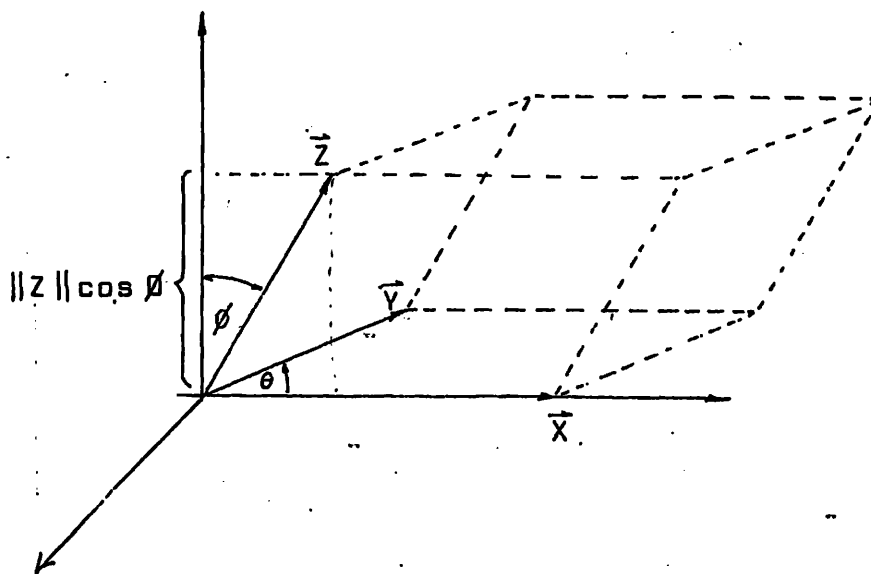


Observación:

Si combinamos el producto escalar y el producto vectorial, tenemos:

$$(\vec{X} \times \vec{Y}) \cdot \vec{Z}$$

Este producto doble, puede interpretarse como el volumen del paralelepípedo determinado por  $\vec{X}$ ,  $\vec{Y}$ ,  $\vec{Z}$ . En efecto, el área de la base es  $\|\vec{X} \times \vec{Y}\|$  y la altura es  $\|\vec{Z}\| \cos \phi$ .



$$(\vec{X} \times \vec{Y}) \cdot \vec{Z} = \|\vec{X} \times \vec{Y}\| \cdot \|\vec{Z}\| \cos \phi$$

**Ejercicios:**

- 1) Demostrar que:

$$(\vec{X} \times \vec{Y}) \cdot \vec{Z} = (\vec{Y} \times \vec{Z}) \cdot \vec{X} = (\vec{Z} \times \vec{X}) \cdot \vec{Y}$$



2) Demostrar que:

$$(\vec{X} \cdot \vec{Y})^2 \leq (\vec{X} \cdot \vec{X})(\vec{Y} \cdot \vec{Y})$$

Demostración:

Si  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$  son nulos la desigualdad es válida.

Si  $\vec{X}$  e  $\vec{Y}$  son ambos vectores no nulos y si consideramos:

$$\vec{Z} = \alpha \vec{X} - \beta \vec{Y} \text{ donde}$$

$$\alpha = \vec{Y} \cdot \vec{Y} \quad ; \quad \beta = \vec{X} \cdot \vec{Y}$$

y como  $\vec{Z} \cdot \vec{Z} \geq 0$  entonces:

$$\vec{Z} \cdot \vec{Z} = (\alpha \vec{X} - \beta \vec{Y}) \cdot (\alpha \vec{X} - \beta \vec{Y}) \geq 0$$

$$\alpha^2 (\vec{X} \cdot \vec{X}) - 2 \alpha \beta (\vec{X} \cdot \vec{Y}) + \beta^2 (\vec{Y} \cdot \vec{Y}) \geq 0$$

$$(\vec{Y} \cdot \vec{Y})^2 (\vec{X} \cdot \vec{X}) - 2 (\vec{Y} \cdot \vec{Y})(\vec{X} \cdot \vec{Y})(\vec{X} \cdot \vec{Y}) + (\vec{X} \cdot \vec{Y})^2 (\vec{Y} \cdot \vec{Y}) \geq 0$$

$$(\vec{Y} \cdot \vec{Y})^2 (\vec{X} \cdot \vec{X}) - 2(\vec{Y} \cdot \vec{Y})(\vec{X} \cdot \vec{Y})^2 + (\vec{X} \cdot \vec{Y})^2 (\vec{Y} \cdot \vec{Y}) \geq 0$$

$$(\vec{Y} \cdot \vec{Y})^2 (\vec{X} \cdot \vec{X}) - (\vec{X} \cdot \vec{Y})^2 (\vec{Y} \cdot \vec{Y}) \geq 0$$

Como  $\vec{Y} \cdot \vec{Y} > 0$  entonces:

$$(\vec{X} \cdot \vec{X})(\vec{Y} \cdot \vec{Y}) - (\vec{X} \cdot \vec{Y})^2 \geq 0$$

$$\therefore -(\vec{X} \cdot \vec{Y})^2 \geq -(\vec{X} \cdot \vec{X})(\vec{Y} \cdot \vec{Y})$$

$$\therefore (\vec{X} \cdot \vec{Y})^2 \leq (\vec{X} \cdot \vec{X})(\vec{Y} \cdot \vec{Y})$$



Ejercicios:

1) Calcule la norma de cada uno de los vectores:

$$1) \vec{V}_1 = (-1, 7)$$

$$2) \vec{V}_2 = (-8, 7, 4)$$

$$3) \vec{V}_3 = (3, 4, 5)$$

2) Sean  $\vec{u} = (1, -3, 2)$  ;  $\vec{v} = (1, 1, 0)$  y  $\vec{w} = (2, 2, -4)$

Determine:

$$1) \|\vec{u} + \vec{v}\|$$

$$2) \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

$$3) \|-2\vec{u}\| + 2\|\vec{u}\|$$

$$4) \frac{1}{\|\vec{w}\|} \cdot \vec{w}$$

$$5) \left\| \frac{1}{\|\vec{w}\|} \cdot \vec{w} \right\|$$

3) Si  $\vec{v} = (1, 1, 1)$  Hállese  $\hat{v}$  y  $\|\hat{v}\|$

4) Calcule  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  si:

$$\vec{u} = (1, -3, 7) \quad ; \quad \vec{v} = (8, -2, -2)$$

$$\vec{u} = (-7, -3) \quad \text{y} \quad \vec{v} = (0, 1)$$

Calcule además el ángulo  $\theta$  entre  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

5) Si  $\vec{u} = (1, 2)$  ;  $\vec{v} = (4, -2)$  y  $\vec{w} = (6, 0)$

Determine:

$$1) \vec{u} \cdot (7\vec{v} + \vec{w})$$



$$2) \|\vec{u}\| \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$$

6) Demostrar que:

$$1) \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$$

$$2) \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \frac{1}{4} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

7) Sean  $\vec{u} = (2, -1, 3)$

$$\vec{v} = (0, 1, 7)$$

$$\vec{w} = (1, 4, 5)$$

Calcule:

$$1) \vec{v} \times \vec{w}$$

$$2) \vec{u} \times (\vec{v} - 2\vec{w})$$

8) Determine un vector que sea ortogonal a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  simultáneamente siendo:

$$\vec{u} = (-7, 3, 1) \text{ y } \vec{v} = (2, 0, 4)$$

9) Encuentre el área del  $\Delta$  determinado por los puntos  $P_1(2, 2, 0)$ ,  $P_2(-1, 0, 2)$  y  $P_3(0, 4, 3)$

10) Demostrar la Igualdad de Lagrange:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$$



LIMITES

## Noción Intuitiva de Límite:

Sea  $f$  una función real definida de la siguiente manera:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} ; f(x) = 2x+1$$

Estudiamos  $f(x)$  para valores de  $x$  cercanos a 1.

$x$	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x)$	2.4	2.6	2.8	3	3.2	3.4	3.6	3.8	4

De la tabla podemos decir que a medida que los valores de  $x$  tienden al valor 1; los valores de  $f(x)$  tienden al valor 3, y describimos:

$f(x) \longrightarrow 3$  cuando  $x \longrightarrow 1$  o bien:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \text{ donde } f(x) = 2x+1$$

Ahora bien puede ocurrir que la función no esté definida en un punto determinado, y sin embargo podemos estudiar los valores de  $f(x)$  cuando  $x$  tiendan a ese punto, tal es el caso de la función:

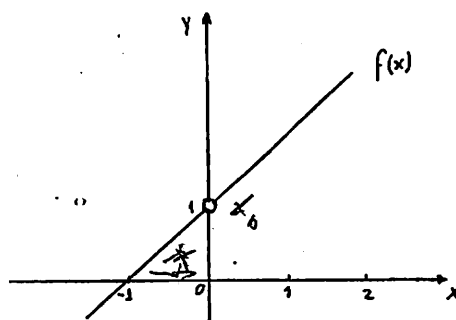
$$f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ m } f(x) = \frac{x^2 + x}{x}$$

$x$	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3
$f(x)$	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3

De manera que:



$f(x) \longrightarrow 1$  cuando  $x \rightarrow 0$



**Definición: (Límite)**

Dados una función real  $f$ ;  $x_0, L \in \mathbb{R}$ , decimos que el "Límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$  es  $L$ ", si:

$\forall \varepsilon > 0$ ;  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  existe  $\delta > 0$ ;  $\delta \in \mathbb{R}$  tal que:

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Observación:

1) La definición anterior se puede abreviar:

i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  ó

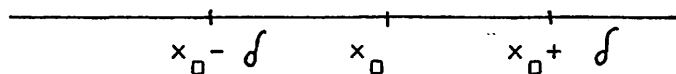
ii)  $f(x) \longrightarrow L$  cuando  $x \longrightarrow x_0$  ó

iii)  $x \longrightarrow x_0 \implies f(x) \longrightarrow L$

2) Recordemos que:

$$|x - x_0| < \delta \iff -\delta < x - x_0 < \delta$$

$$\iff x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$



3) Además:  $0 < |x - x_0|$  significa que  $x$  no puede ser igual a  $x_0$ .

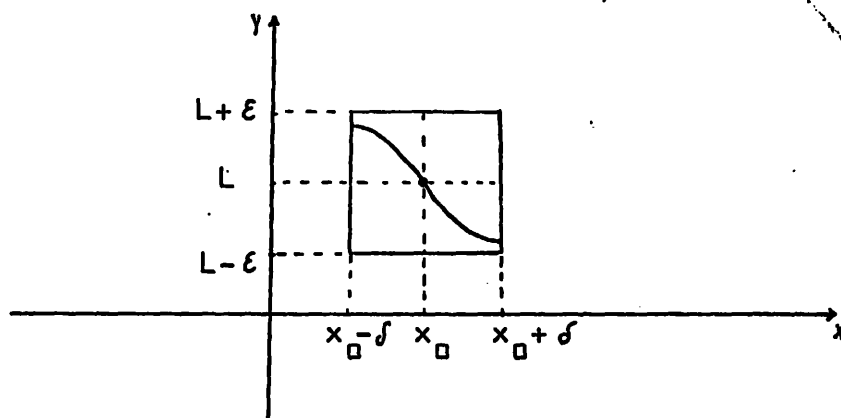


4) Análogamente a (2) se tiene que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$$

$$\iff L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

5) Graficando la situación:



Ej.:

1) Si  $f(x) = 2x+3$  comprobar que:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$

Solución:

$$|f(x) - L| = |2x+3-5| = |2x-2| = 2|x-1| < \varepsilon$$

Luego:  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que:

$$0 < |x-1| < \delta \implies |f(x) - 5| < \varepsilon$$

donde  $\delta = \varepsilon/2$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$$

2) Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = 1$

Solución:

$$|f(x) - L| = |x^2 - 3 - 1| = |x^2 - 4| = |x-2| |x+2|$$



$$\begin{aligned}
 \text{Si } x \longrightarrow 2 & \implies |x-2| < \delta \\
 & \implies 2 - \delta < x < 2 + \delta \\
 & \implies 1 < x < 3 \quad (\text{Si } \delta < 1) \\
 & \implies -5 < 3 < x+2 < 5 \\
 & \implies |x+2| < 5
 \end{aligned}$$

$$\text{Luego: } |f(x) - L| = |x-2| |x+2| < 5\delta$$

Luego:  $\forall \epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que:

$$0 < |x-2| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

$$\text{donde } \epsilon = 5\delta \implies \delta = \epsilon/5$$

$$\text{luego: } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

Definición: (Límites laterales)

1) Si para cualquier  $\epsilon > 0$  dado,  $\exists \delta > 0$  tal que:

$$0 < x_0 - x < \delta \implies |f(x) - L_1| < \epsilon \quad \text{entonces}$$

" $L_1$  es el límite por la izquierda de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$ ",

y se denota por:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_1$$

2) Si para cualquier  $\epsilon > 0$ ;  $\exists \delta > 0$  tal que:

$$0 < x - x_0 < \delta \implies |f(x) - L_2| < \epsilon; \text{ entonces:}$$

" $L_2$  es el límite por la derecha de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$ ", y

se denota por:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_2$$



Observación:

1) La desigualdad  $0 < x_0 - x < \delta \iff x_0 - \delta < x < x_0$ ; de modo que aquí los valores de  $x$  se restringen a valores menores que  $x_0$ ; además  $f(x)$  puede o no estar definida para  $x \geq x_0$ .

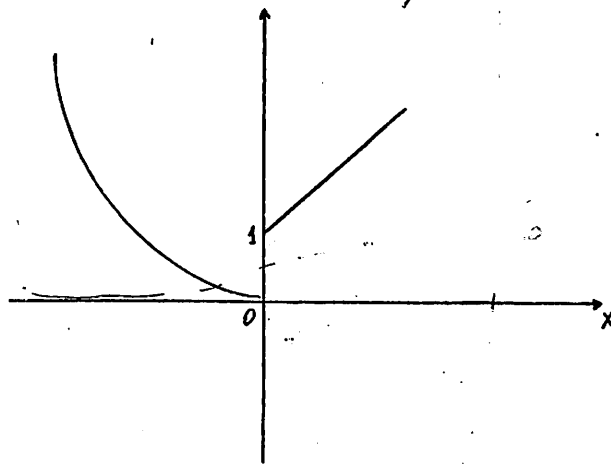
2) La desigualdad:  $0 < x - x_0 < \delta \iff 0 < x < x_0 + \delta$ ; de modo que aquí los valores de  $x$  se restringen a valores mayores que  $x_0$ ; además  $f(x)$  puede o no estar definida para  $x \leq x_0$ .

3) Para que exista  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  es necesario y suficiente que existan  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  que sean iguales.

Ej.:

Sea la función  $f$  definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{Si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{Si } x < 0 \end{cases}$$



Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

Luego  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe



**Teorema:** (Límite de una constante)

Si  $f(x) = C$  ;  $C \in \mathbb{R}$  entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C$$

**Teorema:** (Límite de la func. identidad)

Si  $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$  entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$$

**Teorema:** (Lím. de una cte por una función)

Sean  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  ;  $C \in \mathbb{R}$  , entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} Cf(x) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C \cdot L$$

**Teorema:** (Algebra de límites)

Sean  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$  ;  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$  ; entonces:

$$i) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$$

$$ii) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$$

$$iii) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L_1}{L_2} ; L_2 \neq 0$$

**Teorema:** (Teo. del sandwich)

Sean  $f$  y  $g$  tales que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$  y

supóngase que existe  $h$  tal que:



$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x$  próximo a  $x_0$  entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$$

Teorema: (Límite de una raíz)

Si  $n \in \mathbb{Z}^+$  y  $f$  es tal que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

entonces:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ , si  $n$  es par  $L$  debe ser positivo

vo.

Teorema: de ~~TRUQUE~~ ~~LETRAS~~

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1$  entonces;

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = L^{L_1}$  siempre que:

$$L^{L_1} \neq 0^0, \infty^0, \infty^\infty$$

Definición: (Límite al infinito)

Decimos que la función real  $f$  tiende al límite  $L$  cuando  $x$  tiende a  $\infty$  si:

$\forall \varepsilon > 0$  existe  $N > 0$  tal que:

$\forall x : |x| > N \implies |f(x) - L| < \varepsilon$ ; y escribimos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

Ej.:

1) Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$



Solución:

$$|f(x) - L| = \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

$$\text{Si } x \longrightarrow \infty \implies |x| > N \implies \left| \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{N} = \varepsilon$$

Luego:

$$|x| > N \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\text{donde } N = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$2) \quad \text{Calcular: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 + x^2}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1}$$

$$\therefore = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

Definición: (Límites laterales)

1) Decimos que "f(x) tiende a L cuando x tiende a infinito por la izquierda", si:  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $N > 0$  tal que:

$$\forall x : x < -N \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\text{y escribimos: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

2) Decimos que "f(x) tiende a L cuando x tiende a infinito por la derecha", si:

$\forall \varepsilon > 0$  existe  $N > 0$  tal que:

$$\forall x : x > N \implies |f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{y escribimos:}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Observación:

$$\text{Sean } p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 ; a_n \neq 0$$

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0 ; b_m \neq 0$$

entonces:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0 \quad \text{si } n < m$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \infty \quad \text{si } n > m$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n}{b_m} \quad \text{si } n = m$$

4) Para calcular el límite de  $\frac{p(x)}{q(x)}$  se divide cada término de la expresión por  $x$  elevado al exponente mayor, en el denominador y enseguida se aplica el límite.

Ej.:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^3 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{4}{x^3}}$$

$$\therefore = \frac{0}{1} = 0$$



## Límite de funciones trigonométricas:

## Teorema:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{cos} x = \operatorname{cos} x_0$$

## Demostración:

$$\begin{aligned} 1) \quad |f(x) - L| &= |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| \\ &= \left| 2 \operatorname{sen} \left( \frac{x-x_0}{2} \right) \operatorname{cos} \left( \frac{x+x_0}{2} \right) \right| \\ &\leq 2 \left| \operatorname{sen} \left( \frac{x-x_0}{2} \right) \right| \\ &< 2 \left| \frac{x-x_0}{2} \right| \\ &= |x - x_0| < \varepsilon \end{aligned}$$

Luego  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que:

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

donde  $\delta = \varepsilon$

$$\begin{aligned} 2) \quad |f(x) - L| &= |\operatorname{cos} x - \operatorname{cos} x_0| \\ &= \left| -2 \operatorname{sen} \left( \frac{x+x_0}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{x-x_0}{2} \right) \right| \\ &= \left| -2 \left| \operatorname{sen} \left( \frac{x+x_0}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{x-x_0}{2} \right) \right| \right| \\ &\leq 2 \left| \operatorname{sen} \left( \frac{x-x_0}{2} \right) \right| \\ &< 2 \left| \frac{x-x_0}{2} \right| \\ &= |x - x_0| < \varepsilon \end{aligned}$$



Luego  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que:

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

donde  $\delta = \varepsilon$

Ej.:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{cos} x = \operatorname{cos} 0 = 1$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{cos} x = \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Teorema:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

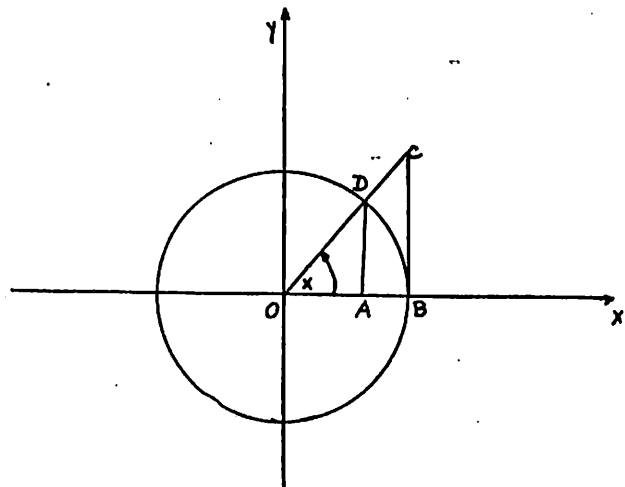
Demostración:

$$r = \overline{OD} = 1$$

$$\overline{OA} = \operatorname{cos} x$$

$$\overline{AD} = \operatorname{sen} x$$

$$\overline{BC} = \operatorname{tg} x$$



De la figura se tiene que:

$$\text{Area } \triangle OAD < \text{Area sector } OBD < \text{Area } \triangle OBC$$



$$\frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{AC} < \frac{1}{2} \overline{OB} \cdot \widehat{BD} < \frac{1}{2} \overline{OB} \cdot \overline{BC}$$

$$\frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x < \frac{1}{2} 1 \cdot \operatorname{tg} x$$

$$\sin x \cos x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$  y por el teo. del sandwich se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Análogamente se demuestra para :  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

Ej.:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 5 \frac{\sin 5x}{5x}$$

$$\therefore = 5 \cdot \lim_{5x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 5x}{5x} \right)$$

$$\therefore = 5 \cdot 1 = 5$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin 5x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20}{3} \cdot \frac{\sin 5x}{5x}$$

$$\therefore = \frac{20}{3} \lim_{5x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 5x}{5x} \right)$$

$$\therefore = \frac{20}{3} \cdot 1 = \frac{20}{3}$$



Otros límites importantes:

Teorema:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a) \quad ; \quad a > 1$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Ej.:

Calcular  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

Solución:

Sea  $x = 2y \implies (x \rightarrow \infty \implies y \rightarrow \infty)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2y}\right)^{2y}$$

$$\therefore = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$$

$$\therefore = e \cdot e = e^2$$

Teorema:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{x}\right)^x = e^n$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + nx\right)^{\frac{1}{x}} = e^n$$



## Ejercicios:

I. Aplicando la definición de límite, demostrar que:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} 3x = 6$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + x) = 12$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} (4x^2 + 1) = 5$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$$

II. Calcular los siguientes límites:

$$①) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x^3 + 1}$$

$$\text{Resp.: } -7/3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$\text{Resp.: } 0 /$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$$

$$\text{Resp.: } \alpha/\beta$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}$$

$$\text{Resp.: } 1/2 /$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$\text{Resp.: } 3 /$$

$$⑥) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{3x^3 - 5}$$

$$\text{Resp.: } 4/3 /$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$$

$$\text{Resp.: } 1/2$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$$

$$\text{Resp.: } 1/3$$

$$⑨) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$$

$$\text{Resp.: } 1 /$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right]$$

$$\text{Resp.: } -1$$



- 11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$  Resp.:  $1/2$  ✓
- 12)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+p^2} - p}{\sqrt{x^2+q^2} - q}$  Resp.:  $q/p$  ✓
- 13)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$  Resp.:  $2\sqrt{2}/3$
- 14)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$  Resp.:  $1$
- 15)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$  Resp.:  $0$
- 16)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$  Resp.:  $2/\sqrt{2}$
- 17)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a}$  Resp.:  $\operatorname{sen} a$
- 18)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$  Resp.:  $-\operatorname{sen} a$
- 19)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos 2x}$  Resp.:  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 20)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\operatorname{sen}(x - \pi/3)}$  Resp.:  $\sqrt{3}$
- 21)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$  Resp.:  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 22)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$  Resp.:  $1/e$
- 23)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+5}$  Resp.:  $e$



$$24) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$$

Resp.: e

$$25) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$$

Resp.:  $1/2\sqrt{a}$ 

$$26) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin^2 x - \sin^2 2}{x^2 - 4}$$

Resp.:  $\frac{1}{4} \sin 2 \cos 2$ 

$$27) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

Resp.: e

$$28) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2a^x - 2}{4x}$$

Resp.:  $\frac{1}{a} \ln a$ 

$$29) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$$

Resp.:  $\ln \left( \frac{a}{b} \right)$ 

III. Calcular los siguientes límites:

1) Suponiendo  $1 + x = y^6$  hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

$$2) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x-2}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} \right)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x) \quad \sim \frac{1}{2}$$

$$10) \lim_{n \rightarrow \infty} (n \sin \pi/n)$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} (x \sin 1/x)$$



$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}{x}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x - \operatorname{sen} 2x}{x + \operatorname{sen} 3x} \right)$$

IV. Analizar la existencia de los siguientes límites:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{|x|}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} |x|$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{si} \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ x+1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{|x|}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{|x-2|}$$

V. Calcular los límites:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\log(1+10x)}{x} \right]$$

Resp.:  $10 / \log e$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right]$$

Resp.: 1

Definición: (Continuidad en un punto) \*

Sea  $f$  una función real y  $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ , se dice que  $f$  es continua en  $x = x_0$  si:

i)  $f(x_0)$  está definida

ii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

iii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$



Ejs.:

1) Vimos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$  ; por lo tanto la función  $f(x)=x$  es continua en  $x = x_0$ .

2) Vimos también que:

$$i) \lim_{x \rightarrow x_0} \text{sen } x = \text{sen } x_0$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow x_0} \text{cos } x = \text{cos } x_0$$

Luego las funciones  $f(x) = \text{sen } x$  ;  $g(x) = \text{cos } x$  son continuas en  $x = x_0$

3) La función  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$  no es continua en  $x = 0$  pues no existe  $f(0)$

4) La función  $f(x) = x^2 + 1$  es continua en  $x = 2$ , pues:

$$i) \exists f(2) = 5$$

$$ii) \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

Observación:

La definición anterior se puede también expresar de la manera siguiente:

Sea  $f$  una función real y  $x_0 \in \text{Dom } f$ , se dice que  $f$  es continua en  $x = x_0$  si:

Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$



Definición: (Continuidad en un intervalo)

i) Se dice que  $f$  es continua en un intervalo  $]a,b[$  si  $f$  es continua en todo punto del intervalo  $]a,b[$ .

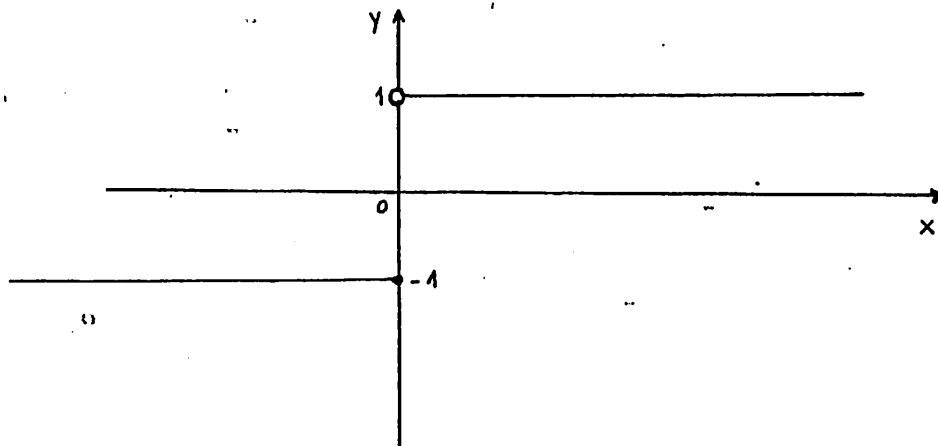
ii) Se dice que  $f$  es continua en un intervalo  $[a,b]$  si  $f$  es continua en  $]a,b[$  y además es continua a la derecha en  $a$  ( $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ) y es continua a la izquierda en  $b$  ( $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ ).

Ej.:

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

esta función puede también escribirse:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



La función es continua por la izquierda; si se hubiera tomado  $f(0) = 1$  sería continua por la derecha. Si se toma  $f(0)$  = cualquier otro valor, entonces  $f$  no es continua ni a la izquierda ni a la derecha, aunque tiene límites izquierdo y derecho a saber  $-1$  y  $+1$  respectivamente.



Definición: (Discontinuidad)

Una función que no es continua en  $x=x_0$  se dice "discontinua" en  $x_0$ .

Ej.:

La función  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$  es discontinua en  $x_0 = 0$ .

Existen 3 tipos de discontinuidad:

1er. Caso:

En que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe pero es distinto de  $f(x_0)$ , esta discontinuidad la llamamos "evitable" puesto que se puede redefinir la función de tal forma que se cumpla que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ej.:

La función  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  es discontinua  $x_0 = 2$  ;

veremos si dicha discontinuidad es evitable.

Para ello determinemos si existe:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

$$\text{Luego: } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

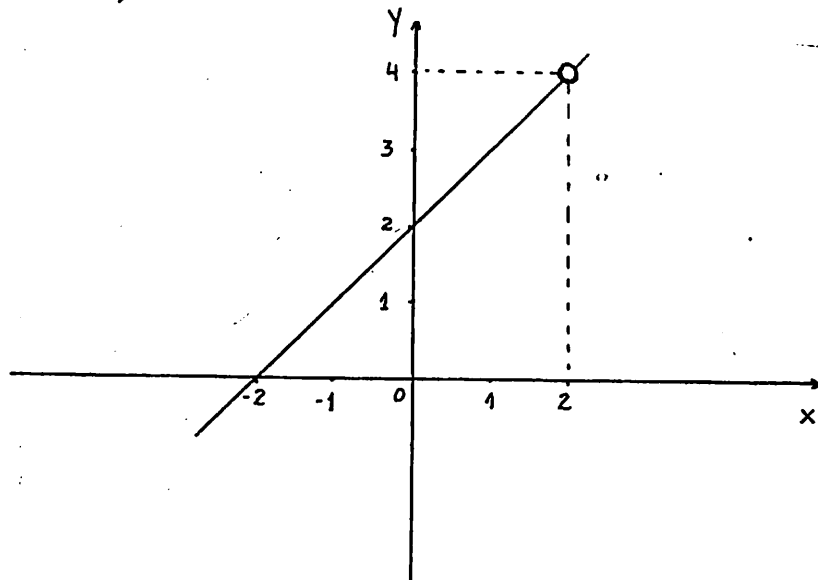
Como el límite existe, redefinamos la función asignándole a  $f(2)$  el valor del límite es decir:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$



que es continua en  $x_0=2$

Gráfico



2do. Caso:

En que el valor de  $f(x)$  aumenta sin límite cuando  $x \rightarrow x_0$ , este tipo de discontinuidad se llama "discontinuidad infinita".

Ej.:

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} \frac{3}{(x-2)^2} & \text{si } x \neq 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

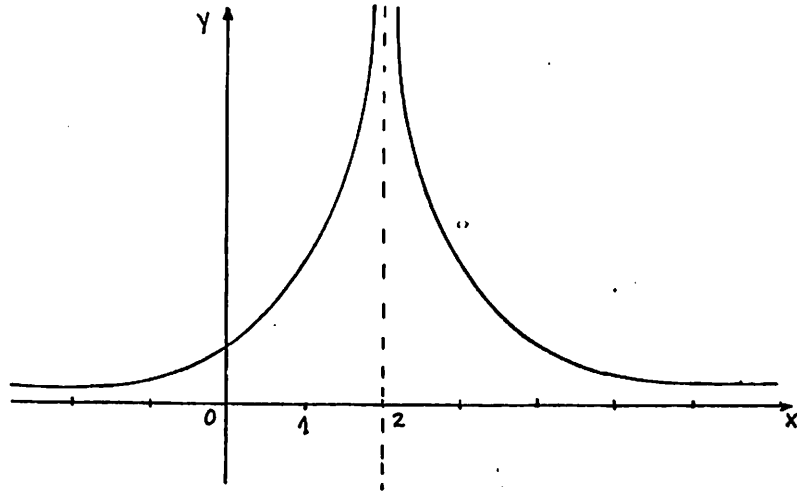
esta función es discontinua en  $x_0 = 2$  puesto que:

$$f(2) = 5 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$$

Además vemos que para cualquier valor de  $f(x)$  en  $x_0 = 2$ , la función no podrá ser continua.

UNIVERSIDAD DE ATACAMA  
BIBLIOTECA CENTRAL  
INVENTARIO



3er. Caso:

En que el límite por la derecha es distinto del límite por la izquierda y lo llamamos "discontinuidad finita".

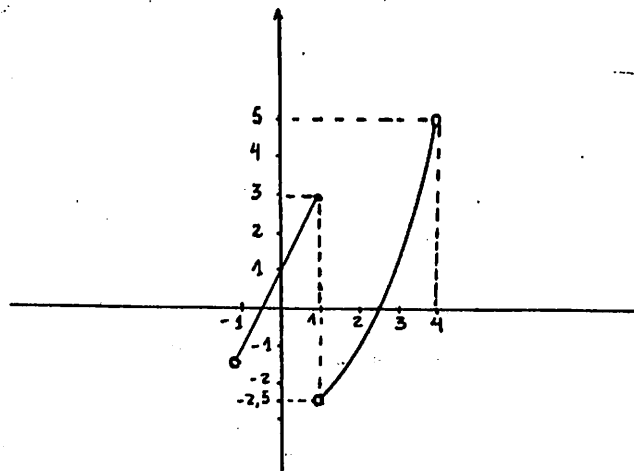
Ej.:

$$\text{Sea } f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - 3 & \text{si } 1 < x < 4 \end{cases}$$

De aquí tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2,5 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ no existe}$$

Luego la función es discontinua finita en  $x_0 = 1$ .



Teorema:

Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas en  $x = x_0$ , entonces:

- i) La función  $f \pm g$  es continua en  $x = x_0$ .
- ii) La función  $f \cdot g$  es continua en  $x = x_0$ .
- iii) La función  $\frac{f}{g}$  es continua en  $x = x_0$ ; siempre que  $g(x_0) \neq 0$ .

Teorema:

Si  $f$  es tal que:

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0; a_n \neq 0$$

entonces  $f$  es continua en  $x = x_0$ .

Ej.:

Si  $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 5x - 1$  entonces  $f$  es continua en  $x_0 = 0$  pues:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0)$$

Teorema:

Sea  $f$  continua en  $x = x_0$ , entonces  $\sqrt[n]{f}$  es también continua en  $x_0$ .

Teorema:

Sean  $f, g$  funciones reales tales que  $g$  es continua en  $x = x_0$  y  $f$  continua en  $g(x_0)$  entonces  $f \circ g$  es continua en  $x = x_0$ .



Corolario:

Si  $f$  continua en  $L$  y  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  entonces:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(L) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$$

Es decir, si  $f$  es continua puede conmutar con límite.

Ej.:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{sen} \left( \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \operatorname{sen} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} \right)$$

$$\therefore = \lim_{x \rightarrow 1} (\operatorname{sen}(x+1))$$

$$\therefore = \operatorname{sen}(\lim_{x \rightarrow 1} (x+1))$$

$$\therefore = \operatorname{sen} 2$$

Teorema:

La función  $y = a^x$ ;  $\forall x \in \mathbb{R}$  y la función  $\tilde{y} = \log_a x$ ;  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ;  $a > 0$ ;  $a \neq 1$  son continuas en  $x_0$ .

Ejercicios:

Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

$$1) f(x) = \frac{1}{x^2 + 5} \quad \forall x \in ] -7, 5 [$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x + 7} & \text{si } -10 < x < -4; x \neq -7 \\ 3 & \text{si } x = -7 \end{cases}$$



$$3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x-6}{x^2-2x-8} & \text{si } -1 < x < 6 ; \quad x \neq 4 \\ -2 & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} & \text{para } 0 < x < 5 , \quad x \neq 3 \\ f(3) = 3/2 \end{cases}$$

$$5) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x+4}{x^2-6} & \text{para } -5 < x < 5 , \quad x \neq 4 , \quad x \neq -4 \\ f(-4) = -1/8 \\ f(4) = 2 \end{cases}$$

$$6) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2} & \text{para } 0 < x < 2 , \quad x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

$$7) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^4 - 1} & \text{para } -1 < x < 2 , \quad x \neq 1 \\ x^2 + 3x - 2 & \text{para } 2 \leq x < 5 \\ f(1) = 1/2 \end{cases}$$

$$8) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2x-6}{|x-4|} & \text{si } x \neq 4 \\ f(4) = -1 \end{cases}$$

$$9) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{|x-2|} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$$



$$10) f(x) = \frac{3 + |x-2|}{x^2 + 1}$$

$$11) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ f(3) = 5 \end{cases}$$

$$12) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } 0 < x < 3 \quad ; \quad x \neq 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 3 \leq x < 6 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

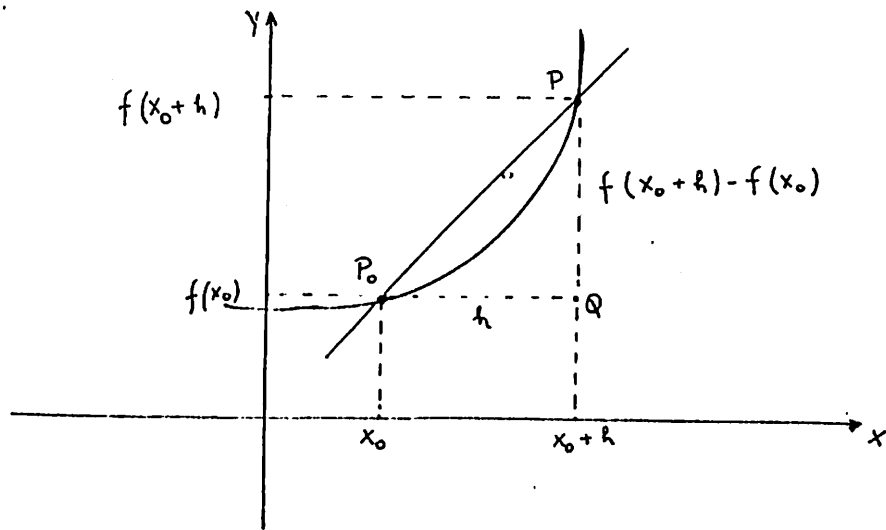
$$13) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 4 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Definición: (Derivada)

Sea  $f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ ;  $x_0; x_0 + h \in ]a, b[$  se llama "derivada de  $f$  en el punto  $x_0$ ", denotada por  $f'(x_0)$  al siguiente límite:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$





Ej.:

Hallar la derivada de  $f(x) = 2x^2 + 3$  (si existe) en  $x_0 = 3$ .  
Hallar además la ec. de la tangente a  $f$  en  $P_0$ .

Solución:

$$f(x_0) = f(3) = 21$$

$$f(x_0 + h) = f(3+h) = 2(3+h)^2 + 3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(3+h)^2 + 3 - 21}{h}$$

$$\therefore = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 12h}{h}$$

$$\therefore = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(2h+12)}{\cancel{h}}$$

$$\therefore = 12$$

La ecuación de la tangente es:



$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 21 = 12(x - 3)$$

$$\therefore 12x - y - 15 = 0$$

Observación:

La derivada  $f'(x_0)$  representa la pendiente de la tangente a la curva en el punto  $P_0$ .

Definición: (Derivadas laterales)

1) Sea  $f$  definida en  $[a, b]$ . Sean  $x_0, x_0+h \in [a, b]$  se dice que  $f$  tiene "derivada por la derecha en  $x_0$ " si existe el límite siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0^+)$$

2) Sea  $f$  definida en  $]-a, b]$ . Sean  $x_0, x_0+h \in ]-a, b]$  se dice que  $f$  tiene "derivada por la izquierda en  $x_0$ " si existe el límite siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0^-)$$

Teorema:

Sea  $f : ]a, b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ ;  $x_0 \in ]a, b[$  entonces  $f'(x_0)$ , existe si y sólo si existen  $f'(x_0^+)$  y  $f'(x_0^-)$  y son iguales.

Ej.:

La función  $f(x) = |x|$  no tiene derivada en  $x_0 = 0$  pues to que:



$$f(0) = |0| = 0$$

$$f(0 + h) = |0 + h| = |h| \quad ; \text{ entonces:}$$

$$f'(0^-) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0^- \\ h < 0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$\therefore = \lim_{\substack{h \rightarrow 0^- \\ h < 0}} \frac{|h|}{h}$$

$$\therefore = \lim_{\substack{h \rightarrow 0^- \\ h < 0}} \left( \ominus \frac{h}{h} \right)$$

$$\therefore = \lim_{\substack{h \rightarrow 0^- \\ h < 0}} (-1)$$

$$\therefore = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ h > 0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$\therefore = \lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ h > 0}} \frac{|h|}{h}$$

$$\therefore = \lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ h > 0}} \frac{h}{h}$$

$$\therefore = \lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ h > 0}} 1$$

$$\therefore = 1$$



Luego :  $f'(0^-) \neq f'(0^+)$

Es decir las derivadas laterales son distintas y por consiguiente no existe la derivada de:

$$f(x) = |x| \text{ en } x_0 = 0$$

Teorema:

Si  $f$  tiene derivada en  $x_0 \in ]a, b[$  entonces  $f$  es continua en  $x_0$ .

Observación:

El recíproco de dicho teorema no es válido, es decir, si una función es continua en  $x_0$  no necesariamente es derivable en dicho punto.

Ej.:

La función  $f(x) = |x|$  es continua en  $x_0 = 0$  sin embargo no es derivable en ese punto.

Definición: (Derivada en un intervalo)

a) Se dice que  $f$  es derivable en  $]a, b[$  si  $f$  es derivable en cada punto de  $]a, b[$ .

b) Se dice que  $f$  es derivable en  $[a, b]$  si  $f$  es derivable en  $]a, b[$  y además existen  $f'(a^+)$  y  $f'(b^-)$ .

Ejs.:

1) La función  $f(x) = 3x^2$  es derivable en  $\mathbb{R}$  pues:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + h^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(6x+3h)}{\cancel{h}} = 6x$$

$$\text{Luego } f'(x) = 6x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego  $f$  es derivable en  $\mathbb{R}$ .

2) La función  $f(x) = |x|$  no es derivable en  $\mathbb{R}$ , pues no es derivable en  $x_0 = 0$ , sin embargo es derivable en  $\mathbb{R}^+$ , también es derivable en  $\mathbb{R}^-$ .

**Teorema:**

La derivada de una constante es cero.

**Teorema:**

Si  $f(x)$  tiene derivada  $f'(x)$  entonces la derivada de  $g(x) = kf(x)$  es  $g'(x) = kf'(x)$ .

**Demostración:**

$$\text{Sea } g(x) = kf(x)$$

$$\therefore g(x+h) = kf(x+h) \quad ; \quad \text{entonces:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h}$$

$$\therefore = \lim_{h \rightarrow 0} k \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



$$\therefore = k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\therefore = k \cdot f'(x)$$

**Teorema:**

Sean  $f$  y  $g$  funciones derivadas, entonces:

$$i) [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$ii) [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$iii) \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

**Teorema:**

Sea  $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} ; f(x) = x^n ; n \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $f$  es derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$  y su derivada es:

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

**Demostración:**

Si  $n \in \mathbb{Z}^+$ , entonces:

$$f(x+h) = (x+h)^n$$

$$\therefore = x^n + n x^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + h^n$$

$$f(x+h) - f(x) = \cancel{x^n} + n x^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + h^n - \cancel{x^n}$$

$$\therefore = n x^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + h^n$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \dots + h^{n-1}$$



$$\therefore f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = n x^{n-1}$$

Si  $n \in \mathbb{Z}^-$  entonces  $n = -m$ ,  $m \in \mathbb{Z}^+$

$$\therefore f(x) = x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x^m - 1 \cdot m x^{m-1}}{(x^m)^2} = \frac{-m x^{m-1}}{x^{2m}} = -m x^{-m-1}$$

$$\therefore f'(x) = n x^{n-1}$$

Ej.:

1) Si  $f(x) = (3x^2 - 5x + 1)(2x + 3)$ , entonces:

$$f'(x) = (3x^2 - 5x + 1)'(2x + 3) + (3x^2 - 5x + 1)(2x + 3)'$$

$$\therefore f'(x) = (6x - 5)(2x + 3) + (3x^2 - 5x + 1)2$$

$$f'(x) = (6x - 5)(2x + 3) + 2(3x^2 - 5x + 1)$$

2) Si  $f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 1}{x^2 + 1}$

$$f'(x) = \frac{(3x^3 - 5x^2 + 1)'(x^2 + 1) - (3x^3 - 5x^2 + 1)(x^2 + 1)'}{[x^2 + 1]^2}$$

$$f'(x) = \frac{(9x^2 - 10x)(x^2 + 1) - (3x^3 - 5x^2 + 1)2x}{[x^2 + 1]^2}$$

Observación:

El teorema anterior también es válido para  $n \in \mathbb{Q}$ .



**Teorema:** (Regla de la cadena)

Sean  $f$  y  $g$  derivables en sus dominios entonces:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x) \quad \forall x$$

Ej.:

Hallar la derivada de  $F(x) = (x^2 - 2x)^3$

Solución:

Si  $F(x) = (f \circ g)(x)$  donde:

$$f(x) = x^3 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 2x, \quad \text{entonces:}$$

$$f'(x) = 3x^2 \implies f'(g(x)) = 3(x^2 - 2x)^2; \quad g'(x) = 2x - 2$$

$$\therefore F'(x) = 3(x^2 - 2x)^2 (2x - 2) = 6(x - 1)(x^2 - 2x)^2$$

Observación:

La regla de la cadena puede generalizarse para más de dos funciones componentes.

**Teorema:**

Sea  $f$  una función que admite inversa y derivable, entonces:

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Ejs.:

1) Sea  $f(x) = x^2$  ;  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  ;  $x > 0$  entonces:

$$f'(x) = 2x \implies f'(f^{-1}(x)) = f'(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$$

$$\therefore [f^{-1}(x)]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



2) Sea  $f(x) = x^n$  ;  $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$  (n impar)

entonces:

$$f'(x) = nx^{n-1} ; f'(f^{-1}(x)) = f'(\sqrt[n]{x}) = n (\sqrt[n]{x})^{n-1}$$

$$\therefore [f^{-1}(x)]' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

$$\therefore = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}}$$

$$\therefore = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

Si n es par;  $f^{-1}(x)$  existe solo si  $x > 0$

Observación:

Si denotamos  $f'(x)$  por  $\frac{dy}{dx}$  ; entonces el Teorema anterior se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{donde } y = f(x)$$

**Derivada de la función Implícita:**

Si una función está expresada por la ecuación  $f(x,y)=0$ , es decir  $f$  está definida en forma implícita, entonces esta ecuación puede representar una relación o una función, aceptaremos el caso en que la ecuación  $f(x,y)=0$  define una función derivable.

Se puede encontrar  $f'$  por los siguientes procedimientos:

- 1) Se despeja  $y$  en función de  $x$  y enseguida se calcula  $\frac{dy}{dx}$  o  $y'$ .
- 2) Se deriva directamente con respecto a  $x$  ; considerando a  $y$



como una función de  $x$  y aplicando la regla de la cadena.

Ejs.:

1) Si  $5y^3 - 2y + 8 = 3x^2 + 7x$  entonces:

$$15y^2 y' - 2y' = 6x + 7$$

$$y' = \frac{6x + 7}{15y^2 - 2}$$

2) Hallar  $y'$  en el punto  $P(2,1)$  para la ecuación:

$$x^2 y + x y^2 - 2x - 2y = 0$$

Solución:

$$2xy + x^2 y' + y^2 + x \cdot 2yy' - 2 - 2y' = 0$$

$$y'(x^2 + 2xy - 2) = -y^2 - 2xy + 2$$

$$\therefore y' = \frac{-y^2 - 2xy + 2}{x^2 + 2xy - 2}$$

$$\therefore (y')_{\substack{x=2 \\ y=1}} = -\frac{1}{2}$$

### DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Si  $f$  es una función derivable puede que  $f'$  también lo sea, en consecuencia podemos calcular  $(f')'$  llamada segunda derivada de  $f$  y denotada por  $f''$ . Si  $f''$  es derivable podemos calcular  $(f'')'$  es decir  $f'''$  llamada tercera derivada de  $f$ , así sucesivamente. A las segundas, terceras, ...,  $n$ -ésimas derivadas de  $f$ , las llamaremos derivadas de orden superior.



Observación:

Si denotamos por  $\frac{dy}{dx}$  a  $f'$  entonces:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

---


$$f^n(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Ej.:

1) Si  $y = 3x^5 - 8x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 5x + 9$  entonces:

$$y' = 15x^4 - 32x^3 + 12x^2 - 14x - 5$$

$$y'' = 60x^3 - 96x^2 + 24x - 14$$

$$y''' = 180x^2 - 192x + 24$$

$$y^{IV} = 360x - 192$$

$$y^{\hat{V}} = 360$$

$$y^{VI} = 0$$

2) Si  $x^2 + y^2 - 25 = 0$ . Calcular  $y'$  e  $y''$

Solución:

$$2x + 2y y' = 0 \implies y' = \frac{-x}{y}$$

$$\therefore y'' = \frac{-y + x y'}{y^2} = \frac{-y + x \left( \frac{-x}{y} \right)}{y^2}$$



$$\therefore y'' = \frac{-y^2 - x^2}{y^3}$$

$$\therefore y'' = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}$$

Derivada de Funciones Trigonométricas:

TEOREMA:

$$1) \frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \text{cos } x$$

$$2) \frac{d}{dx}(\text{cos } x) = -\text{sen } x$$

$$3) \frac{d}{dx}(\text{tg } x) = \text{sec}^2 x$$

$$4) \frac{d}{dx}(\text{cotg } x) = -\text{cosec}^2 x$$

$$5) \frac{d}{dx}(\text{sec } x) = \text{sec } x \text{tg } x$$

$$6) \frac{d}{dx}(\text{cosec } x) = -\text{cosec } x \text{cotg } x$$

Demostración:

$$1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h}$$

$$\therefore = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \text{còs}\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h}$$



$$\therefore = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos \left( \frac{2x+h}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{h}{2} \right)}{h}$$

$$\therefore = \lim_{h/2 \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \lim_{h \rightarrow 0} \cos \left( \frac{2x+h}{2} \right)$$

$$\therefore = 1 \cdot \cos \left( \frac{2x}{2} \right)$$

$$\therefore = \cos x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\operatorname{sen} x) = \cos x$$

2) Sea  $f(x) = \cos x = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\cos x) = \frac{d}{dx} \left( \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \right)$$

$$\therefore = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\therefore = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) (-1)$$

$$\therefore = -\cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\therefore = -\operatorname{sen} x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

3)  $\frac{d}{dx} (\operatorname{tg} x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)$

$$\therefore = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$



$$\therefore \frac{d}{dx} (\operatorname{tg} x) = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$$

Análogamente se demuestran (4), (5) y (6).

Observación:

Si consideramos  $u = f(x)$ , y aplicamos la regla de la cadena, entonces el Teorema anterior puede expresarse de la siguiente manera:

$$1) \frac{d}{dx} (\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$2) \frac{d}{dx} (\cos u) = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx}$$

$$3) \frac{d}{dx} (\operatorname{tg} u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$4) \frac{d}{dx} (\operatorname{cotg} u) = -\operatorname{cosec}^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$5) \frac{d}{dx} (\sec u) = \sec u \operatorname{tg} u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$6) \frac{d}{dx} (\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u \frac{du}{dx}$$



Ejs.:

$$1) \frac{d}{dx} (\operatorname{sen}^2 x^2) = 2 \operatorname{sen} x^2 \frac{d}{dx} (\operatorname{sen} x^2)$$

$$\therefore = 2 \operatorname{sen} x^2 \cos x^2 \frac{d}{dx} (x^2)$$

$$\therefore = 2 \operatorname{sen} x^2 \cos x^2 2x$$

$$\therefore = 4x \operatorname{sen} x^2 \cos x^2$$

$$2) \frac{d}{dx} (3 \sqrt{\cos 2x}) = 3 \frac{d}{dx} (\sqrt{\cos 2x})$$

$$\therefore = 3 \frac{1}{2 \sqrt{\cos 2x}} \frac{d}{dx} (\cos 2x)$$

$$\therefore = \frac{3}{2 \sqrt{\cos 2x}} \cdot (-\operatorname{sen} 2x) \frac{d}{dx} (2x)$$

$$\therefore = \frac{-3 \operatorname{sen} 2x}{2 \sqrt{\cos 2x}}$$

$$\therefore = \frac{-3 \operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

$$3) \frac{d}{dx} \left( \operatorname{tg} \frac{2x}{3} \right) = \sec^2 \left( \frac{2x}{3} \right) \frac{d}{dx} \left( \frac{2x}{3} \right)$$

$$\therefore = \sec^2 \left( \frac{2x}{3} \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \right)$$

$$\therefore = \frac{2}{3} \sec^2 \left( \frac{2x}{3} \right)$$



## Derivada de Funciones Trigonométricas Inversas:

Teorema:

$$1) \frac{d}{dx} (\text{arc sen } x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} ; x \in ] -1, 1 [$$

$$2) \frac{d}{dx} (\text{arc cos } x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} ; x \in ] -1, 1 [$$

$$3) \frac{d}{dx} (\text{arc tg } x) = \frac{1}{1+x^2} ; x \in \mathbb{R}$$

$$4) \frac{d}{dx} (\text{arc cotg } x) = \frac{-1}{1+x^2} ; x \in \mathbb{R}$$

$$5) \frac{d}{dx} (\text{arc sec } x) = \frac{1}{u \sqrt{u^2-1}} ; x \in \mathbb{R} - [-1, 1]$$

$$6) \frac{d}{dx} (\text{arc cosec } x) = \frac{-1}{u \sqrt{u^2-1}} ; x \in \mathbb{R} - [-1, 1]$$

Demostración:

$$1) \text{ Sea } y = \text{arc sen } x \implies x = \text{sen } y$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\text{arc sen } x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\therefore = \frac{1}{\cos y}$$

$$\therefore = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2 y}}$$



$$\therefore = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\arcsen x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) Sea  $y = \arccos x \implies x = \cos y$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\arccos x) = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\therefore = \frac{1}{-\text{sen } y}$$

$$\therefore = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\therefore = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Análogamente se demuestran (3), (4), (5) y (6).

Observación:

Si consideramos  $u = f(x)$  y aplicamos la regla de la cadena entonces el teorema anterior puede expresarse como:

$$1) \frac{d}{dx} (\arcsen u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$2) \frac{d}{dx} (\arccos u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$



$$3) \frac{d}{dx} (\text{arc tg } u) = \frac{1}{1 + u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$4) \frac{d}{dx} (\text{arc cotg } u) = \frac{-1}{1 + u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$5) \frac{d}{dx} (\text{arc sec } u) = \frac{1}{u \sqrt{u^2 - 1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$6) \frac{d}{dx} (\text{arc cosec } u) = \frac{-1}{u \sqrt{u^2 - 1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ej.:

$$1) \frac{d}{dx} (\text{arc sen } \sqrt{x}) = \frac{1}{2 \sqrt{x(x-1)}}$$

$$2) \frac{d}{dx} (\text{arc cos}(3x-4x^3)) = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3) \frac{d}{dx} (\text{arc tg}(\frac{4x}{4-x^2})) = \frac{4}{x^2 + 4}$$

$$4) \frac{d}{dx} (\text{arc cotg}(\frac{x+2}{1-2x})) = \frac{-1}{1+x^2}$$



Derivada de funciones exponenciales y logarítmicas:

TEOREMA:

$$1) \frac{d}{dx} (\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad a > 0 \quad ; \quad a \neq 1$$

$$2) \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$$3) \frac{d}{dx} (a^x) = a^x \ln a \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \quad ; \quad a > 0 \quad ; \quad a \neq 1$$

$$4) \frac{d}{dx} (e^x) = e^x \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

Demostración:

$$1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}$$

$$\% = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left( \frac{x+h}{x} \right)$$

$$\% = \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{1/h}$$

$$\% = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{x/h}$$

$$\% = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{x/h}$$

$$\text{Si hacemos } y = \frac{h}{x} \implies (h \rightarrow 0 \implies y \rightarrow 0)$$



$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{x} \lim_{y \rightarrow 0} \log_a (1+y)^{1/y}$$

$$\therefore = \frac{1}{x} \log_a \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{1/y}$$

$$\therefore = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

2) Si en (1) hacemos  $a = e$  tenemos:

$$\therefore \frac{d}{dx} (\log_e x) = \frac{d}{dx} (\ln x)$$

$$\therefore = \frac{1}{x} \log_e e$$

$$\therefore = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}$$

3) Sea  $y = a^x \implies x = \log_a y$  ; entonces:

$$\frac{d}{dx} (a^x) = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\therefore = \frac{1}{\frac{1}{y} \cdot \log_a e}$$



$$\therefore \frac{d}{dx} (a^y) = \frac{y}{\log_a e}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (a^y) = y \operatorname{Ln} a$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (a^x) = a^x \operatorname{Ln} a$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (a^x) = a^x \operatorname{Ln} a$$

4) Si en (3) hacemos  $a = e$  nos queda:

$$\frac{d}{dx} (e^x) = e^x \operatorname{Ln} e = e^x$$

Observación:

Si consideramos  $u = f(x)$  y aplicamos la regla de la cadena entonces el Teorema anterior puede expresarse como:

$$1) \frac{d}{dx} (\log_a u) = \frac{1}{u} \log_a e \cdot \frac{du}{dx}$$

$$2) \frac{d}{dx} (\operatorname{Ln} u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$3) \frac{d}{dx} (a^u) = a^u \operatorname{Ln} a \cdot \frac{du}{dx}$$

$$4) \frac{d}{dx} (e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejs.:

$$1) \frac{d}{dx} (\log_a (x^2 + 1)) = \frac{2x \log_a e}{x^2 + 1}$$



$$2) \frac{d}{dx} (\ln^3 x) = \frac{3 \ln^2 x}{x}$$

$$3) \frac{d}{dx} (7^{x^2+2x}) = 2(x+1) 7^{x^2+2x} \ln 7$$

$$4) \frac{d}{dx} (e^{4x^2+5}) = 8x \cdot e^{4x^2+5}$$

Observación:

Si una función derivable  $y = f(x)$  es un producto de factores en el cual aparecen además exponentes, el proceso de derivación se simplifica tomando previamente logaritmos naturales.

Ej.:

$$1) \text{ Sea } y = \frac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}} \text{ entonces:}$$

$$\ln y = \ln x + 2 \ln(1-x^2) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{1-x^2} (-2x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x$$

$$y' = y \left[ \frac{1}{x} - \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{1+x^2} \right]$$

$$y' = \frac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}} \left[ \frac{1}{x} - \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{1+x^2} \right]$$

$$2) \text{ Sea } y = x^x \text{ entonces:}$$



$$\ln y = x \ln x$$

$$\frac{1}{y} y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = y [\ln x + 1]$$

$$y' = x^x [\ln x + 1]$$

3) Sea  $y = x^{x^x}$  entonces:

$$\ln y = x^x \ln x$$

$$\frac{1}{y} y' = x^x [\ln x + 1] \cdot \ln x + x^x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = y \left[ x^x (\ln x + 1) \ln x + \frac{x^x}{x} \right]$$

$$y' = x^{x^x} \left[ x^x (\ln x + 1) \ln x + \frac{x^x}{x} \right]$$

### DERIVADA DE FUNCIONES PARAMETRICAS

Si se tienen las funciones paramétricas:

$$x = f(t) \quad ; \quad y = g(t)$$

estas representan una relación entre  $x$  e  $y$  ; entonces la derivada  $\frac{dy}{dx}$  puede encontrarse usando la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad ; \quad \text{además:}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} \quad ; \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)}{\frac{dx}{dt}}$$



Ejs.:

$$1) \text{ Hallar } \frac{dy}{dx} ; \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ en : } \begin{cases} x = 2t^2 + 3t - 5 \\ y = -t^2 - 2t + 3 \end{cases}$$

Solución:

$$\frac{dx}{dt} = 4t + 3 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = -2t - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2t-2}{4t+3} \implies \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{-2t-2}{4t+3} \right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-2(4t+3) - 4(-2t-2)}{(4t+3)^3} = \frac{-8t - 6 + 8t + 8}{(4t+3)^3}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2}{(4t+3)^3}$$

2) Encontrar la ecuación de la tangente y de la normal a la curva  $x = 2t^2 - 2$  ;  $y = t^3 - 2t + 1$  en un punto en que  $t = 2$ .

Solución:

$$\text{Si } t=2 \implies x = 2 \wedge y = 5$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 2}{2t} \implies \left( \frac{dy}{dx} \right)_{t=2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$



Luego la ecuación de la tangente es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = \frac{5}{2}(x - 2)$$

$$2y - 10 = 5x - 10$$

$$5x - 2y = 0$$

Luego la ecuación de la normal es:

$$y - y_1 = m_{\perp}(x - x_1)$$

$$y - 5 = -\frac{2}{5}(x - 2)$$

$$5y - 25 = -2x + 4$$

$$2x + 5y - 29 = 0$$

**Funciones Hiperbólicas:**

**Definición:** (Seno y coseno hiperbólico)

1) La función "seno hiperbólico" se denota como  $\sinh$  y se define de la siguiente manera:

$$\text{Senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2) La función "coseno hiperbólico" se denota como  $\cosh$  y se define de la manera siguiente:



$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Definición:

Las restantes funciones hiperbólicas se definen en forma análoga a las funciones trigonométricas; es decir:

$$a) \operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$b) \operatorname{cotgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$c) \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$d) \operatorname{cosech}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Observación:

1) Las funciones  $\operatorname{senh}$ ,  $\operatorname{tgh}$ ,  $\operatorname{cotgh}$  y  $\operatorname{cosech}$  son funciones im pares.

2) Las funciones  $\cosh$  y  $\operatorname{sech}$  son funciones pares

3) De (1) tenemos que:

$$f(-x) = \operatorname{senh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = - \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\therefore = - \operatorname{senh}x = - f(x)$$

4) De (2) tenemos que:



$$f(x) = \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh(x)$$

$$\therefore = f(x)$$

**Teorema:**

Las funciones hiperbólicas cumplen las siguientes relaciones:

- 1)  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- 2)  $\operatorname{tgh}^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$
- 3)  $\operatorname{cotgh}^2 x - \operatorname{cosech}^2 x = 1$

**Demostración:**

$$\begin{aligned}
 1) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\
 \therefore &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\
 \therefore &= \frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \cancel{e^{2x}} + 2 - \cancel{e^{-2x}}}{4} \\
 \therefore &= \frac{4}{4} \\
 \therefore &= 1
 \end{aligned}$$

Análogamente se demuestran (2) y (3)

**Teorema:**

Las fórmulas de adición y sustracción para las funciones hiperbólicas son las siguientes:



$$1) \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$2) \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$3) \operatorname{tgh}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tgh} x \pm \operatorname{tgh} y}{1 \pm \operatorname{tgh} x \operatorname{tgh} y}$$

Demostración:

$$1) \sinh(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} & \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y = \\ & = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ & = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} \\ & = \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{4} \\ & = \frac{1}{2} [e^{x+y} - e^{-(x+y)}] \\ & = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

La demostración de (2) y (3) son análogas.



## Teorema:

$$1) \frac{d}{dx} (\operatorname{senhx}) = \operatorname{cosh} x$$

$$2) \frac{d}{dx} (\operatorname{cosh} x) = \operatorname{senhx}$$

$$3) \frac{d}{dx} (\operatorname{tgh} x) = \operatorname{sech}^2 x$$

$$4) \frac{d}{dx} (\operatorname{cotgh} x) = -\operatorname{cosech}^2 x$$

$$5) \frac{d}{dx} (\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x$$

$$6) \frac{d}{dx} (\operatorname{cosech} x) = -\operatorname{cosech} x \cdot \operatorname{cotgh} x$$

## Demostración:

$$1) \frac{d}{dx} (\operatorname{senhx}) = \frac{d}{dx} \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$$

$$\therefore = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (e^x - e^{-x})$$

$$\therefore = \frac{1}{2} [e^x - e^{-x} (-1)]$$

$$\therefore = \frac{1}{2} [e^x + e^{-x}]$$

$$\therefore = \operatorname{cosh} x$$

Análogamente se demuestran las restantes



Observación:

Si  $u = f(x)$  entonces:

$$1) \frac{d}{dx} (\operatorname{senhu}) = \operatorname{coshu} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$2) \frac{d}{dx} (\operatorname{coshu}) = \operatorname{senhu} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$3) \frac{d}{dx} (\operatorname{tgh} u) = \operatorname{sech}^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$4) \frac{d}{dx} (\operatorname{cotgh} u) = -\operatorname{cosech}^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$5) \frac{d}{dx} (\operatorname{senhu}) = -\operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$6) \frac{d}{dx} (\operatorname{cosechu}) = -\operatorname{cosechu} \cdot \operatorname{cotgh} u \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejs.:

$$1) \text{ Calcular : } \frac{d}{dx} (\operatorname{senh}^3 (4x^3 + 3x - 5))$$

Solución:

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{senh}^3 (4x^3 + 3x - 5)) = 3\operatorname{senh}^2 (4x^3 + 3x - 5) \cdot \operatorname{cosh}(4x^3 + 3x - 5) \cdot (12x^2 + 3)$$

$$\therefore = 9(4x^2 + 1) \operatorname{senh}^2 (4x^3 + 3x - 5) \operatorname{cosh}(4x^3 + 3x - 5)$$

$$2) \text{ Calcular : } \frac{d}{dx} (x^2 \cdot \operatorname{sech}(3x^2 + 5))$$



$$\frac{d}{dx} (\cdot/\cdot) = 2x \cdot \operatorname{sech}(3x^2+5) + x^2 (-\operatorname{sech}(3x^2+5) \operatorname{tgh}(3x^2+5) \cdot 6x)$$

$$\cdot/\cdot = 2x \operatorname{sech}(3x^2+5) - 6x^3 \operatorname{sech}(3x^2+5) \operatorname{tgh}(3x^2+5)$$

Ejercicios:

I) Calcular la derivada de las siguientes funciones:

$$1) y = x^5 + 5x^4 - 18x^2 + 6$$

$$\text{Sol.: } y' = 5x^4 + 20x^3 - 36x$$

$$2) y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$$

$$\text{Sol.: } y' = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2x}}$$

$$3) y = (3x - x^3 + 1)^4$$

$$\text{Sol.: } y' = 12(1-x^2)(3x-x^3+1)^3$$

$$4) y = \left( \frac{x}{1+x} \right)^5$$

$$\text{Sol.: } y' = \frac{5x^4}{(1+x)^6}$$

$$5) y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$$

$$\text{Sol.: } y' = \frac{1}{4\sqrt{x+x}\sqrt{x}}$$

$$6) y = \sqrt{(x-1)(x+1)}$$

$$\text{Sol.: } y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$7) y = (x^3-1)(2x^3+1)^4$$

$$\text{Sol.: } y' = \frac{36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^5}$$

$$8) y^3 - 3y + 2ax = 0$$

$$\text{Sol.: } y' = \frac{2a}{3(1-y^2)}$$

$$9) x^4 + x^2 y^2 + y^4 = 0$$

$$\text{Sol.: } y' = \frac{-x(2x^2 + y^2)}{y(x^2 + 2y^2)}$$

$$10) xy^2 + \sqrt{xy} = 2$$

$$\text{Sol.: } y' = \frac{-y(2y\sqrt{xy} + 1)}{x(4y\sqrt{xy} + 1)}$$

$$11) y^2 - 2xy + b^2 = 0$$

$$\text{Sol.: } y' = \frac{y}{y-x}$$



12)  $(x+2y)^2 + 2xy^2 = 8$

Sol.:  $y' = \frac{-(x+2y+y^2)}{2(x+2y+xy)}$

13)  $y = \text{sen}(x+a)\cos(x+a)$

Sol.:  $y' = \cos(2x+2a)$

14)  $y = \frac{1 + \text{sen} \frac{x}{2}}{1 - \text{sen} \frac{x}{2}}$

Sol.:  $y' = \frac{\cos \frac{x}{2}}{(1 - \text{sen} \frac{x}{2})^2}$

15)  $a \cos^2(x+y) = b$

Sol.:  $y' = 1$

16)  $y = \frac{1}{3} \sec^3 2x - \sec 2x$

Sol.:  $y' = 2\sec 2x \text{tg}^3 2x$

17)  $y = \frac{\text{tg} x - 1}{\sec x}$

Sol.:  $y' = \text{sen} x + \cos x$

18)  $y = \frac{1 - \text{tg}^2 2x}{\text{tg} 2x}$

Sol.:  $y' = 2\sec^2 2x \text{cosec}^2 2x$

19)  $y = \arctg\left(\frac{a}{x}\right) + \text{Ln} \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$

Sol.:  $y' = \frac{2a^3}{x^4 - a^4}$

20)  $y = \frac{3x^2 - 1}{3x^3} + \text{Ln} \sqrt{1+x^2} + \arctg x$

Sol.:  $y' = \frac{x^5 + 1}{x^4(x^2 + 1)}$

21)  $y = \frac{\text{sen} x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2} \text{Ln} \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

Sol.:  $y' = \sec^3 x$

22)  $y = 2x \text{arc sen} 2x + \sqrt{1-4x^2}$

Sol.:  $y' = 2 \text{arc sen} 2x$

23)  $y = (\text{arc tg} 3x)^2$

Sol.:  $y' = \frac{6 \text{arc tg} 3x}{1 + 9x^2}$



$$24) \quad y = \operatorname{arc} \sec \left( \frac{x+1}{x-1} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left( \frac{x-1}{x+1} \right) \quad \text{Sol.: } y' = 0$$

$$25) \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+y) = x \quad \text{Sol.: } y' = (x+y)^2$$

$$26) \quad \operatorname{Ln} x + e^{-\frac{y}{x}} = e \quad \text{Sol.: } y' = \frac{\frac{y}{x} + y}{e^{\frac{y}{x}}}$$

II. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

$$1) \quad y = 5e^{-x^2}$$

$$2) \quad y = x^2 \cdot 10^{2x}$$

$$3) \quad y = \operatorname{Ln}^2 x - \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} x)$$

$$4) \quad y = \operatorname{Ln}(e^x + 5 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{arc} \operatorname{sen} x)$$

$$5) \quad y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{Ln} x) + \operatorname{Ln}(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)$$

$$6) \quad y = \sqrt{\operatorname{Ln} x + 1} + \operatorname{Ln}(\sqrt{x} + 1)$$

$$7) \quad y = \operatorname{Ln}(a^{\cos 3x})$$

$$8) \quad y = e^{\operatorname{Ln}(5x \operatorname{sen} x)}$$

$$9) \quad y = \operatorname{Ln} \left( \frac{e^x}{1 + e^x} \right)$$

$$10) \quad y = \operatorname{Ln} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$$

$$11) \quad y = 10^x \operatorname{tg} x$$

$$12) \quad y = e^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{x^2}{2} \right)}$$



III. Aplicando logaritmo natural calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$1) \quad y = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3 (x+3)^4}$$

$$2) \quad y = x^3 \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}}$$

$$3) \quad y = x^{\operatorname{sen} x}$$

$$4) \quad y = x^{x^2}$$

$$5) \quad y = x^{\sqrt{x}}$$

$$6) \quad y = x^{\sqrt{x}}$$

$$7) \quad y = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$$

$$8) \quad y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$9) \quad y = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^x$$

$$10) \quad y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{Ln} \cos x}$$

IV. Hallar la derivada  $\frac{dy}{dx}$  en:

$$1) \quad x = \frac{2at}{1+t^2} \quad ; \quad y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$$



$$2) \quad x = \sqrt{t^2 + 1} \quad ; \quad y = \frac{t-1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

$$3) \quad x = a \cos^3 t \quad ; \quad y = b \sin^3 t$$

$$4) \quad x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \quad ; \quad y = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$$

$$5) \quad x = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) \quad ; \quad y = \arcsen\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

$$6) \quad x = a(\ln \operatorname{tg} t / 2 + \cos t - \operatorname{sen} t) \quad ; \quad y = a(\operatorname{sen} t + \cos t)$$

V. Hallar la derivada de:

$$1) \quad y = \operatorname{senh}^3 2x$$

$$2) \quad y = e^{ax} \operatorname{cosh}(bx)$$

$$3) \quad y = \operatorname{tgh}^3(2x^2 + 1)$$

$$4) \quad y = \operatorname{Ln}(\operatorname{senh}(e^x + 1))$$

$$5) \quad y = \operatorname{tgh}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

$$6) \quad y = \operatorname{tgh}(\operatorname{arc} \operatorname{sec} x)$$

$$7) \quad y = \operatorname{cosh}\left(\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$8) \quad y = 2^{\operatorname{senh} 3x} + (1 - \operatorname{cosh}(2x))^2$$

VI. Resolver los siguientes problemas:

1) Hallar la ecuación de la tangente y de la normal a la curva, en  $\theta = \frac{\pi}{4}$  si:

$$x = a \cos \theta \quad ; \quad y = a \operatorname{sen}^4 \theta$$

2) Demostrar que la derivada de una función par es una función impar y que la de una función impar es par.



- 3) Demostrar que la función  $y = x e^{-x}$  satisface la ecuación:  
 $xy' = (1-x)y$
- 4) Demostrar que la función  $y = f(x)$ , dada por las ecuaciones paramétricas:  
 $x = 2t + 3t^2$  ;  $y = t^2 + 2t^3$   
 satisface la ecuación:  
 $y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$
- 5) En que punto la tangente a la parábola:  $y = x^2 - 7x + 3$  es paralela a la recta  $5x + y - 3 = 0$ .
- 6) Hallar la ecuación de la parábola  $y = ax^2 + bx + c$  que es tangente a la recta  $y = x$  en el punto  $P(1,1)$ .
- 7) En que punto de la curva  $y^2 = 2x^3$  la tangente es perpendicular a la recta:  $4x - 3y + 2 = 0$



## GRAFICO DE RELACIONES

## Definición:

El gráfico de una relación se define como el conjunto de puntos del plano XY que están en correspondencia biunívoca con los pares ordenados que pertenecen a la relación, es decir:

$$\text{Gr}(R) = \{ P=(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x,y) \in R \}$$

Para determinar el gráfico de una relación analizaremos los siguientes aspectos:

## I. Simetría:

Una relación R definida en  $\mathbb{R}$ , es decir  $R \subseteq \mathbb{R}^2$ , puede presentar los siguientes tipos de simetría:

## 1) Simetría con respecto al eje x:

Una curva es simétrica con respecto al eje x si su ecuación no se altera al cambiar y por (-y).

## 2) Simetría con respecto al eje y:

Una curva es simétrica con respecto al eje y si su ecuación no se altera al cambiar x por (-x).

## 3) Simetría con respecto al origen:

Una curva es simétrica con respecto al origen si su ecuación no se altera al cambiar x por (-x) e y por (-y) simultáneamente.

4) Simetría con respecto a la recta  $y = x$ :

Una curva es simétrica con respecto a la recta  $y = x$  si su ecuación no se altera al cambiar x por y e y por x.



**II. Intersecciones con los ejes coordenados:**

Se pueden presentar los siguientes casos:

**1) Intersección con el eje x:**

Para determinar la intersección de la curva con el eje x, se hace  $y = 0$  y se determinan las soluciones reales de la ecuación resultante.

**2) Intersección con el eje y:**

Para determinar la intersección de la curva con el eje y, se hace  $x = 0$  y se determinan las soluciones reales de la ecuación resultante.

**III. Extensión de la curva:**

Esto se refiere al campo de variación de la curva, es decir los valores para los cuales  $x$  e  $y$  toman valores reales, en otras palabras se refiere al estudio del Dominio y Recorrido de la relación.

**IV. Asíntotas:**

Si para una curva dada, existe una recta tal que, a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta decrece continuamente y tiende a cero, dicha recta se llama asíntota. Las asíntotas pueden ser paralelas al eje x, paralelas al eje y y oblicuas.

**1) Asíntotas Horizontales:**

Para determinar las asíntotas horizontales, se despeja  $x$  en función de  $y$  y enseguida se iguala el denominador a



cero, en caso de que lo hubiere.

### 2) Asíntotas verticales:

Para determinar las asíntotas verticales, se despeja y en función de x, enseguida se iguala el denominador a cero, en caso de que lo hubiere.

### 3) Asíntotas oblicuas:

La recta  $y = mx+n$  es una asíntota oblicua de la curva  $y = f(x)$ , si:

$$[f(x)-(mx+n)] \longrightarrow 0 \text{ cuando } x \longrightarrow \infty$$

Para obtener los valores de m y n se procede de la siguiente manera:

i) Se sustituye y por  $(mx+n)$  en la ecuación de la curva y se ordena según las potencias decrecientes de x, es decir:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

ii) Se resuelve el sistema de ecuaciones formado por:

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 0 \\ a_{n-1} = 0 \end{array} \right\}$$

Para encontrar m y n

Ahora bien si  $a_{n-1} = 0$  se resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 0 \\ a_{n-2} = 0 \end{array} \right\}$$



iii) Cada par de valores de  $m$  y  $n$  determinan una asíntota.

#### V. Tabla de valores:

Para determinar la tabla de valores se procede a despejar  $y$  en función de  $x$  (donde  $x$  es la variable independiente e  $y$  la variable dependiente) y en seguida se procede a asignar los valores a la  $v.$  independiente y calcular los valores respectivos de la  $v.$  dependiente, a continuación se disponen los datos en una tabla, es decir:

$x$	.....-2	-1	0	1	2	.....
$y$						

#### VI. Gráfico:

Con todos los antecedentes anteriores se procede al trazado de la curva.

Ejs.:

1) Construir la curva cuya ecuación es:

$$x^2 y - x^2 - y = 0$$

Solución:

I. Simetrías:

1) Con respecto al eje  $x$ :

Si cambiamos  $y$  por  $(-y)$  tenemos:

$$x^2 (-y) - x^2 - (-y) = 0$$

$$-x^2 y - x^2 + y = 0$$

$$x^2 y + x^2 - y = 0$$



La ecuación se altera, luego la curva no es simétrica con respecto al eje x.

2) Con respecto al eje y:

Si cambiamos x por (-x) tenemos:

$$(-x)^2 y - (-x)^2 - y = 0$$

$$x^2 y - x^2 - y = 0$$

La ecuación no se altera, luego la curva es simétrica con respecto al eje y.

3) Con respecto al origen:

Si cambiamos x por (-x) e y por (-y) tenemos:

$$(-x)^2 (-y) - (-x)^2 - (-y) = 0$$

$$-x^2 y - x^2 + y = 0$$

$$x^2 y + x^2 - y = 0$$

La ecuación se altera, luego la curva no es simétrica con respecto al origen.

I.. Intersecciones:

1) Con el eje x:

$$\text{Se hace } y = 0 \implies -x^2 = 0 \implies x = 0$$

2) Con el eje y:

$$\text{Se hace } x = 0 \implies -y = 0 \implies y = 0$$

De (1) y (2) tenemos que la curva pasa por el origen.



## III. Extensión:

$$1) \text{ Dom } (R) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 y - x^2 - y = 0 \right\}$$

$$\therefore = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid y = \frac{x^2}{x^2 - 1} \right\}$$

$$\therefore = \bar{\mathbb{R}} - \{-1, 1\}$$

$$2) \text{ Rec } (R) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid x^2 y - x^2 - y = 0 \right\}$$

$$\therefore = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y = \pm \sqrt{\frac{y}{y-1}} \right\}$$

$$\therefore = ] -\infty, 0] \cup ] 1, \infty [$$

## IV. Asíntotas:

1) Asíntota horizontal:

$$\text{Se despeja : } x = \pm \sqrt{\frac{y}{y-1}}$$

$$\therefore y - 1 = 0 \implies y = 1$$

2) Asíntotas verticales:

$$\text{Se despeja : } y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$\therefore x^2 - 1 = 0 \implies (x-1)(x+1) = 0$$

$$\implies x-1 = 0 \quad \vee \quad x+1 = 0$$

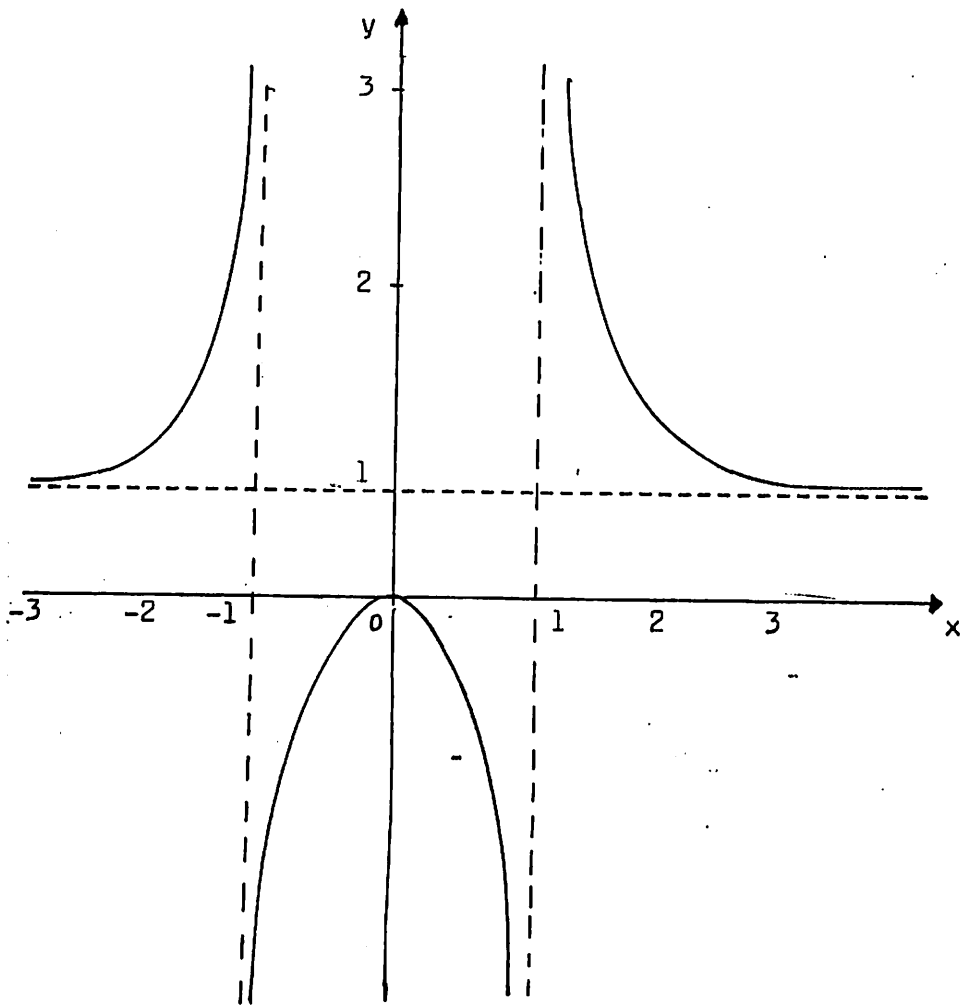
$$\implies x=1 \quad \vee \quad x = -1$$



V. Tabla de valores:

x	0	$\pm 1/4$	$\pm 1/2$	$\pm 3/4$	$\pm 5/4$	$\pm 3/2$	$\pm 7/4$	$\pm 2$	$\pm 9/4$
y	0	$-1/15$	$-1/3$	$-9/7$	$25/9$	$9/5$	$49/33$	$4/3$	$81/65$

VI. Gráfico:



2) Hallar las asíntotas de la curva:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad a, b \neq 0$$

Solución:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

Reemplazando  $y = mx + n$  en la ecuación anterior, tenemos:

$$b^2 x^2 - a^2 (mx+n)^2 = a^2 b^2$$

$$\therefore (b^2 - a^2 m^2) x^2 - 2a^2 mn \cdot x - (a^2 n^2 + a^2 b^2) = 0$$

Luego: (1)  $b^2 - a^2 m^2 = 0$

(2)  $2a^2 mn = 0$

De (1) se tiene:  $m^2 = \frac{b^2}{a^2} \implies m = \pm \frac{b}{a}$

De (2) se tiene:  $n = 0$

Luego las asíntotas son:

$$y = \frac{b}{a} x + 0 \implies y = \frac{b}{a} x$$

$$y = -\frac{b}{a} x + 0 \implies y = -\frac{b}{a} x$$



## Ejercicios:

Analizar intersecciones, simetrías, asíntotas, extensión y trazar el gráfico de:

1)  $y^2 = x^3$

2)  $x^2 - y^2 = 1$

3)  $xy = 1$

4)  $y = 2x^2 + 1$

5)  $y = x^3 - 8x^2 + 15x$

6)  $xy - y - 1 = 0$

7)  $xy - 2x - 2y + 2 = 0$

8)  $x^2 y - 2x^2 - 16y = 0$

9)  $x^2 y - 4y + x = 0$

10)  $x^3 + xy^2 - y^2 = 0$

11)  $x^2 y - y = 2$

12)  $x^2 y^2 - 4y^2 = 1$



## APLICACIONES DE LA DERIVADA

## Definición: (Diferencial)

Dada la función  $y = f(x)$  tal que  $f'(x) \neq 0 \quad \forall x$  y  $\Delta x$  un incremento de  $x$ , entonces la "diferencial de  $y$ " denotada por  $dy$  se define como:

$$dy = f'(x) \Delta x$$

Ej.:

Calcular la diferencial de  $y = x^3 - 4x$  en  $x = 2$  para el cual  $\Delta x = 0.1$

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \implies f'(2) = 12 - 4 = 8$$

$$\therefore dy = f'(2) \cdot \Delta x \implies dy = 8 \cdot 0.1 = 0.8$$

Observación:

1) Si  $f$  es la función identidad definida por  $f(x) = x$ ,  $\forall x$ , entonces:

$$dy = f'(x) \Delta x$$

$$dy = 1 \cdot \Delta x$$

$$dy = \Delta x$$

además como  $y = x \implies dy = dx$

luego :  $dx = \Delta x$

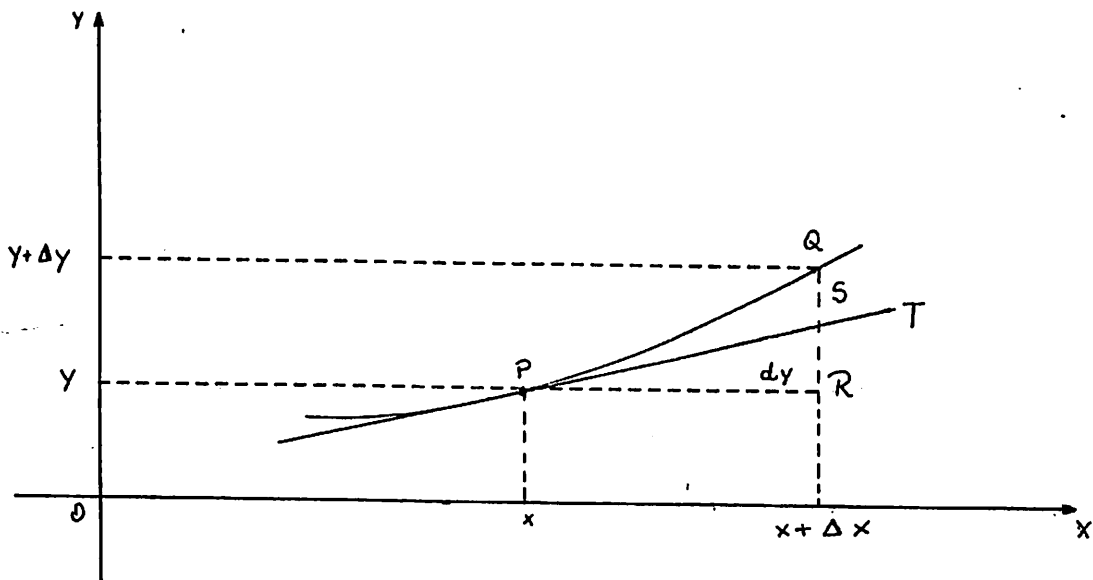
2) Cuando  $x$  es la variable independiente la diferencial de  $x$  es decir  $dx$  es idéntica a  $\Delta x$ , luego si  $y = f(x)$  podemos escri



bir:

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

## INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DIFERENCIAL



Sea  $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $x \in A$

$$\therefore f'(x) = \frac{RS}{PR} \implies RS = f'(x) \cdot PR$$

$$\implies RS = f'(x) \cdot \Delta x$$

Luego RS es la diferencial de  $y = f(x)$  en el punto  $x$  para el incremento  $\Delta x$ .

Luego:  $RS = dy$

$$SQ = \Delta y - dy$$

En el gráfico  $SQ \rightarrow 0$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  de modo que cuando  $\Delta x$  es pequeño  $\Delta y$  es aproximadamente igual a  $dy$ ; es decir  $\Delta y \approx dy$ .



Teorema:

Si  $f'(x) \neq 0$  entonces  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1$

Demostración:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{f'(x) \Delta x} \\ &= \frac{1}{f'(x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{f'(x)} \cdot f'(x) = 1 \end{aligned}$$

Luego  $\Delta y \approx dy$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$

Observación:

- a)  $\Delta y \approx dy = f'(x) \Delta x$   
 b)  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x$

$$\therefore f(x_0 + \Delta x) \approx f'(x_0) \Delta x + f(x_0)$$

donde  $y = f(x)$  es derivable en  $x_0$  y  $x_0 + \Delta x$

Ej.:

Calcule el valor aproximado de  $\sqrt{82}$  usando la diferencial.

Solución:

Si consideramos  $f(x) = \sqrt{x}$  tal que  $x_0 = 81$ , entonces tenemos  $\Delta x = 1$ ; luego:

$$x_0 + \Delta x = 81 + 1 = 82$$



$$\therefore f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \implies f'(81) = \frac{1}{2\sqrt{81}} = \frac{1}{18}$$

$$\therefore f(82) = f'(81) \cdot 1 + f(81)$$

$$f(82) = \frac{1}{18} \cdot 1 + 9$$

$$\sqrt{82} = 9,05$$

Ejercicios:

- 1) Calcular el valor aproximado de  $\sqrt[4]{17}$ . Resp.: 2.03125
- 2) Calcular el valor aproximado de  $\sqrt{65}$  usando la diferencial. Resp.: 8.0625
- 3) Hallar el incremento de:
  - 1)  $f(x) = x^3$  cuando  $x$  pasa de 5 a 5.01
  - 2)  $f(x) = \frac{1}{x}$  cuando  $x$  disminuye de 1 a 0.98.

Solución:

$$1) f(x) = x^3 ; x = 5 ; \Delta x = 0.01$$

$$\therefore dy = f'(x) \Delta x$$

$$dy = 3x^2 \Delta x$$

$$dy = 3 \cdot 25 \cdot 0.01$$

$$dy = 0.75$$

$$2) f(x) = \frac{1}{x} ; x = 1 ; \Delta x = -0.02$$

$$\therefore dy = f'(x) \Delta x$$

$$dy = -\frac{1}{x^2} \Delta x$$



$$dy = -1 \cdot (-0.02)$$

$$dy = 0.02$$

Teorema: (Funciones crecientes y decrecientes)

Sea A un intervalo abierto  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable en A entonces:

- 1) f es creciente en A si  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in A$
- 2) f es estrictamente creciente en A si  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in A$
- 3) f es decreciente en A si  $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in A$
- 4) f es estrictamente decreciente en A si  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in A$

Ej.:

- 1) La función  $f(x) = 1+x^3$  es estrictamente creciente en  $\mathbb{R} - \{0\}$  puesto que:

$$f'(x) = 3x^2 > 0 \quad \forall x \in (\mathbb{R} - \{0\})$$

- 2) La función  $f(x) = 1 - x^3$  es estrictamente decreciente en  $\mathbb{R} - \{0\}$  puesto que:

$$f'(x) = -3x^2 < 0 \quad \forall x \in (\mathbb{R} - \{0\})$$

Definición: (Valores y puntos críticos)

Sea A intervalo abierto  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable en A; se llama valor crítico a  $x_0 \in A$  si  $f'(x_0) = 0$ ; y al punto correspondiente se le llama punto crítico.

Ej.:

Sea  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 12x + 7$ , determinar:

- 1) Valores críticos y puntos críticos.



2) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

$$1) f'(x) = 2x^2 + 2x - 12 = 0 \implies 2 \cdot (x+3)(x-2) = 0$$

$$\implies x+3=0 \vee x-2=0$$

$$\implies x = -3 \vee x = 2$$

Luego  $x_0 = -3$  y  $x_0 = 2$  son valores críticos.

Además :  $f(2) = \frac{-23}{3} \implies P_1(2, \frac{-23}{3})$  es un punto crítico

$f(-3) = 34 \implies P_2(-3, 34)$  es el otro punto crítico.

2) De (1) se tiene que:  $f'(x) = 2(x+3)(x-2)$

	$-\infty$	$-3$	$2$	$\infty$
$x + 3$	-	+	+	
$x - 2$	-	-	+	
$f'(x)$	+	-	+	

$f'(x) > 0$  ;  $\forall x \in ]-\infty, -3[ \cup ]2, \infty[ \implies f(x)$  es estrictamente creciente  $\forall x \in ]-\infty, -3[ \cup ]2, \infty[$

$f'(x) < 0$  ;  $\forall x \in ]-3, 2[ \implies f(x)$  es estrictamente decreciente  $\forall x \in ]-3, 2[$

$f'(x) \geq 0$  ;  $\forall x \in ]-\infty, -3] \cup [2, \infty[ \implies f(x)$  es creciente;  $\forall x \in ]-\infty, -3] \cup [2, \infty[$

$f'(x) \leq 0$  ;  $\forall x \in [-3, 2] \implies f(x)$  es decreciente  $\forall x \in [-3, 2]$



-Definición: (Máximos y mínimos absolutos)

1) Sea  $f$  una función y  $A \subseteq \text{Dom } f$  se dice que  $f$  tiene un máximo absoluto en  $A$ , si existe  $x_0 \in A$  tal que:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in A$$

El número  $f(x_0)$  se llama máximo absoluto de  $f$  en  $A$ .

2) Sea  $f$  una función y  $A \subseteq \text{Dom } f$ . Se dice que  $f$  tiene un mínimo absoluto en  $A$ , si existe  $x_0 \in A$  tal que:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in A$$

El número  $f(x_0)$  se llama mínimo absoluto de  $f$  en  $A$ .

-Teorema:

Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  tiene un máximo o un mínimo absoluto en  $x_0 \in A$  y  $f$  es derivable en  $x_0 \in A$  entonces  $f'(x_0) = 0$

Observación:

El recíproco del teorema no es válido; la condición  $f'(x_0) = 0$  no implica que  $f$  tenga o un máximo o un mínimo absoluto en  $x_0$ ; tal es el caso de la función  $f(x) = x^3$  donde  $f'(x_0) = 0$  en  $x_0 = 0$  y no existe máx. ni mínimo en dicho punto.

Definición: (Máx y mín relativos)

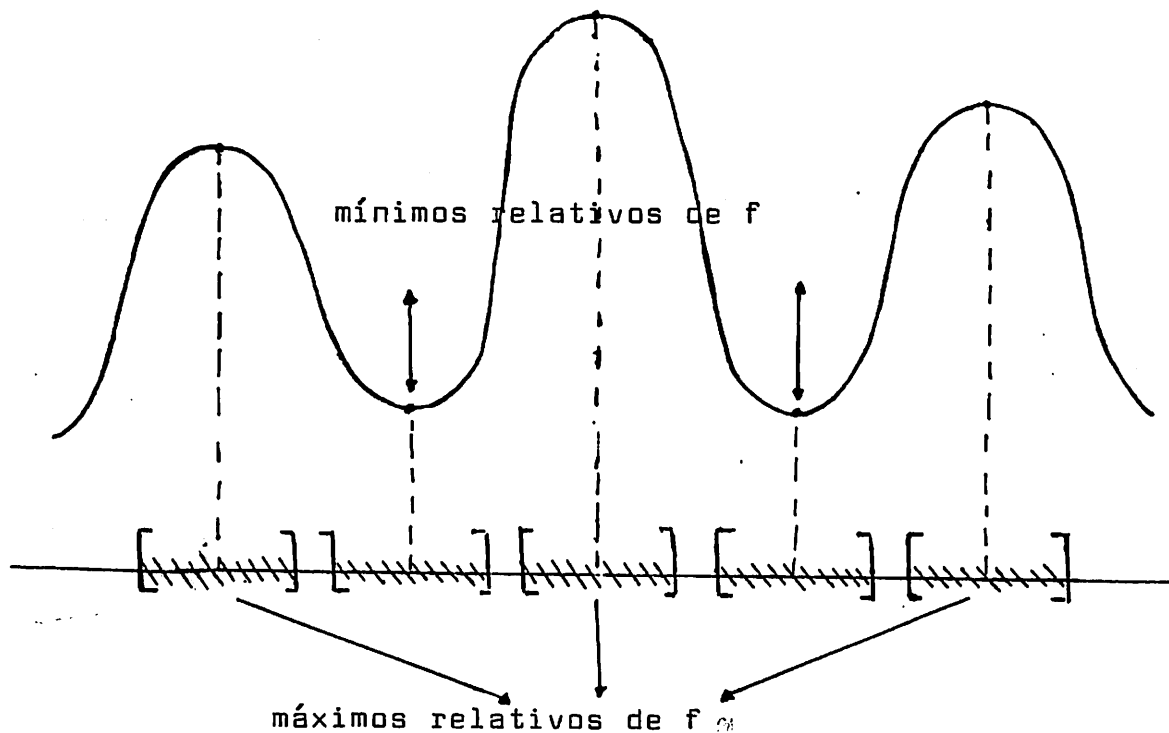
Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  ;  $x_0 \in A$

1) Se dice que  $f$  tiene un máximo relativo en  $x_0$ , si existe  $I \subseteq A$  tal que  $I = [a, b]$  con  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0)$  es máximo absoluto en  $I \cap A$ .

2) Se dice que  $f$  tiene un "Mínimo relativo" en  $x_0$ , si existe



$I \subseteq A$  tal que  $I = [a, b]$  con  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0)$  es un mínimo absoluto en  $I \cap A$ .



Teorema:

Sea  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  tiene un máximo o un mínimo relativo en  $x_0 \in A$  y  $f$  es derivable en  $x_0$  entonces  $f'(x_0) = 0$

Teorema:

Sea  $f$  una función derivable en  $]a, b[$  y  $x_0 \in ]a, b[$  un valor crítico de  $f$  tal que  $f'(x_0) = 0$ , entonces:

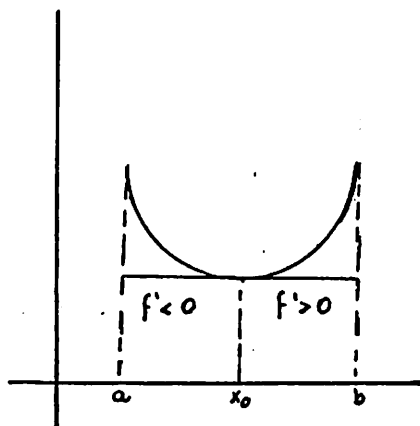
1) Si  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in ]a, x_0[$  y  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in ]x_0, b[$

entonces  $f(x_0)$  es un mínimo relativo de  $f$ .

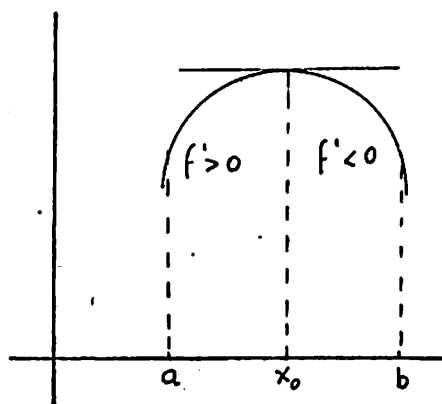
2) Si  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in ]a, x_0[$  y  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in ]x_0, b[$

entonces  $f(x_0)$  es un máximo relativo de  $f$ .





Ej.:



Sea  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$  definida en  $\mathbb{R}$ .

- 1) Hallar los puntos críticos de  $f$ .
- 2) Intervalos en los cuales  $f$  es creciente y en los cuales  $f$  es decreciente.
- 3) Los máximos y mínimos relativos de  $f$ .
- 4) Con la información anterior graficar  $f$ .

Solución:

$$1) f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Para hallar los valores críticos hacemos  $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) = 0 &\implies 3x^2 - 6x = 0 \\ &\implies 3x(x-2) = 0 \\ &\implies x = 0 \vee x = 2 \end{aligned}$$

$$f(0) = -1 \implies P_1(0, -1) \text{ punto crítico}$$

$$f(2) = -5 \implies P_2(2, -5) \text{ punto crítico:}$$

$$2) f'(x) = 3x(x-2)$$

$$f'(x) > 0 \implies 3x(x-2) > 0$$

$$\implies (3x > 0 \wedge x-2 > 0) \vee (3x < 0 \wedge x-2 < 0)$$



$$\implies (x > 0 \wedge x > 2) \vee (x < 0 \wedge x < 2)$$

$$\implies (x > 0 \wedge x > 2) \vee (x < 0 \wedge x < 2)$$

$$\implies S = ]-\infty, 0[ \cup ]2, \infty[$$

$\therefore f(x)$  es est. creciente  $\forall x \in ]-\infty, 0[ \cup ]2, \infty[$

$$f'(x) < 0 \implies 3x(x-2) < 0$$

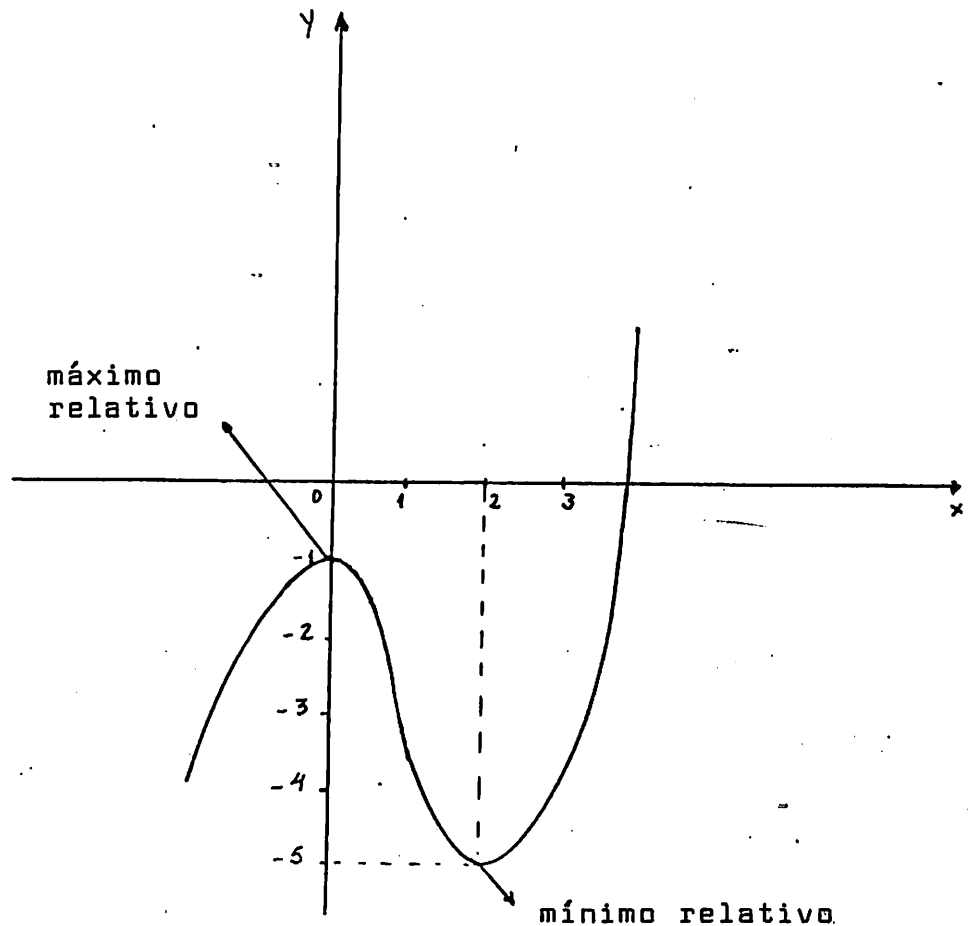
$$\implies (3x > 0 \wedge x-2 < 0) \vee (3x < 0 \wedge x-2 > 0)$$

$$\implies (x > 0 \wedge x < 2) \vee (x < 0 \wedge x > 2)$$

$$\implies S = ]0, 2[$$

$\therefore f(x)$  es est. decreciente  $\forall x \in ]0, 2[$

3)



Ej.:

La función  $f(x) = x^3 - 8$  no tiene máximos ni mínimos.

En efecto de  $f'(x) = 0$  encontramos  $x = 0$ ; luego tenemos dos intervalos  $] -\infty, 0 [$  y  $] 0, \infty [$ ; en ambos intervalos  $f'(x) > 0$ ; es decir, en ambos intervalos la función es creciente, luego no hay máximos ni mínimos.

Observación:

Puede ocurrir también que  $y = f(x)$  tenga máximos o mínimos  $f(x_0)$  aunque no exista  $f'(x_0) = 0$ . Los valores  $x_0$  para los cuales  $f(x)$  está definida pero no existe  $f'(x_0)$ , también reciben el nombre de valores críticos y junto con los otros para los cuales  $f'(x) = 0$  sirven para establecer máximos y mínimos.

Ej.:

Determinar máximos y mínimos para la función:

$$f(x) = (x-1) \sqrt[3]{x^2}$$

Solución:

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3} (x-1) \cdot x^{-1/3}$$

$$\therefore f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{3x + 2(x-1)}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = \frac{5x - 2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} \implies f'(x) = \frac{5(x - \frac{2}{5})}{3 \sqrt[3]{x}}$$

Observe que  $f'(x)$  es discontinua en  $x_0 = 0$ , sin embargo, la función está definida y es continua en dicho punto.



	$-\infty$	$0$	$2/5$	$\infty$
$\sqrt[3]{x}$	-	+	+	
$x - \frac{2}{5}$	-	-	+	
$F'(x)$	+	-	+	

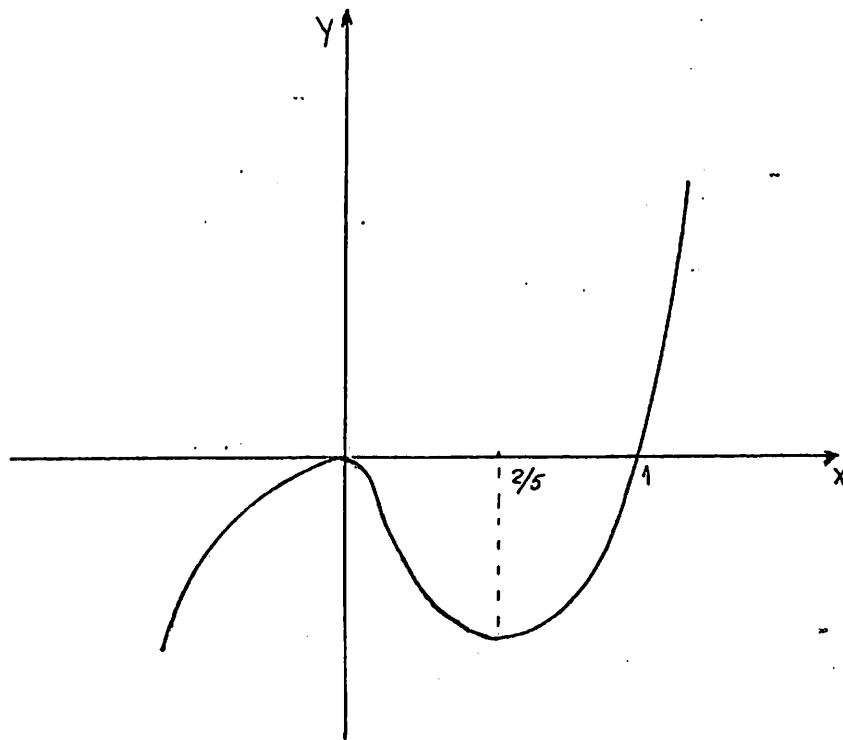
$\therefore f(x)$  es creciente  $\forall x \in ]-\infty, 0[ \cup [2/5, \infty[$

$f(x)$  es decreciente  $\forall x \in ]0, 2/5]$

Luego:

$$\begin{array}{c} \text{crec.} \quad \text{decrec.} \quad \text{crec.} \\ \hline f'(x) \geq 0 \quad 0 \quad f'(x) \leq 0 \quad 2/5 \quad f'(x) \geq 0 \end{array}$$

es decir: en  $x_0 = 0$  la función alcanza un máximo local y este máximo es  $f(x_0) = f(0) = 0$ . En  $x_0 = \frac{2}{5}$  la función alcanza un mínimo local y este mínimo es  $f(x_0) = f(\frac{2}{5}) = -\frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{25}}$



Ejercicio:

Dada la función  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

Determinar:

- 1) Puntos críticos.
- 2) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- 3) Máximos y mínimos relativos.

Definición: (Concavidad, convexidad)

- 1) Un arco de la curva  $y = f(x)$  es "cóncavo", si cada uno de sus puntos está situado por encima de la tangente.
- 2) Un arco de la curva  $y = f(x)$  es "convexo", si cada uno de sus puntos está situado por debajo de la tangente.

Observación:

1) Sea  $A = ]a, b[$  y  $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ; si  $f''(x) > 0 \quad \forall x \in A$ , entonces  $y = f(x)$  es cóncava en dicho intervalo.

2) Sea  $A = ]a, b[$  y  $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ; si  $f''(x) < 0 \quad \forall x \in A$ , entonces  $y = f(x)$  es convexa en dicho intervalo.

Definición: (Punto de inflexión)

Una función  $f$  tiene un punto de "inflexión" en  $x_0$  si la gráfica de  $f$  es cóncava a un lado del punto y convexa al otro lado de él, o vice-versa.

Teorema:

Si en  $x_0$  hay un punto de inflexión y  $f''$  existe, entonces



$$f''(x_0) = 0$$

Teorema:

Si  $f$  tiene segunda derivada  $f''$  continua y  $x_0$  es un punto crítico e.d.  $f'(x_0) = 0$  entonces:

- 1) Si  $f''(x_0) > 0$  ;  $f$  tiene un mínimo relativo en  $x_0$ .
- 2) Si  $f''(x_0) < 0$  ;  $f$  tiene un máximo relativo en  $x_0$ .
- 3) Si  $f''(x_0) = 0$  ; el criterio no es concluyente.

Observación:

- 1) El Teorema nos provee de un criterio para determinar cuando un punto crítico es un máximo o mínimo relativo usando la segunda derivada.
- 2) No es suficiente saber que  $f''(x_0) = 0$  para concluir que  $x_0$  es un punto de inflexión, debe además, saberse que  $f''(x) > 0$  a un lado y que  $f''(x) < 0$  al otro lado de  $x_0$ , o viceversa.
- 3) Un ejemplo de (2) lo ilustra la función:

$$f(x) = x^4 \implies f'(x) = 4x^3 \implies f''(x) = 12x^2 \text{ y}$$

$f''(0) = 0$  ; sin embargo  $f(x)$  no posee un punto de inflexión en  $x_0 = 0$  , de hecho en  $x_0 = 0$  hay un mínimo.

Ej.:

Sea  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$  . Encontrar:

- 1) Puntos críticos



- 2) Máximos y Mínimos relativos
- 3) Concavidad y convexidad
- 4) Puntos de inflexión.

Solución:

$$1) f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) = 0 & \implies 2(1-x^2) = 0 \\ & \implies 2(1-x)(1+x) = 0 \\ & \implies 1-x=0 \quad \vee \quad 1+x=0 \\ & \implies x=1 \quad \vee \quad x=-1 \end{aligned}$$

Puntos críticos:  $P_1(1,1)$  :  $P_2(-1,-1)$

$$2) f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$\therefore f''(1) = -1 < 0$$

Luego en  $x_0 = 1$  hay un máximo relativo o bien el punto  $P_1(1,1)$  es un máximo relativo.

$$f''(-1) = 1 > 0$$

Luego en  $x_0 = -1$  hay un mínimo relativo es decir:  $P_2(-1,-1)$  es un mínimo relativo.

$$\begin{aligned} 3) f''(x) = 0 & \implies 4x(x^2-3) = 0 \\ & \implies x=0 \quad \vee \quad x^2-3=0 \end{aligned}$$



$$\implies x = 0 \quad \vee \quad x = \pm \sqrt{3}$$

$$f''(x) = \frac{4x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x^2 + 1)^3}$$

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$0$	$\sqrt{3}$	$\infty$
$x$	-	-	+	+	
$x - \sqrt{3}$	-	-	-	+	
$x + \sqrt{3}$	-	+	+	+	

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in ] -\sqrt{3}, 0 [ \cup ] \sqrt{3}, \infty [$$

$\therefore f(x)$  es cóncava  $\forall x \in ] -\sqrt{3}, 0 [ \cup ] \sqrt{3}, \infty [$

$$f''(x) < 0 \quad \forall x \in ] -\infty, -\sqrt{3} [ \cup ] 0, \sqrt{3} [$$

$\therefore f(x)$  es convexa  $\forall x \in ] -\infty, -\sqrt{3} [ \cup ] 0, \sqrt{3} [$

$$\begin{array}{cccc} f''(x) < 0 & f''(x) > 0 & f''(x) < 0 & f''(x) > 0 \\ \hline & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \end{array}$$

Luego en  $x_0 = -\sqrt{3}$ ;  $x_0 = 0$ ;  $x_0 = \sqrt{3}$  tenemos puntos

de inflexión.

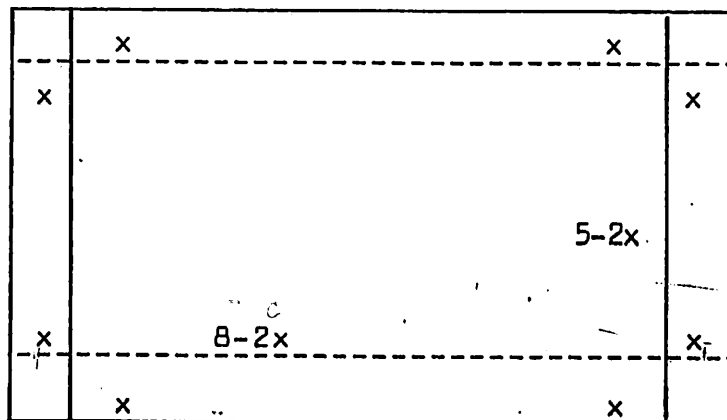


## Problemas de Aplicación:

1) Se quiere construir una caja rectangular de una lámina de 8 cm por 5 cm ; cortando un cuadrado en cada esquina y enseguida doblando los lados que resultan.

Hallar el lado del cuadrado para que su volumen sea máxi  
mo.

Solución:



$$V = (8-2x)(5-2x) \cdot x$$

$$V = (8x-2x^2)(5-2x)$$

$$V' = (8-4x)(5-2x) + (8x-2x^2)(-2)$$

$$V' = 4(2-x)(5-2x) - 4x(4-x)$$

$$V' = 4 \cdot [10 - 4x - 5x + 2x^2 - 4x + x^2]$$

$$V' = 4 \cdot [3x^2 - 13x + 10]$$

$$V' = 0 \implies 3x^2 - 13x + 10 = 0$$

$$\implies 3x^2 - 13x + 10 = 0$$



$$\implies x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 120}}{6}$$

$$\implies x = \frac{13 \pm 7}{6} \implies x = \frac{20}{6} \vee x = \frac{6}{6}$$

$$\implies x = \frac{10}{3} \vee x = 1$$

$$V'' = 4 [6x - 13]$$

$$V'' \left( \frac{10}{3} \right) = 4 \cdot \left[ 6 \cdot \frac{10}{3} - 13 \right] = 4 [20 - 13] = 28 > 0$$

$\therefore$  En  $x_0 = \frac{10}{3}$  hay un mínimo relativo

$$V''_{(1)} = 4 \cdot [6x - 13]$$

$$V''_{(1)} = 4 \cdot [6 - 13] = 4(-7) = -28 < 0$$

$\therefore$  En  $x_0 = 1$  hay un máximo relativo.

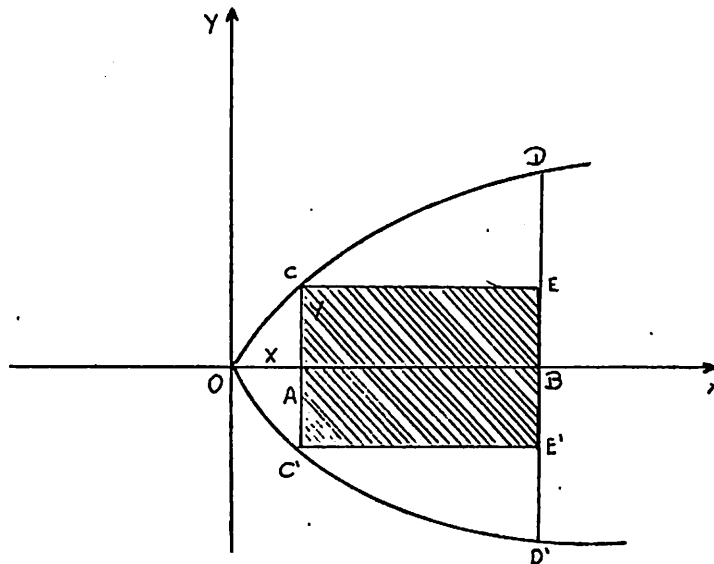
Luego; las medidas de la caja son:

$$6, 3, 1 \implies V = 18 \text{ cm}^3$$

2) ¿Cuál es el ancho del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en una parábola?



Solución:



Si hacemos  $OB = a \implies AB = a - x \wedge CC' = 2y$

Luego el área del rectángulo:  $C E C' E'$  es :

$$S = 2y(a-x)$$

Si  $C(x, y)$  es un pto. de la parábola  $y^2 = 2px$  entonces la ecuación anterior queda:

$$S = 2 \sqrt{2px} (a-x)$$

$$S' = \cancel{2} \frac{2p}{\cancel{2}\sqrt{2px}} (a-x) + 2\sqrt{2px} (-1)$$

$$S' = \frac{2p(a-x)}{\sqrt{2px}} - 2\sqrt{2px}$$

$$S' = 0 \implies 2p(a-x) - 2 \cdot 2px = 0$$

$$\implies 2pa - 2px - 4px = 0$$

$$\implies 2pa - 6px = 0$$

$$\implies a - 3x = 0$$

$$\implies x = \frac{a}{3}$$

$$\text{Luego: } AB = a - x = a - \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}$$



## Ejercicios:

1) Hallar máximos y mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de inflexión y los intervalos en que la curva es cóncava o convexa, para:

(1)  $f(x) = 3 + 2x - x^2$

(2)  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

(3)  $f(x) = (2 - x)^3$

(4)  $f(x) = (x^2 - 4)^2$

(5)  $f(x) = (x+2)(x-2)^3$

2) Demostrar que la función  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  carece de máximos y mínimos relativos.

3) Hallar los máximos y mínimos de la función:

$$2x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 8y - 1 = 0$$

Sol.: Máx: (5,3) Min: (-1,-3)

4) Hallar la ecuación de la recta que, pasando por el punto (3,4), determina en el 1er. cuadrante con los ejes coordenados un triángulo de área mínima.

Sol.:  $4x + 3y - 24 = 0$

5) Hallar la mínima distancia del punto (4,2) a la parábola  $y^2 = 8x$

Sol.:  $2\sqrt{2}$



6) En un cono circular recto de radio  $r$  y altura  $h$ , se inscriba un cilindro circular recto. Hallar el radio  $R$  del cilindro para que:

- a) Su volumen sea máximo  
 b) Su área lateral sea máxima

Solución: a)  $R = \frac{2}{3} r$       b)  $R = \frac{1}{2} r$

7) Demostrar que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio  $r$ , el de área mínima es el equilátero de lado  $3r$ .

8) Determinar las dimensiones del cilindro circular recto:

a) de área lateral máxima; b) de volumen máximo; que se puede inscribir en una esfera de 8 cm de radio.

Sol.: a)  $h = 2r = 8\sqrt{2}$  cm

b)  $h = \frac{8}{3}\sqrt{3}$  ;  $r = \frac{8}{3}\sqrt{6}$

9) La suma de tres números positivos es 40. El primero más el triple del segundo más el cuádruple del tercero suman 80. Elegir los números de modo que su producto sea el mayor posible.

10) De todos los rectángulos que tienen un perímetro dado  $P$ . ¿Cuál es el que tiene un área máxima?

Sol.: El cuadrado.

11) Un trozo de alambre de longitud  $L$ , se corta en dos partes, una de las cuales se dobla en forma de un cuadrado y la otra en forma de circunferencia. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas cerradas sea mínima?

Sol.:  $\frac{L\pi}{\pi+4}$  ;  $\frac{4L}{\pi+4}$



12) La fuerza de una corriente eléctrica circular que actúa sobre un imán pequeño con su eje perpendicular al plano del círculo y que pasa por su centro, se expresa mediante la fórmula:

$$F = \frac{cx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

donde  $a$  = radio del círculo

$x$  = distancia del centro del círculo al imán:  $0 < x < \infty$

$c$  = constante

¿Para qué valor de  $x$  será máximo el valor de  $F$ ? Sol.:  $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

13) Considere la siguiente situación. A un arquitecto que va a construir una fábrica se le dice que:

a) Un cierto corredor debe tener 5 mts de ancho

b) Un segundo corredor va a unirse con el anterior en ángulo recto.

c) Varillas rígidas de 15 mts. de largo deben pasar horizontalmente por la esquina que forman los dos corredores. ¿Qué ancho mínimo debe tener el segundo corredor?

Sol.: 17.5 mts.

14) La iluminación de una fuente de luz en cualquier punto varía directamente con la fuerza lumínica de la fuente, e inversamente proporcional con el cuadrado de la distancia a la fuente. Dos fuentes separadas por una distancia de 100 mts, tienen intensidades de 8 [u] y 1 [u] respectivamente. Determinar en que punto entre ellos la iluminación es mínima.

Indicación: Suponer que la iluminación en cualquier punto es igual a la suma de las iluminaciones de las dos partes.

15) Un proyectil se dispara desde el origen de coordenadas de tal manera que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal; la trayectoria



ria está dada por:

$$y = \frac{gx^2}{2v_0 \cos^2 \alpha} - x \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

¿Cuándo debe valer  $\alpha$  para que el alcance del tiro sea máximo?

$$\text{Sol.: } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

16) Hallar el mayor rectángulo inscriptible en la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Sol.: } x = \sqrt{2} \cdot a; \quad y = \sqrt{2} \cdot b$$

Teorema de Rolle :

Sea  $f$  continua en el intervalo  $[a, b]$  y derivable en  $]a, b[$   
 Si  $f(a) = f(b) = 0$  ; entonces existe al menos un valor de  $x = x_0$   
 entre  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$  tal que:  $f'(x_0) = 0$

Demostración:

Hay tres posibilidades:

$$\begin{aligned} 1) \quad \text{Si } f(x) = 0 \quad \forall x \in ]a, b[ &\implies f'(x) = 0 \quad \forall x \in ]a, b[ \\ &\implies f'(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in ]a, b[ \end{aligned}$$

2) Si  $f(x) > 0$  en algún pto. entre  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$  ; entonces el máximo de  $f$  es positivo y elegimos  $x_0$  como el valor donde se encuentra este máximo; de acuerdo a teo. anterior  $f'(x_0) = 0$

3) Análogamente si  $f(x) < 0$  para algún punto entre  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$ .

Corolario:

Si  $f$  cumple las hipótesis del Teo. de Rolle y si  $f(a) = f(b) \neq 0$  existe al menos un valor  $x = x_0$  entre  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$  tal que  $f'(x_0) = 0$

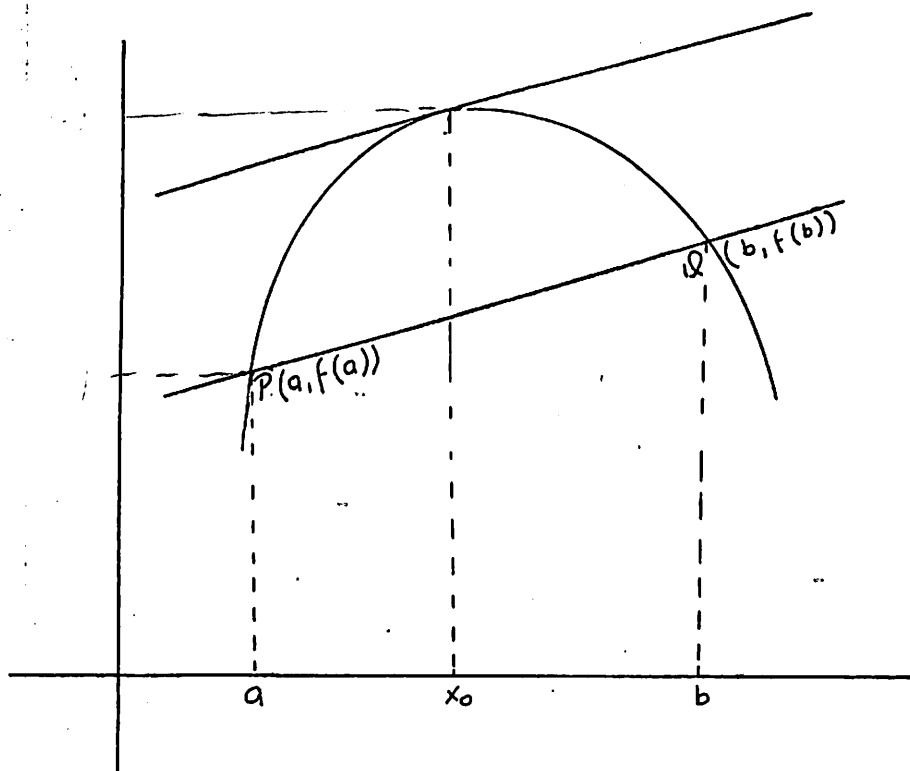


**Teorema del Valor Medio:**

Sea  $f$  continua en el intervalo  $[a,b]$  y derivable en  $]a,b[$ ; entonces existe al menos un valor de  $x = x_0$ ;  $x_0 \in ]a,b[$  tal que:

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

**Demostración:**



La ecuación de la secante PQ es :

$$y - f(a) = m(x-a)$$

Pero  $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



$$\therefore y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a)$$

Definamos la función:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (x-a) - f(a)$$

entonces:

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (a-a) - f(a) = 0$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (b-a) - f(a) = 0$$

Luego  $F(x)$  satisface todas las hipótesis del Teo. de Rolle.  
Luego debe existir un valor  $x_0$  tal que  $F'(x_0) = 0$

Luego:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\therefore f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Ej.:

Encuentre un valor  $x_0$  que satisfaga el Teo. de Rolle ;  
para  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  ;  $x \in [1,3]$

Solución:

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(x_0) = 2x_0 - 4$$

$$f(1) = 0$$

$$f(3) = 0$$

$$\implies f(1) = f(3) = 0$$



$$\begin{aligned} \therefore f'(x_0) = 0 &\implies 2x_0 - 4 = 0 \\ &\implies x_0 = 2 ; x_0 \in ]1,3[ \end{aligned}$$

Ej.:

Encuentre todos los valores  $x_0$  entre  $a$  y  $b$  que satisfagan el Teo. del Valor Medio si:

$$1) f(x) = \frac{x-1}{x+1} ; a = 0, b = 3$$

$$2) f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x ; a = -1 ; b = 2$$

$$3) f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x ; a = -2 ; b = -1$$

Solución:

$$1) f(a) = f(0) = -1$$

$$f(b) = f(3) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x_0) = \frac{x_0+1 - x_0+1}{(x_0+1)^2} = \frac{2}{(x_0+1)^2}$$

$$\therefore f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies \frac{2}{(x_0+1)^2} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{3 - 0} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore (x_0+1)^2 = 4 \implies x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0$$

$$\implies (x_0-1)(x_0+3) = 0$$

$$\implies x_0 = 1 \vee x_0 = -3$$

$$\implies x_0 = 1 ; x_0 \in ]0,3[$$



$$2) \quad f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x \quad ; \quad a = -1 \quad ; \quad b = 2$$

$$f'(x_0) = 4x_0^3 - 6x_0^2 + 2x_0 - 2$$

$$f(b) = f(2) = 0$$

$$f(a) = f(-1) = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} f(b) = f(2) = 0 \\ f(a) = f(-1) = 6 \end{array} \right\} \implies f(b) - f(a) = -6$$

$$\therefore f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies 4x_0^3 - 6x_0^2 + 2x_0 - 2 = \frac{-6}{3} = -2$$

$$\therefore 4x_0^3 - 6x_0^2 + 2x_0 - 2 = -2 \implies 4x_0^3 - 6x_0^2 + 2x_0 = 0$$

$$\implies x_0(4x_0^2 - 6x_0 + 2) = 0$$

$$\implies x_0 = 0 \quad \vee \quad 4x_0^2 - 6x_0 + 2 = 0$$

$$\implies x_0 = 0 \quad \vee \quad x_0 = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{8}$$

$$\implies x_0 = 0 \quad \vee \quad x_0 = 1 \quad \vee \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x_0 = 0; \frac{1}{2}; 1; \quad x_0 \in ] -1, 2 [$$

$$3) \quad f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x \quad ; \quad a = -2 \quad ; \quad b = -1$$

$$f'(x_0) = 4x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 2$$

$$f(b) = f(-1) = -5$$

$$f(a) = f(-2) = -8$$

$$\left. \begin{array}{l} f(b) = f(-1) = -5 \\ f(a) = f(-2) = -8 \end{array} \right\} \implies f(b) - f(a) = 3$$

$$\therefore f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies 4x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 2 = 3$$

$$\therefore 4x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 - 1 = 0$$



$$\implies (x_0 - 1)(4x_0^2 + 7x_0 + 1) = 0$$

$$\implies x_0 = 1 \quad \vee \quad 4x_0^2 + 7x_0 + 1 = 0$$

$$\implies x_0 = 1 \quad \vee \quad x_0 = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 16}}{8}$$

$$\implies x_0 = 1 \quad \vee \quad x_0 = -0.28 \quad \vee \quad x_0 = -1.47$$

$$\implies x_0 = -1.47 \quad ; \quad x_0 \in ] -2, -1 [$$

Teorema de Cauchy:

Sea  $f$  y  $g$  funciones continuas en el intervalo  $[a, b]$  y derivables en  $]a, b[$ ; siendo  $g'(x) \neq 0$ ; entonces existe al menos un valor de  $x = x_0$ ;  $x_0 \in ]a, b[$  tal que:

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Demostración:

Si  $g(a) = g(b)$  según el corolario del Teo. de Rolle  $g'(x) = 0$  en algún  $x$  comprendido entre  $a$  y  $b$ ; lo que contradice la hipótesis; luego  $g(a) \neq g(b)$ . Si hacemos:

$$F(x) = f(x) - f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(b))$$

$F(x)$  cumple las hipótesis del Teorema de Rolle pues:

$$F(a) = f(a) - f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(a) - g(b)) = 0$$

$$F(b) = f(b) - f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(b) - g(b)) = 0$$



Y además  $F(x)$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $]a, b[$ ; entonces:  $F'(x_0) = 0$ ;  $\forall x_0 \in ]a, b[$

$$\therefore F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$$

$$\therefore F'(x_0) = 0 \implies F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x_0) = 0$$

$$\implies \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Ej.:

Sean  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ;  $g(x) = x^2 - 4x + 6$ ;  $a = 0$ ;  $b = 1$   
hallar un valor  $x_0$  que cumpla las condiciones del Teo. de Cauchy.

Solución:

$$f'(x_0) = 2x_0 + 2 \quad ; \quad f(a) = f(0) = -3 \quad ; \quad f(b) = f(1) = 0$$

$$g'(x_0) = 2x_0 - 4 \quad ; \quad g(a) = g(0) = 6 \quad ; \quad g(b) = g(1) = 3$$

$$\therefore \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{2x_0 + 2}{2x_0 - 4} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{0 + 3}{3 - 6} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$\therefore 2x_0 + 2 = -2x_0 + 4 \implies 4x_0 = 2 \implies x_0 = \frac{1}{2}; \quad x_0 \in ]0, 1[$$

Observación:

Si en el Teo. de Cauchy hacemos  $g(x) = x$ ; este teorema coincide con el Teo. del Valor medio.



## Generalización del Teorema del Valor Medio:

Si  $f$  y sus  $(n-1)$  primeras derivadas son continuas en  $[a, b]$  y existe la  $n$ -ésima derivada de  $f$  en el intervalo abierto  $]a, b[$ ; entonces hay al menos un valor de  $x = x_0$ ;  $x_0 \in ]a, b[$  tal que:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (b-a) + \frac{f''(a)}{2!} (b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (b-a)^{n-1} + \frac{f^n(x_0)}{n!} (b-a)^n$$

## Observación:

1) Si sustituimos  $b$  por la variable  $x$ ; tenemos:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} + \frac{f^n(x_0)}{n!} (x-a)^n \text{ (Serie de Taylor)}$$

donde  $x_0$  está entre  $a$  y  $x$ .

2) Si sustituimos  $a$  por cero, tenemos:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{f^n(x_0)}{n!} x^n$$

(Serie de Maclaurin)

donde  $x_0$  está entre  $0$  y  $x$ .



Ej.:

Sea  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$  hallar un valor  $x_0$  entre 0 y 3 que satisfaga el Teo. generalizado del valor medio.

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

Luego:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(x_0)}{2!} x^2$$

Como  $x = 3$ 

$$f(x) = f(3) = 49$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = -2 \text{ entonces:}$$

$$f(3) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot 3 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot 9$$

$$49 = 1 + \frac{-2}{1!} \cdot 3 + \frac{6x_0 + 6}{2!} \cdot 9$$

$$49 = 1 - 6 + 27(x_0 + 1)$$

$$27(x_0 + 1) = 54$$

$$x_0 + 1 = 2$$

$$x_0 = 1$$

$$; x_0 \in ] 0, 3 [$$



## Ejercicios:

1) Encontrar todos los valores  $x_0$  entre a y b que satisfagan el Teorema del valor medio:

$$1) f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x \quad ; \quad a = 1 \quad ; \quad b = 3$$

$$2) f(x) = \frac{2x+3}{3x-2} \quad ; \quad a = 1 \quad ; \quad b = 4$$

$$3) f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x \quad ; \quad a = -1 \quad ; \quad b = 2$$

$$4) f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 5} \quad ; \quad a = -1 \quad ; \quad b = 4$$

$$5) f(x) = \sqrt{x^2 + 81} \quad ; \quad a = 12 \quad ; \quad b = 40$$

2) Hallar un valor  $x_0$  que cumple las condiciones del Teorema de Rolle.

$$1) f(x) = \sin x \quad ; \quad 0 < x_0 < \pi \quad \text{Sol.: } \pi/2$$

$$2) f(x) = \cos x \quad ; \quad \pi/2 < x_0 < 3\pi/2 \quad \text{Sol.: } \pi$$

$$3) f(x) = x^3 - 12x \quad ; \quad 0 < x_0 < 2\sqrt{3} \quad \text{Sol.: } 2$$

3) Hallar un valor  $x_0$  que cumpla las condiciones del teorema de Cauchy:

$$1) f(x) = x^2 + 2x - 3 \quad ; \quad g(x) = x^2 - 4x + 6 \quad ; \quad 0 < x_0 < 1$$

$$\text{Sol.: } 1/2$$

$$2) f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \cos x \quad ; \quad \pi/6 < x_0 < \pi/3$$

$$\text{Sol.: } \pi/4$$



4) Utilizando la serie de Taylor, hallar el valor aproximado de:

1)  $1/e$

2)  $\text{sen } 62^\circ$

3)  $\text{Ln } 0.97$

4)  $\text{tg } 31^\circ$

## FORMAS INDETERMINADAS:

Regla de L'Hôpital:

Dadas las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ , derivables en el intervalo definido por  $0 < |x-a| < \delta$  siendo  $a$  un número y  $g(x) \neq 0$  para todo  $x$  del intervalo; de manera que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  entonces si es infinito o existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  se tiene que:

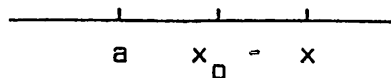
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración:

Sustituyendo  $b$  por  $x$  en el Teorema de Cauchy y teniendo en cuenta que  $f(a) = g(a) = 0$  se tiene que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad ; \quad x_0 \in ]a, x[$$

como  $f(a) = g(a) = 0$  entonces:



$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad ; \quad x_0 \in ] a, x [$$

Luego cuando  $x \longrightarrow a$  ;  $x_0 \longrightarrow a$  ; entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_0 \rightarrow a} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejs.:

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 - 256}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x^3}{2x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} 2x^2$$

$$\therefore = 2 \lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 2 \cdot 16 = 32$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow 2} e^x = e^2$$

Observación:

La regla de L'Hôpital sigue siendo válida si se efectúan una o ambas sustituciones en las hipótesis:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{se sustituyen por:}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

2) El número  $a$  se sustituye por  $+\infty$ ,  $-\infty$ , ó  $\infty$  y el intervalo  $0 < |x-a| < \delta$  se sustituye por:  $|x| > M$



Ejs.:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2 + 2}{e^x}$$

$$\therefore = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24}{e^x} = 24 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{5x + 2 \ln x}{x + 3 \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{5 + 2 \cdot \frac{1}{x}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{x}} = 5$$

Observación:

1) las formas  $0 \cdot \infty$  y  $\infty - \infty$ ; se pueden tratar como las anteriores reduciéndolas previamente a una de las formas  $0/0$  ó  $\infty/\infty$ .

2) Si  $\lim y$  conduce a uno de los tipos siguientes:  $0^0$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$  entonces  $\lim (\ln y)$  es de la forma  $0 \cdot \infty$ .

Ejs.:

$$1) \text{ Hallar } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x)$$

Solución:

Este límite es del tipo  $0 \cdot \infty$  entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \quad \text{es del tipo } \infty/\infty$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2} x^2\right) = 0$$



2) Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x)$

Solución:

Este límite es del tipo  $\infty - \infty$  entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right)$$

$$\therefore = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} \right)$$

que es del tipo  $0/0$  entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right) = 0$$

3) Hallar :  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^{\frac{1}{x-1}})$

Solución:

Es del tipo  $1^\infty$  entonces:

$$y = x^{\frac{1}{x-1}} \implies \operatorname{Ln} y = \frac{\operatorname{Ln} x}{x-1} \text{ es del tipo } 0/0$$

Luego  $\lim_{x \rightarrow 1} (\operatorname{Ln} y) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\operatorname{Ln} x}{x-1} \right)$

$$\therefore = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x} \right) = 1$$

como  $\operatorname{Ln} y \rightarrow 1$  cuando  $x \rightarrow 1$  ;  $y \rightarrow e$  ; luego el límite es igual a  $e$ .

4) Hallar :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$



Solución:

Es del tipo  $0^0$  entonces:

$$y = x^{\operatorname{sen} x} \implies \operatorname{Ln} y = \operatorname{sen} x \operatorname{Ln} x = \frac{\operatorname{Ln} y}{\operatorname{cosec} x} \quad \text{que es del tipo } \infty/\infty$$

entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{Ln} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\operatorname{Ln} x}{\operatorname{cosec} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x} \right)$$

$$\therefore = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\operatorname{sen}^2 x}{-x \cos x} \right)$$

$$\therefore = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{-\cos x + x \operatorname{sen} x} \right)$$

$$\therefore = 0$$

Como  $\operatorname{Ln} y \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 0^+$ ;  $y \rightarrow 1$ . Luego el límite es igual a 1.

5) Hallar  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$

Solución:

Es del tipo  $\infty^0$  entonces:

$$y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x} \implies \operatorname{Ln} y = \cos x \operatorname{Ln} \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{Ln} \operatorname{tg} x}{\operatorname{sec} x}$$

que es del tipo  $\infty/\infty$ , entonces:



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\text{Ln } y) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\text{Ln } \text{tg } x}{\sec x}$$

$$\therefore = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sec^2 x}{\text{tg } x}}{\sec x \text{tg } x}$$

$$\therefore = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{\sec x \text{tg}^2 x}$$

$$\therefore = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$\therefore = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}$$

$$\therefore = 0$$

Luego  $\text{Ln } y \longrightarrow 0$  cuando  $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ ;  $y \longrightarrow 1$ ; luego el límite es igual a 1.

Ejercicios:

Calcular los siguientes límites usando la regla de L'Hôpital:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$$

$$\text{Sol.: } \frac{1}{2}$$



$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cosec} 6x}{\operatorname{cosec} 2x} \quad \text{Sol.: } \frac{1}{3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Ln} \cotg x}{e^{\operatorname{cosec}^2 x}} \quad \text{Sol.: } 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x^3}{4e^x + 2x^2} \quad \text{Sol.: } \frac{1}{4}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \cotg x \quad \text{Sol.: } 1$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^x \quad \text{Sol.: } 0$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} \quad \text{Sol.: } 1$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} \quad \text{Sol.: } -\frac{1}{3}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2} \quad \text{Sol.: } e^{-6}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} (x - \operatorname{arcsen} x) \operatorname{cosec}^3 x \quad \text{Sol.: } -\frac{1}{6}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\operatorname{Ln} x} \right) \quad \text{Sol.: } \frac{1}{2}$$



$$12) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x)^{\operatorname{tg} x}$$

$$\text{Sol.: } \frac{1}{e}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1 - e^x)}{(1+x)\operatorname{Ln}(1-x)}$$

$$\text{Sol.: } 1$$

$$14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{3^{x^2}}$$

$$\text{Sol.: } 0$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3/x}{\frac{e}{x}}$$

$$\text{Sol.: } 0$$

$$16) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{Ln}^5 x}{x^2}$$

$$\text{Sol.: } 0$$

$$17) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{sec}^3 x - \operatorname{tg}^3 x)$$

$$\text{Sol.: } \infty$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{cosec}(\pi x) \cdot \operatorname{Ln} x$$

$$\text{Sol.: } -\frac{1}{\pi}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

$$\text{Sol.: } \frac{2}{\pi}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{2(1 - \sqrt{x})} - \frac{1}{3(1 - \sqrt[3]{x})} \right]$$

$$\text{Sol.: } \frac{1}{12}$$

